רשימות תרגול לקורס אלגברה לינארית
להנדסה מכנית

נכתב על ידי גאיה סטון ובן פוירשטיין

רשימות תרגול אילו נכתבו בצמוד לקרוס כפי שלימדו ד"ר לודה מרקוס-אפשטיין וד"ר ילנה קריינס
באוניברסיטת תל אביב בסמסטר א' תשפ"ה.
רשימות אילו עלולות להכיל טעויות, חוסרים או אי דיוקים, תיקונים יתקבלו בברכה.

bf1@mail.tau.ac.il
gaiastone@mail.tau.ac.il

תוכן העניינים

תרגול ראשון

1.1 פולינומים

1.1.1 הגדרת פולינומים ושורשיהם

תזכורת

פולינום הוא פונקציה $p(x)$ שמקבלת מספר ממשי ומחזירה מספר ממשי, מהצורה:

$$p(x) = a_n x^n + x_{n-1} x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$$

כאשר $a_n, ..., a_0$ מספרים ממשיים.
נקרא לa_m המקדם של x^m.
בהנתן פולינום $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$, כך ש $a_n \neq 0$,
נקרא לa_0 האיבר החופשי, לa_n האיבר המוביל, ולn הדרגה, או המעלה של $p(x)$ שנסמן $\deg(p)$.
לפולינום $p(x) = 0$ נקרא פולינום האפס, ונגדיר $\deg(p) = -\infty$ (נראה מדוע זו הגדרה הגיונית בהמשך). פולינום מהצורה $p(x) = a_n x^n$ נקרא מונום. לפולינום בו האיבר המוביל הוא 1 נקרא פוינום מתוקן.

הערה

בהמשך הקורס נגדיר מהו "מספר ממשי" בצורה ברורה יותר, כרגע נחשוב על המספרים הממשיים בתור המספרים שאנו מכירים, לדוגמא,

$$3, 1, -5, \frac{1}{2}, \pi, \sqrt{5}, \frac{3\pi}{4}, 0$$

הסימון של קבוצת הממשיים הוא $\mathbb{R}$, על שמן באנגלית, Real Numbers.
אם x_0 מספר ממשי, נסמן $x_0 \in \mathbb{R}$.
נסמן:

$$p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

כפונקציה שמקבלת מספר ב$\mathbb{R}$ ומחזירה מספר ב$\mathbb{R}$.

תרגיל 1.1.1.

קבעו האם הפונקציות הבאות הן פולינומים, אם כן מצאו את הדרגה, האיבר החופשי והמקדם המוביל שלהם.

1. $$p_1(x) = 5x + 3$$
2. $$p_2(x) = 5$$
3. $$p_3(x) = 10x^5$$
4. $$p_4(x) = \frac{x^2}{x+1}$$
5. $$p_5(x) = 0$$
6. $$p_6(y) = y^3 + 2y^2 - 1$$
7. $$p_7(x) = x^{\frac{1}{2}}$$
8. $$p_8(a) = \pi a^3 - 7a$$
9. $$p_9(x) = x^3 + x + 3^x$$

פתרון:

	$\deg(p)$	האיבר המוביל	האיבר החופשי
$p_1(x)$	1	5	3
$p_2(x)$	0	5	5
$p_3(x)$	5	10	0
$p_4(x)$	לא פולינום		
$p_5(x)$	$-\infty$	0	0
$p_6(x)$	3	1	-1
$p_7(x)$	לא פולינום		
$p_8(x)$	3	π	0
$p_9(x)$	לא פולינום		

תזכורת

שורש של פולינום $p(x)$ הוא מספר ממשי $x_0 \in \mathbb{R}$ המקיים,

$$p(x_0) = 0$$

דוגמא 1.1.2.

1.
$$p(x) = 3x - 6,\ x_0 = 2$$

2.
$$p(y) = y^2 - 1,\ y_0 = 1$$

3.
$$p(x) = x^2 - 6x + 9,\ x_0 = 3$$

4.
$$p(x) = 0,\ x_0 \in \mathbb{R}$$

5.
$$p(z) = z^4 + 3z^2 - 4,\ z_0 = 1$$

תרגיל 1.1.3.

הוכיחו כי אם סכום המקדמים של $p(x)$ שווה לאפס, אז $x_0 = 1$ שורש של $p(x)$.

<u>פתרון:</u>
יהא $p(x) = a_n x^n + ... + a_1 x + a_0$ פולינום כאשר סכום מקדמיו אפס, נציב $x_0 = 1$ ונקבל:

$$p(x_0) = p(1) = a_n \cdot 1^n + ... + a_1 \cdot 1 + a_0 = a_n + ... + a_1 + a_0 = 0$$

ולכן $x_0 = 1$ שורש של $p(x)$.

טענה 1.1.4 (ללא הוכחה).

1. לפולינום ממעלה $n = \deg(p)$ יש לכל היותר n שורשים.
2. אם לפולינום $p(x)$ מדרגה n יש $\xi_1, ..., \xi_n$ שורשים (לא בהכרח שונים), אז קיים $c \in \mathbb{R}$ כך ש:

$$p(x) = c(x - \xi_1) \cdot (x - \xi_2) \cdot ... \cdot (x - \xi_n)$$

ונשים לב כי c יהיה האיבר המוביל של $p(x)$.

טענה 1.1.5.

אם $\deg(p) = 2$, יש לנו נוסחא מפורשת למציאת שורשי הפולינום, הנקראת <u>נוסחאת השורשים.</u>

$$ax^2 + bx + c = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

<u>הוכחה:</u>

$$(x + a)^2 = x^2 + 2ax + a^2$$

אז:

$$\begin{aligned} ax^2 + bx + c = 0 &\Rightarrow x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0 \Rightarrow x^2 + 2\frac{b}{2a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a} = 0 \\ &\Rightarrow \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{c}{a} = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \\ &\Rightarrow x = \pm\sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}} - \frac{b}{2a} = \frac{\pm\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} - \frac{b}{2a} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \end{aligned}$$

נשים לב כי אם נסמן $\Delta = b^2 - 4ac$, אז יש לנו 3 מקרים:

1. אם $\Delta > 0$ אז יש לפולינום 2 שורשים.
2. אם $\Delta = 0$ אז יש לנו 2 פתרונות שהן אותו מספר, כלומר $p(x) = c(x - a)^2$.
3. אם $\Delta < 0$ אז אין פתרון.

תרגיל 1.1.6.

פתרו את המשוואת הבאות, כלומר מצאו את כל ה$x \in \mathbb{R}$ המקיימים אותן.

1.
$$x^2 - 7x + 12 = 0$$

2.
$$2x^2 - 12x + 18 = 0$$

3.
$$x^2 = -1$$

<u>פתרון:</u>

1.
$$x_{1,2}=\frac{7\pm\overbrace{\sqrt{7^2-4\cdot 12}}^{1}}{2}\Rightarrow x_1=3,x_2=4$$

2.
$$x_{1,2}=\frac{12\pm\cancelto{0}{\sqrt{12^2-4\cdot 2\cdot 18}}}{4}=3$$
כלומר, $x=3$ הפתרון היחיד.

3. המשוואה היא $x^2+1=0$, אז $\sqrt{b^2-4ac}=\sqrt{-4}$ שאינו מוגדר, ולכן אין פתרון.

הערה

גם לפולינומים ממעלה $3,4$ יש נוסחאות, אבל הן נורא נורא ארוכות, לדוגמא:

$$\begin{aligned} x \quad = \quad & \sqrt[3]{\left(\frac{-b^3}{27a^3}+\frac{bc}{6a^2}-\frac{d}{2a}\right)+\sqrt{\left(\frac{-b^3}{27a^3}+\frac{bc}{6a^2}-\frac{d}{2a}\right)^2+\left(\frac{c}{3a}-\frac{b^2}{9a^2}\right)^3}} \\ + \quad & \sqrt[3]{\left(\frac{-b^3}{27a^3}+\frac{bc}{6a^2}-\frac{d}{2a}\right)-\sqrt{\left(\frac{-b^3}{27a^3}+\frac{bc}{6a^2}-\frac{d}{2a}\right)^2+\left(\frac{c}{3a}-\frac{b^2}{9a^2}\right)^3}} \quad - \quad \frac{b}{3a}. \end{aligned}$$

עבור $ax^3+bx^2+cx+d=0$.
מסתבר שאין נוסחא לפולינומים מדרגה 5 ומעלה! זאת עובדה מאוד מפתיעה מתחום במתמטיקה הנקרא תורת גלואה.

1.1.2 מכפלה וסכום של פולינומים

תזכורת

יהיו $p(x),q(x)$ פולינומים. אנחנו יכולים לחבר פולינומים איבר איבר.

דוגמא 1.1.7.

נתבונן בדוגמאות הבאות:

1. $(x^2+5x)+(x^3+2x+4)=x^3+x^2+(5+2)x+4=x^3+x^2+7x+4$
2. $(z^4+4z^3+2)+(4z^4+z^3+3z)=5z^4+5z^3+3z+2$

3. $(x^{100}+x^4-3x)+(-x^{100}+3x+3)=x^4+3$

תרגיל 1.1.8.

יהיו $p(x),q(x)$ פולינומים הוכיחו כי: $p(x)+q(x)$ הוא פולינום ממעלה לכל היותר המקסימום של המעלות.

פתרון:
ראשית נסמן את הפולינומים באופן הבא: $p(x)=a_nx^n+...+a_0$, $q(x)=b_mx^m+...+b_0$.
נחלק למקרים:

1. אם $p(x)=0$, אז:
$$p(x)+q(x)=0+q(x)=q(x)$$
והטענה ברורה.
2. אם $q(x)=0$, אז המקרה זהה לחלוטין.
3. אם $n=\text{deg}(p)=\text{deg}(q)=m$, אז:
$$\begin{aligned}p(x)+q(x)&=(a_nx^n+...+a_0)+(b_mx^m+...+b_0)=a_nx^n+...+a_0+b_nx^n+...+b_0\\&=(a_n+b_n)x^n+...+(a_0+b_0)\end{aligned}$$
הוא פולינום, ודרגתו היא לכל היותר n (יכול להיות כי $a_n+b_n=0$ ואז הדרגה קטנה מ-n, אבל לא ייתכן כי דרגתו גדולה מ-n).
4. אם $n=\text{deg}(p)>\text{deg}(q)=m$, וגם $p(x)\neq 0, q(x)\neq 0$.
$$\begin{aligned}p(x)+q(x)&=(a_nx^n+...+a_{m+1}x^{m+1}+a_mx^m+...+a_0)+(b_mx^m+...+b_0)\\&=a_nx^n+...+a_{m+1}x^{m+1}+(a_m+b_m)x^m+...+(a_0+b_0)\\&=a_nx^n+...+(a_0+b_0)\end{aligned}$$
הוא פולינום, ומתקיים $\text{deg}(p+q)=\text{deg}(p)$ שכן $a_n\neq 0$.
5. המקרה האחרון שנשאר לנו הוא $\text{deg}(q)>\text{deg}(q)$, אבל ההוכחה הזאת זהה למקרה הקודם.

הערה

במקרים כאלה, שיש לנו 2 טענות להוכיח, אבל אנו יודעים מראש שההוכחות יהיו כמעט זהות, יש ביטוי בו משתמשים, הביטוי הוא "בלי הגבלת הכללית" או בראשי תיבות בה"כ, כאשר הניסוח הוא: בה"כ נניח כי $\text{deg}(p)>\text{deg}(q)$, השימוש בכלי הזה עלול להחביא טעויות, ויש להיזהר כאשר משתמשים בו.

תזכורת

יהיו $p(x), q(x)$ פולינומים. אנחנו יכולים להכפיל פולינומים ע"י פתיחת סוגריים וכינוס איברים.

דוגמא 1.1.9.

נתבונן בדוגמא הבאה:

$$(x^2+5x)\cdot(2x+4) = 2x^3+10x^2+4x^2+20x = 2x^3+14x^2+20x$$

תרגיל 1.1.10.

יהיו $p(x), q(x)$ פולינומים הוכיחו כי:
$p(x)\cdot q(x)$ הוא פולינום ממעלה $\deg(p)+\deg(q)$, כאשר נגדיר $-\infty + a = -\infty$ לכל a.

<u>פתרון:</u>
נחלק למקרים שוב,

1. בה"כ, $p(x)=0$, אז $p(x)\cdot q(x)=0$, ולכן

$$\deg(p(x)\cdot q(x)) = \deg(0) = -\infty$$

והוכחנו את הטענה.

2. נניח כי $p(x), q(x)\neq 0$,
נסמן את הפולינומים באופן הבא: $p(x)=a_nx^n+...+a_0$, $q(x)=b_mx^m+...+b_0$.
מתקיים:

$$(a_nx^n+...+a_0)(b_mx^m+...+b_0) = a_nb_mx^nx^m+....+a_0b_0 = a_nb_mx^{n+m}+....+a_0b_0$$

ראשית, נשים לב שאכן מדובר בפולינום, כאשר המקדם המוביל שלו הוא:

$$a_nb_mx^nx^m = a_nb_mx^{n+m}$$

ומשום ש $a_n\neq 0, b_m\neq 0$, אז גם $a_nb_m\neq 0$, ולכן:

$$n+m = \deg(p(x)q(x)) = \deg(p)+\deg(q) = n+m$$

1.1.3 חלוקה של פולינומים

תזכורת

יהיו $p(x), q(x)$ פולינומים שאינם פולינום האפס, אז קיימים פולינומים $r(x), s(x)$ כך ש $\deg(r) < \deg(p)$ המקיימים:

$$q(x) = s(x)p(x) + r(x)$$

וזה נותן לנו לכתוב:

$$\frac{q(x)}{p(x)} = s(x) + \frac{r(x)}{p(x)}$$

אם $r(x) = 0$ נאמר כי $p(x)$ מחלק את $q(x)$ ללא שארית.

טענה (ללא הוכחה) 1.1.11.

בהינתן $p(x), q(x)$ יש לנו אלגוריתם למציאת $r(x), s(x)$ שנקרא <u>חלוקה לשארית של פולינומים</u>.

דוגמא 1.1.12.

נניח ואנו רוצים לחלק את $\frac{x^4+x^3+5x^2+3x-10}{x^2-2x+1}$, כלומר $q(x) = x^4 + x^3 + 5x^2 + 3x - 10, p(x) = x^2 - 2x + 1$.

ניקח את המונום ממעלה הכי גבוה של $q(x)$ונחלק במונום ממעלה הגבוה ביותר של $p(x)$, במקרה שלנו נקבל

$\frac{x^4}{x^2} = x^2$, נכתוב את התוצאה מעל (ראו את הכתיב המלא מטה), נכפיל ב$p(x)$ ונחסיר מ$q(x)$ את מה שקיבלנו, כלומר:

$$(x^4 + x^3 + 5x^2 + 3x - 10) - x^2(x^2 - 2x + 1) = 3x^3 + 4x^2 + 3x - 10$$

נמשיך כך עד שישאר לנו פולינום ממעלה נמוכה יותר מ$p(x)$, לאחר שנסיים, מה שנשאר לנו מטה הוא $r(x)$, והפולינום שקיבלנו למעלה הוא $s(x)$.

$$\begin{array}{r|rrrrr}
 & & & x^2 & +3x & +10 \\ \cline{2-6}
x^2-2x+1 & x^4 & +x^3 & +5x^2 & +3x & -10 \\
 & x^4 & -2x^3 & +x^2 & & \\ \cline{2-6}
 & & 3x^3 & +4x^2 & +3x & -10 \\
 & & 3x^3 & -6x^2 & +3x & \\ \cline{3-6}
 & & & 10x^2 & & -10 \\
 & & & 10x^2 & -20x & +10 \\ \cline{4-6}
 & & & & 20x & -20
\end{array}$$

כלומר בדוגמא שלנו:

$$\frac{x^4+x^3+5x^2+3x-10}{x^2-2x+1}=x^2+3x+10+\frac{20x-20}{x^2-2x+1}$$

תזכורת

אם x_0 שורש של $p(x)$, אז $(x-x_0)$ מחלק את $p(x)$ ללא שארית.

תרגיל 1.1.13.

פתרו את המשוואה:

$$x^3-6x^2+11x-6=0$$

<u>פתרון:</u>

נשים לב כי סכום מקדמי הפולינום הוא:

$$1-6+11-6=0$$

ולכן $x_0=1$ שורש של הפולינום, נחלק ב$(x-1)$:

$$\begin{array}{r|llll}
 & & x^2 & -5x & +6 \\ \cline{2-5}
x-1 & x^3 & -6x^2 & +11x & -6 \\
 & x^3 & -x^2 & & \\ \cline{2-5}
 & & -5x^2 & +11x & -6 \\
 & & -5x^2 & +5x & \\ \cline{3-5}
 & & & 6x & -6 \\ \cline{4-5}
 & & & 0 &
\end{array}$$

כלומר:

$$\frac{x^3-6x^2+11x-6}{x-1}=x^2-5x+6$$

שזהו פולינום שאנו יודעים לפתור עם נוסחאת השורשים!

$$x_{1,2}=\frac{5\pm\sqrt{5^2-4\cdot 6}}{2}=\frac{5\pm 1}{2}$$

כלומר, השורשים שלנו הם $1,2,3$ או:

$$x^3-6x^2+11x-6=(x-1)(x-2)(x-3)$$

1.1.4 משפטי ויאטה

תזכורת

יהא $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$ פולינום עם שורשים $r_1, ..., r_n$, אז מתקיים:

1.
$$r_1 + ... + r_n = -\frac{a_{n-1}}{a_n}$$

2.
$$r_1 r_2 \cdot ... \cdot r_n = (-1)^n \frac{a_0}{a_n}$$

תרגיל 1.1.14.

יהא $p(x) = x^4 - 5x^2 + 4$ פולינום עם 4 שורשים ממשיים (נתון), נסמנם r_1, r_2, r_3, r_4, חשבו את:

$$s = (r_1 + r_2 + r_3)^4 \cdot (r_1 + r_3 + r_4)^4 \cdot (r_1 + r_2 + r_4)^4 \cdot (r_2 + r_3 + r_4)^4$$

פתרון:
נשים לב כי $r_1 + r_2 + r_3 + r_4 = 0$, אז:

$$\begin{aligned} s &= (r_1 + r_2 + r_3)^4 \cdot (r_1 + r_3 + r_4)^4 \cdot (r_1 + r_2 + r_4)^4 \cdot (r_2 + r_3 + r_4)^4 \\ &= (-r_1)^4(-r_2)^4(-r_3)^4(-r_4)^4 \\ &= (r_1 r_2 r_3 r_4)^4 = \left(\frac{a_0}{a_n}\right)^4 = (4)^4 \end{aligned}$$

תרגול שני

2.1 מספרים מרוכבים

2.1.1 מבוא למספרים מרוכבים

תזכורת

<u>מספר מרוכב</u> הינו מהצורה $a+ib$ כאשר $a,b\in\mathbb{R}$.
נסמן את אוסף המספרים המרוכבים ע"י $\mathbb{C}$, כלומר $a+ib\in\mathbb{C}$. נגדיר את פעולות הכפל והחיבור ב$\mathbb{C}$ ע"י:

$$(a+ib)+(c+id):=(a+c)+i(b+d)$$

$$(a+ib)\cdot(c+id):=(ac-bd)+i(ad+bc)$$

נבחין כי הגדרה זו עקבית עם $i^2=-1$, כלומר:

$$(a+ib)(c+id)=ac+iad+ibc+i^2bd=ac+iad+ibc-bd=(ac-bd)+i(ad+bc)$$

עבור $z=a+ib$, נקרא ל a <u>החלק הממשי</u> של z, ולו b <u>החלק המדומה</u>. ונסמן:

$$a=\text{Re}(z),\ b=\text{Im}(z)$$

כלומר:

$$z=\text{Re}(z)+i\,\text{Im}(z)$$

תרגיל 2.1.1.

מצאו את החלק המדומה והחלק הממשי של המספרים הבאים:

1.
$$z=3i+19i^2+14i^3+5$$

2.
$$z=(3+i)\alpha+i,\quad \alpha\in\mathbb{R}$$

3.
$$z=(3+i)\beta+i,\quad \beta\in\mathbb{C}$$

פתרון:

1.

$$z = 3i + 19i^2 + 14i^3 + 5 = 3i - 19 - 14i + 5 = (5 - 19) + i(3 - 14) = -14 - 11i$$

כלומר:

$$\text{Re}(z) = -14$$
$$\text{Im}(z) = -11$$

2.

$$z = (3 + i)\alpha + i = 3\alpha + i\alpha + i = 3\alpha + i(\alpha + 1)$$

כלומר:

$$\text{Re}(z) = 3\alpha$$
$$\text{Im}(z) = \alpha + 1$$

3. אם $\beta \in \mathbb{C}$, אז $\beta = \text{Re}(\beta) + i\,\text{Im}(\beta)$, אז:

$$\begin{aligned} z &= (3 + i)(\text{Re}(\beta) + i\,\text{Im}(\beta)) + i = (3\,\text{Re}(\beta) + 3i\,\text{Im}(\beta) + i\,\text{Re}(\beta) - \text{Im}(\beta)) + i \\ &= (3\,\text{Re}(\beta) - \text{Im}(\beta)) + i(3\,\text{Im}(\beta) + \text{Re}(\beta) + 1) \end{aligned}$$

אז:

$$\text{Re}(z) = 3\,\text{Re}(\beta) - \text{Im}(\beta)$$
$$\text{Im}(z) = 3\,\text{Im}(\beta) + \text{Re}(\beta) + 1$$

תרגיל 2.1.2.

חשבו את i^{2024}.

פתרון:
נשים לב כי:

$$i^1 = i$$
$$i^2 = -1$$
$$i^3 = -i$$
$$i^4 = 1$$
$$i^5 = i$$

כלומר, באופן כללי:

$$i^{k+4j} = i^k$$

כאשר k,j מספרים שלמים, נשים לב כי $2024 = 506 \cdot 4$, אז:

$$i^{2024} = i^4 = 1$$

תזכורת

כל מספר מרוכב $z = a + ib$ אפשר להציג גם בצורה שנקראת הצגה טריגונומטרית המזהה בין:

$$z = a + ib \iff re^{i\theta} := r(\cos\theta + i\sin\theta)$$

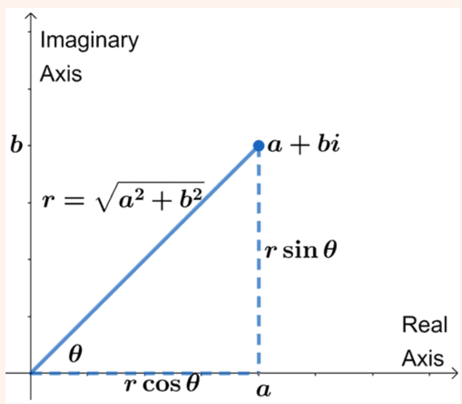
את הביטוי $\cos(\theta) + i\sin(\theta)$ אפשר לסמן ע"י $\mathrm{cis}(\theta)$, אבל גם ע"י $e^{i\theta}$ שהוא רק סימון, אבל יש לו גם משמעות מתמטית מדויקת שאותה נראה בהמשך.
כלומר:

$$r(\cos(\theta) + i\sin(\theta)) = r\,\mathrm{cis}(\theta) = re^{i\theta}$$

המעבר בין הצורות הוא:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \geq 0, \qquad \theta = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) = \arctan\left(\frac{\mathrm{Im}(z)}{\mathrm{Re}(z)}\right)$$

$$x = r\sin(\theta), \qquad y = r\sin(\theta)$$



נשים לב ל2 הערות.

1. לפעמים נצטרך להוסיף π ל $\arctan\frac{y}{x}$ משום שלמשל עבור $z_1 = 1 + i$, $z_2 = -z_1 = -1 - i$, מתקיים,

$$\frac{\mathrm{Im}(z_1)}{\mathrm{Re}(z_1)} = \frac{\mathrm{Im}(z_2)}{\mathrm{Re}(z_2)} = 1$$

מתקיים $\arctan(1) = \frac{\pi}{4}$, שזו אכן הזווית של z_1, אבל לא של z_2 שהיא $\frac{\pi}{4} + \pi = \frac{5}{4}\pi$. אז כל פעם שנמיר מספר מרוכב מהצגה אלגברית לטריגונומטרית נצטרך לשים לב לזווית.

2. לכל $re^{i\theta}$ קיימים a,b יחידים כך ש $re^{i\theta} = a + ib$ וזה גם (כמעט) נכון להפך, לכל משום שבהצגה טריגונומטרית, הזווית אדישה לחיבור כפולות של 2π, כי הרי לכל k שלם מתקיים:

$$\forall k \in \mathbb{Z}, \quad \cos(\theta + 2\pi k) = \cos(\theta)$$
$$\forall k \in \mathbb{Z}, \quad \sin(\theta + 2\pi k) = \sin(\theta)$$

כלומר:

$$re^{i(\theta+2\pi)} = re^{i\theta}$$

למשל:

$$1 = e^{i0} = e^{2\pi i} = e^{4\pi i} = \dots$$

אז אפשר למשל להגיד, שלכל $a+ib$ יש r,θ יחידים כך ש $re^{i\theta} = a+ib$ וגם $0 \leq \theta < 2\pi$.

היתרון העיקרי של ההצגה הטריגונומטרית הוא בהכפלת מספרים מרוכבים:

$$r_1e^{i\theta_1} \cdot r_2e^{i\theta_2} = (r_1r_2)e^{i(\theta_1+\theta_2)} = (r_1r_2)(\cos(\theta_1+\theta_2) + i\sin(\theta_1+\theta_2))$$

לעומת זאת, לחבר מספרים בצורה טריגונומטרית זה פחות אלגנטי, ובד"כ הדרך הקלה לעשות זאת היא להמיר לצורה אלגברית, לחבר ואז להמיר חזרה.

תרגיל 2.1.3.

מצאו מספר z כאשר $z^5 = 1$, אבל $z \neq 1$.

פתרון:
נשים לב כי בהצגה טריגומומטרית, $z = re^{i\theta}$, אז:

$$z^5 = (r^5)e^{i5\theta} = 1 = e^{2i\pi}$$

אז למשל $r = 1$, $\theta = \frac{2\pi}{5}$ יעבוד, והוא בהחלט אינו שווה ל1.

הערה

למעשה, יש 5 מספרים מרוכבים שמקיימים את המשוואה:

$$z^5 = 1$$

והם:

$$e^{\frac{2\pi}{5}i}, e^{\frac{4\pi}{5}i}, e^{\frac{6\pi}{5}i}, e^{\frac{8\pi}{5}i}, e^{\frac{10\pi}{5}i} = e^{2\pi i} = 1$$

אלה נקראים שורשי יחידה מסדר n,

2.1.2 ערך מוחלט והצמדה

תזכורת

למספר $z = a + ib = re^{i\theta} \in \mathbb{C}$ נסמן:

$$|z| = \sqrt{a^2+b^2} = r \in \mathbb{R}$$

$$\overline{z} = a - ib = re^{-i\theta} \in \mathbb{C}$$

כאשר נקרא ל-$|z|$ הערך המוחלט של z ול-$\overline{z}$ הצמוד של z.

זהות חשובה היא:

$$z\overline{z} = |z|^2$$

תרגיל 2.1.4.

חשבו את החלק הממשי והמדומה של:

$$z = \frac{i+1}{4+3i}$$

פתרון:

נשתמש בטריק הכפלה בצמוד, כלומר:

$$\frac{i+1}{4+3i} = \frac{(i+1)(\overline{4+3i})}{(4+3i)\overline{4+3i}} = \frac{(i+1)(4-3i)}{|4+3i|^2} = \frac{4i+4-3i^2-3i}{25} = \frac{7+i}{25} = \frac{7}{25} + \frac{1}{25}i$$

כלומר:

$$\text{Re}(z) = \frac{7}{25}, \qquad \text{Im}(z) = \frac{1}{25}$$

תרגיל 2.1.5.

פתרו את המשוואה:

$$\overline{z} = z^3$$

פתרון:

נסמן $z = re^{i\theta}$, אז:

$$re^{-i\theta} = r^3 e^{i3\theta}$$

כלומר:

$$r = r^3 \Rightarrow r - r^3 = 0 \Rightarrow r(1-r^2) = 0 \Rightarrow r = 0 \text{ או } r = 1$$

וגם:

$$-\theta = 3\theta + 2\pi k \Rightarrow -4\theta = 2\pi k \Rightarrow \theta = -\frac{\pi}{2}k$$

נזכר שאנו מתעניינים בזוויות בין 0 ל2π, אז:

$$z_1 = 0,\ z_2 = e^0 = 1,\ z_3 = e^{i\frac{\pi}{2}} = i,\ z_4 = e^{i\pi} = -1,\ z_5 = e^{i\frac{3\pi}{2}} = -i$$

2.1.3 שורשי יחידה ופולינומים מרוכבים

תזכורת

עבור מספר מרוכב $w = re^{i\theta}$, ישנם n מספרים z המקיימים $z^n = w$, מהצורה:

$$z = \sqrt[n]{r}e^{i\frac{\theta+2\pi k}{n}}$$

עבור $k = 0, ..., n-1$.
המונח "שורשים" יופיע מעט כאשר אנו מדברים על מספרים מרוכבים בקורס, פרט למקרה המיוחד שורשי היחידה , כלומר כאשר $w = 1$, ואז שורשי היחידה הם:

$$z = e^{i\frac{2\pi k}{n}}$$

עבור $k = 0, ..., n-1$.
נשים לב כי כל המספרים הללו נמצאים על מעגל היחידה, ויש בניהם אותה זווית, כלומר אם נשרטט אותם נקבל מצולע משוכלל.

תרגיל 2.1.6.

יהיו $z_1 = 4\sqrt{2} - i4\sqrt{2},\ z_2 = e^{i\frac{3\pi}{4}}$. פתרו את המשוואה: $w^3 = \frac{z_1}{z_2}$.

פתרון:
על מנצת לחחשב את $\frac{z_1}{z_2}$, נמיר את z_1 לצורה הטריגונומטרית:

$$r = \sqrt{(4\sqrt{2})^2 + (4\sqrt{2})^2} = \sqrt{64} = 8$$

$$\theta = \text{arctan}\left(\frac{-1}{1}\right) = \text{arctan}(-1) = \frac{7\pi}{4}$$

אז:

$$w^3 = \frac{z_1}{z_2} = \frac{8e^{i\frac{7\pi}{4}}}{e^{i\frac{3\pi}{4}}} = 8e^{i\pi} = -8$$

כלומר:

$$w^3 = -8$$

אז:

$$w_0 = \sqrt[3]{8}e^{i\frac{\pi+2\pi k}{3}}$$

עבור $k=0,1,2$, כלומר:

$$w_0=2e^{i\frac{\pi}{3}},\quad w_1=2e^{i\frac{\pi+2\pi}{3}}=-2,\quad w_2=2e^{i\frac{5}{3}}$$

תרגיל 2.1.7.

הראו כי לכל n, סכום שורשי היחידה הוא אפס.

פתרון:
נשים לב כי הסכום שלנו הוא סכום של סדרה הנדסית:

$$1+e^{i\frac{2\pi}{n}}+e^{i\frac{2\pi2}{n}}+...+e^{i\frac{2\pi(n-1)}{n}}=1+\left(e^{i\frac{2\pi}{n}}\right)+\left(e^{i\frac{2\pi}{n}}\right)^2+...+\left(e^{i\frac{2\pi}{n}}\right)^{n-1}$$

ואנו זוכרים מהתיכון כי:

$$1+q+q^2+...+q^n=\frac{q^{n+1}-1}{q-1}$$

אז סכום הסדרה שלנו היא:

$$\frac{\left(e^{i\frac{2\pi}{n}}\right)^n-1}{e^{i\frac{2\pi}{n}}-1}=\frac{1-1}{e^{i\frac{2\pi}{n}}-1}=0$$

פתרון נוסף (באמצעות נוסחאות ויטה):
נתרגם את השאלה לשאלה על פולינומים. נזכר כי שורשי היחידה מכל סדר n הם שורשים לפולינום:

$$q(z):=z^n-1$$

עבורו:

$$\deg(q)=n,\quad a_n=1,\quad a_{n-1}=0,\quad a_0=1$$

נזכר בנוסחאת ויטה עבור סכום מקדמים:

$$r_1+...+r_n=-\frac{b_{n-1}}{b_n}$$

כאשר $r_1,...,r_n$ הם שורשי הפולינום $b_nx^n+b_{n-1}x^{n-1}+...+b_0$.
לכן, במקרה שלנו, סכום שורשי היחידה מסדר n (כלומר סכום שורשי הפולינום q) יהיה $\frac{a_{n-1}}{a_n}=0$.

תזכורת

פולינום $p(x)=a_nx^n+...+a_1x+a_0$ כאשר אנו מרשים גם למקדמים $a_0,...,a_n$ להיות מרוכבים, וגם מהציב ב x מספר מרוכב, נקרא <u>פולינום מרוכב.</u> זוהי פונקציה מהצורה

$$p:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$$

תזכורת

משפט חשוב מאוד באלגברה, שלא נוכיח בקורס הוא <u>המשפט היסודי של אלגברה:</u>
לפולינום מרוכב p ממעלה n יש בדיוק n שורשים, בפרט קיימת לו הצורה:

$$p(x)=a_n(x-w_1)\cdot...\cdot(x-w_n)$$

עבור $w_j\in\mathbb{C}$, כאשר יכולים להיות כפילויות, בשורשים - כלומר הם לא בהכרח שונים.
שימו ♡ שזה לא נכון בהכרח לפולינומים ממשיים!

הערה

אין טעות בלקרוא לפולינום ממשי פולינום מרוכב משום שכל $r\in\mathbb{R}$ הוא גם $r\in\mathbb{C}$, (או במילים אחרות $\mathbb{R}\subset\mathbb{C}$) אבל כאשר נאמר פולינום מרוכב נתכוון לפולינום אשר מקדמיו הם לא ממשיים.

הערה

בד"כ נסמן פולינום מרוכב עם המשתנה z במקום x, כמו בתרגיל הבא.

תרגיל 2.1.8.

מצאו את שורשי הפולינום:

$$p(z)=z^2-2z+2$$

<u>פתרון:</u>
נשתמש בנוסחאת השורשים:

$$z_{1,2}=\frac{2\pm\sqrt{4-8}}{2}=\frac{2\pm 2i}{2}=1\pm i$$

תרגיל 2.1.9.

אם $w \in \mathbb{C}$ שורש של פולינום עם מקדמים ממשיים $p(x)$ אז גם $\overline{w}$.

פתרון:
יהא $p(x) = a_n x^n + ...a_1 x + a_0$ פולינום ממשי, ונניח כי w שורש שלו, נזכר ב3 תכונות חשובות של הצמדה:

1. $\overline{zw} = \overline{z} \cdot \overline{w}$.
2. $\overline{z + w} = \overline{z} + \overline{w}$.
3. $z \in \mathbb{R} \iff z = \overline{z}$.

אז:

$$0 = p(w) = a_n w^n + ...a_1 w + a_0$$

אז:

$$0 = \overline{0} = \overline{p(w)} = \overline{a_n w^n + ...a_1 w + a_0} = \overline{a_n}\overline{w^n} + ... + \overline{a_1 w} + \overline{a_0} = a_n \overline{w}^n + ...a_1 \overline{w} + a_0 = p\left(\overline{w}\right)$$

כלומר, גם $p\left(\overline{w}\right) = 0$, כלומר $\overline{w}$ שורש של p.

תרגיל 2.1.10.

יהא $p(x)$ פולינום ממשי ממעלה אי-זוגית, אז קיים לו שורש ממשי אחד לפחות.

פתרון:
את שורשי $p(x)$ אפשר לחלק לזוגות, $(w_j, \overline{w_j})$, אבל יש לנו מספר אי-זוגי של שורשים, אז חייב להיות לנו שורש ששווה לצמוד של עצמו, שראינו שזה שקול להיותו ממשי.

תרגיל 2.1.11.

יהיו w_1, w_2, w_3, שלושת שורשי היחידה מסדר 3 חשבו את $s = w_1^{3001} + w_2^{3001} + w_3^{3001}$.

פתרון:
נשים לב כי, לכל k:

$$w_k^{3001} = w_k^{3 \cdot 1000 + 1} = (w_k^{1000})^3 w_k = w_k$$

כלומר:

$$s = w_1 + w_2 + w_3$$

אז מהתרגיל הקודם על שורשי היחידה, מתקיים:

$$s = 0$$

תרגיל בית ראשון

3.1 תרגילים להגשה

1. מצאו את כל שורשי הפולינום:

$$p(z) = z^8 - (1+10i)z^7 - (9-10i)z^6 + 9z^5$$

2. חשבו את מכפלת כל שורשי היחידה מסדר 10.

3. סמנו את התשובה הנכונה.

(א) לפולינום בעל מקדמים ממשיים יש רק שורשים ממשיים.

(ב) לפולינום בעל מקדמים שלמים יש רק שורשים שלמים.

(ג) לפולינום בעל מקדמים אי-שליליים כך שכל שורשיו ממשיים יש רק שורשים אי-שליליים.

(ד) לפולינום בו כל איבר ממעלה זוגית, מתקיים כי z_0 שורש אמ"מ $-z_0$ שורש.

(ה) לפולינום בו כל איבר ממעלה זוגית, מתקיים כי z_0 שורש אמ"מ iz_0 שורש.

3.2 תרגילים לא להגשה

1. מצאו את החלק הממשי, החלק המדומה וההצגה הטריגונומטרית של המספרים הבאים:

(א)

$$z = \frac{1+i}{3i+2}$$

(ב)

$$z = (3i+4)^5$$

(ג)

$$z = (\overline{2i+3}) \cdot \frac{1}{2e^{i\frac{\pi}{3}}}$$

(ד)

$$z = \left|2e^{i\pi}\right| + \text{Re}(3+2i) + i\,\text{Im}(2i)$$

2. יהא $0 \neq z \in \mathbb{C}$, הוכיחו את הטענות הבאות:

(א) (לא להגשה)

$$\left|\frac{z}{|z|}\right| = 1$$

(ב) לכל $\theta \in \mathbb{R}$:

$$|z| = \left|e^{i\theta} z\right|$$

(ג) (לא להגשה)

$$\text{Re}(z)\,\text{Re}(iz) + \text{Im}(z)\,\text{Im}(iz) = 0$$

(ד) יהא $0 \neq w \in \mathbb{C}$, כך ש $\text{Re}\left(\frac{w}{z}\right) = 0$, אז:

$$|z+w|^2 - |z|^2 - |w|^2 = 0$$

3. יהיו $w_1, ..., w_{20}$ פתרונות המשוואה $w^{20} = 1 + i$, למה שווה $s = |w_1| + ... + |w_{20}|$?
בחרו את התשובה הנכונה:

(א) $20 \cdot 2^{\frac{1}{20}}$.

(ב) 0.

(ג) $20 \cdot 2^{\frac{1}{40}}$.

(ד) $i \cdot 2^{\frac{1}{20}}$.

(ה) -1.

4. יהיו $w, z \in \mathbb{C}$, בחרו את הטענה הנכונה:

(א) אם w שורש של המשוואה $w^{10} = 1 + i$, אז גם $\overline{w}$.

(ב) אם $wz \in \mathbb{R}$, אז הזוית של w, z בייצוג טריגונומטרי שווה.

(ג) אם $wz \in \mathbb{R}$, וגם $wz > 0$, אז $w = \overline{z}$.

(ד) אם $wz \in \mathbb{R}$, וגם $wz > 0$, אז $\text{Im}\left(\frac{\overline{z}}{w}\right) = 0$.

5. יהא $-1 \neq z \in \mathbb{C}$ כך ש $\text{Re}\left(\frac{z-1}{z+1}\right) = 0$, אז בהכרח $|z|$ שווה ל:

(א) $\frac{1}{2}$.

(ב) $\frac{3}{2}$.

(ג) 1.

(ד) אף תשובה לא נכונה.

3.3 פתרונות לתרגילים שלא להגשה

1. (א) נכפיל בצמוד:

$$z = \frac{1+i}{3i+2} = \frac{(1+i)(-3i+2)}{(3i+2)(-3i+2)} = \frac{-3i+2+3+2i}{3^2+2^2} = \frac{5-i}{13} = \frac{5}{13} - \frac{1}{13}i$$

כלומר:

$$\text{Re}(z) = \frac{5}{13}, \qquad \text{Im}(z) = -\frac{1}{13}$$

בצורה טריגונומטרית:

$$r = \sqrt{\left(\frac{5}{13}\right)^2 + \left(\frac{1}{13}\right)^2} = \frac{\sqrt{26}}{13}$$

$$\tan(\theta) = \frac{-\frac{1}{13}}{\frac{5}{13}} = -\frac{1}{5} \implies \theta = \arctan\left(\frac{1}{5}\right)$$

(ב) נמיר לצורה טריגונומטרית את המספר $w = 3i + 4$:

$$r = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$$

הזווית היא:

$$\tan(\theta_w) = \frac{3}{4} \implies \theta_w = \arctan\left(\frac{3}{4}\right)$$

אז:

$$z = w^5 = 5^5 e^{i5\arctan\left(\frac{3}{4}\right)}$$

כלומר בצורה טריגונומטרית המודול 5^5 והזווית $5\arctan\left(\frac{3}{4}\right)$, החלק הממשי:

$$\text{Re}(z) = 5^5\cos\left(5\arctan\left(\frac{3}{4}\right)\right) = -3116$$

$$\text{Im}(z) = 5^5\sin\left(5\arctan\left(\frac{3}{4}\right)\right) = -237$$

(ג) נמיר את $\overline{3+2i} = 3 - 2i$ לצורה טריגונומטרית, $r = \sqrt{3^2+2^2} = \sqrt{13}$, והזווית:

$$\theta = \arctan\left(\frac{-2}{3}\right)$$

אז:

$$z = \frac{\sqrt{13}e^{i\arctan\left(\frac{-2}{3}\right)}}{2e^{i\frac{\pi}{3}}} = \frac{\sqrt{13}}{2}e^{i\left(\arctan\left(-\frac{2}{3}\right)-\frac{\pi}{3}\right)}$$

אז:

$$\text{Re}(z) = \frac{\sqrt{13}}{2}\cos\left(\arctan\left(-\frac{2}{3}\right)-\frac{\pi}{3}\right), \quad \text{Im}(z) = \frac{\sqrt{13}}{2}\sin\left(\arctan\left(-\frac{2}{3}\right)-\frac{\pi}{3}\right)$$

(ד)

$$z = \underbrace{|2e^{i\pi}|}_{2} + \underbrace{\text{Re}(3+2i)}_{3} + i\underbrace{\text{Im}(2i)}_{2} = 5 + 2i$$

בצורה טריגונומטרית:

$$r = \sqrt{5^2+2^2} = \sqrt{29}$$

$$\theta = \arctan\left(\frac{2}{5}\right)$$

2. (א) נסמן $z = re^{i\theta}$, אז:

$$\left|\frac{z}{|z|}\right| = \left|\frac{re^{i\theta}}{r}\right| = \left|e^{i\theta}\right| = 1$$

(ב) נשתמש בכפילות הערך המוחלט:

$$\left|e^{i\theta}z\right| = \left|e^{i\theta}\right||z| = |z|$$

(ג) נסמן $z = a + ib$, אז $iz = ia - b = -b + ia$, אז:

$$\text{Re}(z)\,\text{Re}(iz) + \text{Im}(z)\,\text{Im}(iz) = a(-b) + b(a) = -ab + ab = 0$$

(ד)

$$|z+w|^2 = \left|z\left(\frac{w}{z}+1\right)\right|^2 = |z|^2\left|\frac{w}{z}+1\right|^2 =$$

אבל משום ש $\frac{w}{z}$ מדומה טהור, נסמן $\frac{w}{z} = i\eta$, עבור $\eta \in \mathbb{R}$, אז מתקיים:

$$\left|\frac{w}{z}+1\right|^2 = \eta^2+1$$

אז:

$$|z+w|^2 = |z|^2\left|\frac{w}{z}+1\right|^2 = |z|^2(1+\eta^2) = |z|^2+\eta^2|z|^2\underbrace{|i|^2}_{=1} = |z|^2+|i\eta z|^2 = |z|^2+|w|^2$$

3. יהא w_k כלשהו, אז:

$$w_k^{20} = 1+i \implies \left|w_k^{20}\right| = |1+i| = \sqrt{2} = 2^{\frac{1}{2}}$$

אז:

$$\left|w_k^{20}\right| = |w_k|^{20} = 2^{\frac{1}{2}}$$

כלומר:

$$|w_k| = \left(2^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{20}} = 2^{\frac{1}{40}}$$

אז:

$$s = 20\cdot 2^{\frac{1}{40}}$$

4. (א) <u>נראה דוגמא נגדית:</u>
נשים לב כי $1+i = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$, ולכן פתרון (לא יחיד) הוא:

$$w = 2^{\frac{1}{20}}e^{i\frac{\pi}{40}}$$

ולכן $\overline{w} = 2^{\frac{1}{20}}e^{-i\frac{\pi}{40}}$, ונשים לב כי:

$$\overline{w}^{10} = \left(2^{\frac{1}{20}}e^{-i\frac{\pi}{40}}\right)^2 = \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}} = 1-i \neq 1+i$$

כלומר, $\overline{w}$ אינו פתרון למשוואה.

(ב) <u>נראה דוגמא נגדית:</u>

$$\left(e^{-i\frac{\pi}{2}}\right)\left(e^{i\frac{\pi}{2}}\right) = 1 \in \mathbb{R}$$

(ג) <u>נראה דוגמא נגדית:</u>

$$w=1, \qquad z=2$$

(ד) נראה כי (4) התשובה הנכונה, נסמן $z=a+ib, w=c+id$, כאשר $a,b,c,d\in\mathbb{R}$.

$$\text{Im}(wz) = ad+bc = 0$$

נחשב ישירות:

$$\frac{\overline{z}}{w} = \frac{a-ib}{c+id} = \frac{(a-ib)(c-id)}{c^2+d^2} = \frac{ac-iad-ibc+(-ib)(-id)}{c^2+d^2} = \frac{ac-bd-i(ad+bc)}{c^2+d^2}$$

כלומר:

$$\text{Im}\left(\frac{\overline{z}}{w}\right) = -\frac{ad+bc}{c^2+d^2} = 0$$

5. נסמן $z = a + ib$, אז:

$$w = \frac{z-1}{z+1} = \frac{a-1+ib}{a+1+ib} = ... = \frac{a^2+b^2-1+2ib}{(a+1)^2+b^2} = \frac{a^2+b^2-1}{(a+1)^2+b^2} + \frac{2ib}{(a+1)^2+b^2}$$

אז אם $\text{Re}(w) = 0$, אז:

$$\frac{a^2+b^2-1+2ib}{(a+1)^2+b^2} = 0 \implies a^2+b^2 = 1$$

כלומר $|z| = 1$.

תרגול שלישי

4.1 מטריצות

4.1.1 חיבור מטריצות וכפל בסקלר

תזכורת

מטריצות מסדר $m \times n$ מעל $\mathbb{R}$ היא רשימה m שורות וn עמודות.
למשל:
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & \pi & 5 \end{pmatrix}$$
היא מטריצה 2×3, נסמן $A \in \mathbb{R}^{2\times 3}$ או $A \in M_{2\times 3}(\mathbb{R})$, ונסמן את אבריה $a_{i,j}$ כאשר i הוא השורה וj העמודה, למשל במקרה שלנו:
$$a_{1,1} = 1, a_{1,2} = 2, a_{2,2} = \pi, a_{2,3} = 5$$
לפעמים נסמן $A = (a_{i,j})$, או לפעמים אפילו $A_{i,j} = a_{i,j}$, אז $A = (A)_{i,j}$.

תזכורת

יש לנו 2 פעולות חשובות עם מטריצות:

1. חיבור המטריצות, עבור מטריצות $A = (a_{i,j}), B = (b_{i,j}) \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $A + B$ היא מטריצה עם איברים $(a_{i,j} + b_{i,j})$.
2. כפל בסקלר, עבור $\lambda \in \mathbb{R}$, לו נקרא סקלר, ומטריצה $A = (a_{i,j})$, המטריצה λA היא מטריצה עם איברים $(\lambda a_{i,j})$.

מטריצה חשובה היא מטריצת האפס, שנסמן $O_{m\times n} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ (או לפעמים פשוט 0), שהיא מטריצה שכל איברה אפסים, ומקיימת:
$$O_{m\times n} + A = A$$
לכל $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, ולכל $\lambda \in \mathbb{R}$:
$$\lambda O_{m\times n} = O_{m\times n}$$

דוגמא 4.1.1.

1. דוגמה לחיבור מטריצות:

$$\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}5 & 6\\ 7 & 8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6 & 8\\ 10 & 12\end{pmatrix}$$

2. דוגמה לכפל בסקלר:

$$3\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & 6\\ 9 & 12\end{pmatrix}$$

הערה

אנו יכולים לחבר רק זוג מטריצות מאותו סדר, כלומר אם $A\in\mathbb{R}^{2\times 3}, B\in\mathbb{R}^{5\times 6}$ אז אין משמעות לביטוי $A+B$.

תרגיל 4.1.2.

יהא מצאו מטריצה $A\in\mathbb{R}^{2\times 2}$ כך ש:

$$\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}+2A=3\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$$

פתרון:
נשים לב כי:

$$2A=3\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 0 & -1\end{pmatrix}$$

כלומר:

$$A=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}2 & 1\\ 0 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & \frac{1}{2}\\ 0 & -\frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

4.1.2 כפל מטריצות

תזכורת

בהינתן זוג מטריצות, $A \in \mathbb{R}^{m\times k}, B \in \mathbb{R}^{k\times n}$, המכפלה של A ו B היא מטריצה אותה נסמן AB מסדר m על n, כלומר $AB \in \mathbb{R}^{m\times n}$, כאשר:

$$(AB)_{i,j} = \sum_{t=1}^{k} A_{i,t}B_{t,j}$$

נשים לב כי אם $A \in \mathbb{R}^{m\times k}, B \in \mathbb{R}^{l\times n}$ ו $k \neq l$ אז אין משמעות לביטוי AB.

דוגמא 4.1.3.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot 1+2\cdot 3+3\cdot 5 & 1\cdot 2+2\cdot 4+3\cdot 6 \\ 4\cdot 1+5\cdot 3+6\cdot 5 & 4\cdot 2+5\cdot 4+6\cdot 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 22 & 28 \\ 49 & 64 \end{pmatrix}$$

טענה 4.1.4.

3 תכונות חשובות שכפל מטריצות לא בהכרח מקיים, אבל כפל מספרים כן:

1. AB לא בהכרח שווה ל BA.
2. $AB = 0$ לא בהכרח גורר $A = 0$ או $B = 0$.
3. אם $A \neq 0$, וגם $AB = AC$, אז לא בהכרח $B = C$.

הוכחה:
נוכיח בעזרת דוגמאות.

1. אז בשביל אפילו לדבר עם AB,BA, כלומר בשביל שנוכל להכפיל את A בB ואת B בA, דרוש (מדוע?) שA וB יהיו ריבועיות מאותו סדר, כלומר $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$, ונראה דוגמא לכך:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$$

אבל:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

3.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \star & \star \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

תזכורת

אם $AB = BA$ נומר כי A וB מטריצות מתחלפות.

הערה

צורת ההוכחה שלנו נקראת "הוכחה ע"י דוגמה נגדית", שכן אנו סותרים את הטענה בעזרת דוגמה שאינה מקיימת אותה.
לדוגמה, במקרה הראשון אנו סותרים את הטענה "כל זוג מטריצות מתחלפות" או בניסוח מתמטי:

$$\forall A, B \in \mathbb{R}^{n\times n} \quad AB = BA$$

על ידי דוגמה נגדית (זוג מטריצות שאינן מתחלפות), ולכן הטענה אינה נכונה באופן כללי.

תזכורת

נסמן ב$\mathbb{R}^{n\times n} \ni I_n$ את המטריציה הבאה:

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

כלומר, 1 על האלכסון הראשי ואפס אחרת. לכל $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ מתקיים:

$$AI_n = I_nA = A$$

תזכורת

מטריצה A ריבועית נקראת אלכסונית אם היא מהצורה:

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$$

כלומר מטריצה עם אפס בכל מקום פרט לאלכסון הראשי, לפעמים נסמן גם $A = \text{diag}(\lambda_1, ..., \lambda_n)$.
מטריצה אלכסונית עם איבר זהה על האלכסון, כלומר:

$$\text{diag}(\lambda, ..., \lambda) = \lambda I_n$$

נקראת מטריצה סקלרית.

תרגיל 4.1.5.

הוכיחי כי:

$$\text{diag}(\lambda_1, ..., \lambda_n) \cdot \text{diag}(\eta_1, ..., \eta_n) = \text{diag}(\lambda_1\eta_1, ..., \lambda_n\eta_n)$$

<u>פתרון:</u>

נסמן $A = \text{diag}(\lambda_1, ..., \lambda_n), B = \text{diag}(\eta_1, ..., \eta_n)$, אז:

$$(AB)_{i,i} = \sum_{k=1}^{n} A_{i,k}B_{k,i} = A_{i,i}B_{i,i} = \lambda_i\eta_i$$

ועבור $i \neq j$:

$$(AB)_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} A_{i,k}B_{k,j} = 0$$

תרגיל 4.1.6.

חשבו את:

$$\begin{pmatrix} \pi & 0 & 0 \\ 0 & e & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}^{2024}$$

<u>פתרון:</u>

בעזרת התרגיל הקודם:

$$\begin{pmatrix} \pi^{2024} & 0 & 0 \\ 0 & e^{2024} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2}^{2024} \end{pmatrix}$$

הערה

רמז מטרים! בניגוד למטריצות כלליות (עבורן זה בד"כ מסורבל) קל מאוד להעלות מטריצות אלכסוניות בחזקה גדולה. עובדה זו תהא שימושית בהמשך הקורס, בנושא של מטריצות לכסינות.

תרגיל 4.1.7

הוכיחי כי מטריצה סקלרית מתחלפת עם כל מטריצה אחרת.

<u>פתרון:</u>
תהא $A=\lambda I_n$, ו$B\in\mathbb{R}^{n\times n}$ כללית, אז:

$$(AB)_{i,j}=\sum_{k=1}^{n}A_{i,k}B_{k,j}=\cancelto{0}{\sum_{k=1}^{i-1}A_{i,k}B_{k,j}}+A_{i,i}B_{i,j}+\cancelto{0}{\sum_{k=i+1}^{n}A_{i,k}B_{k,j}}=A_{i,i}B_{i,j}=\lambda B_{i,j}$$

מצד שני:

$$(BA)_{i,j}=\sum_{k=1}^{n}B_{i,k}A_{k,j}=B_{i,j}A_{j,j}=\lambda B_{i,j}$$

תרגיל 4.1.8

הוכיחי כי אם A ריבועית מתחלפת עם כל מטריצה אחרת B אז A סקלרית.

<u>פתרון:</u>
תהא A כזאת.
נסמן את המטריצה $E^{i,j}$ להיות המטריצה עם 1 במקום הi,j ואפס אחרת, כלומר $E^{i,j}_{i,j}=1$ ו$E^{i,j}_{l,k}=0$ עבור $\substack{i\neq l\\ j\neq k}$.
יהא $i\neq j$,

$$(AE^{i,j})_{i,i}=\sum_{k=1}^{n}A_{i,k}E^{i,j}_{k,i}=0$$

אבל A מתחלפת עם $E^{i,j}$, כלומר $AE^{i,j}=E^{i,j}A$ (נשים לב שיש פה <u>שוויון מטריצות</u>) בפרט:

$$(AE^{i,j})_{i,i}=(E^{i,j}A)_{i,i}=\sum_{k=1}^{n}E^{i,j}_{i,k}A_{k,i}=A_{j,i}$$

כלומר, לכל $i\neq j$ מתקיים $A_{j,i}=0$, כלומר A אלכסונית.
מצד שני:

$$(AE^{i,j})_{i,j}=\sum_{k=1}^{n}A_{i,k}E^{i,j}_{k,j}=A_{i,i}$$

$$(E^{i,j}A)_{i,j}=\sum_{k=1}^{n}E^{i,j}_{i,k}A_{k,j}=A_{j,j}$$

כלומר $A_{i,i}=A_{j,j}$ לכל $i\neq j$, אז A סקלרית.

הערה

נשים לב כי הוכחנו פה שאם A סקלרית היא מתחלפת עם כל מטריצה אחרת, ואם מטריצה A מתחלפת עם כל מטריצה אחרת אז היא סקלרית, כלומר בדיוק הוכחנו את הטענה:
A מתחלפת עם כל B אמ"מ A סקלרית.

דוגמא 4.1.9.

נשים לב כי אם כופלים מטריצה $m \times n$ בווקטור מסדר m, שהוא בעצם מטריצה $m \times 1$, נקבל וקטור מסדר n שהוא צירוף ליניארי של עמודות המטריציה:

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + 4y + 7z \\ 2x + 5y + 8z \\ 3x + 6y + 9z \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix}$$

4.1.3 מטריצות משולשות, שחלוף, ומטריצה סימטריות ואנטי-סימטריות

תזכורת

תהא $A = (a_{i,j}) \in \mathbb{R}^{n \times m}$ אז $A^t \in \mathbb{R}^{m \times n}$ היא המטריצה עם רכיבים:

$$(A^t)_{i,j} = a_{j,i}$$

דוגמא 4.1.10.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$$

טענה (ללא הוכחה) 4.1.11.

מספר תכונות חשובות של שחלוף הן:

1. $(A^t)^t = A$.
2. $(A + B)^t = A^t + B^t$.
3. $(\alpha A)^t = \alpha A^t$.
4. $(AB)^t = B^t A^t$.

תזכורת

תהא $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ מטריצה ריבועית, נקרא ל-A סימטרית אם $A = A^t$, ואנטי-סימטרית אם $A^t = -A^t$.
המטריצה היחידה שהיא גם סימטרית וגם אנטי-סימטרית היא מטריצת האפס.

תרגיל 4.1.12.

תהא A מטריצה ריבועית, הוכיחי כי $B = A + A^t$ סימטרית, וכי $C = A - A^t$ אנטי-סימטרית.

פתרון:
נחשב ישירות:

$$B^t = (A + A^t)^t = A^t + (A^t)^t = A^t + A = A + A^t = B$$

$$C^t = (A - A^t)^t = A^t - A = -(A - A^t) = -C$$

תרגיל 4.1.13.

תהא A מטריצה ריבועית, הוכיחי כי קיימת דרך יחידה לכתוב את A כסכום של מט' סימטרית ואנטי-סימטרית.

פתרון:
ראשית, נשים לב כי:

$$A = \underbrace{\frac{1}{2}(A + A^t)}_{\text{סימטרית}} + \underbrace{\frac{1}{2}(A - A^t)}_{\text{אנטי-סימטרית}}$$

כעת נוכיח יחידות, נניח כי $A = B + C$ כאשר B סימטרית ו-C אנטי-סימטרית, אז:

$$A^t = B^t + C^t = B - C$$

אז:

$$\frac{1}{2}A^t + \frac{1}{2}A = \frac{1}{2}(B - C) + \frac{1}{2}(B + C) = B$$

ובאופן דומה:

$$\frac{1}{2}A - \frac{1}{2}A^t = \frac{1}{2}(B - C) - \frac{1}{2}(B + C) = C$$

תזכורת

מטריצה $A = (a_{i,j})$ נקראת משולשת עליונה אם כל האיברים מתחת לאלכסון הראשי שלה הם אפס, כלומר:

$$i > j \Rightarrow a_{i,j} = 0$$

ומשולשת תחתונה אם כל האיברים מעל לאלכסון הראשי שלה הם אפס, כלומר:

$$i < j \Rightarrow a_{i,j} = 0$$

משולשת עליונה ומשולשת תחתונה, נשים לב כי אם A משולשת עליונה אז A^t משולשת תחתונה ולהפך.

דוגמא 4.1.14.

המטריצות

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

משולשת עליונה ותחתונה בהתאמה.

תרגיל 4.1.15.

אם A, B משולשת עליונה, אז גם $AB, A+B$.

פתרון:

יהיו $A.B \in \mathbb{R}^{n\times n}$, משולשות עליונות, את ההוכחה כי $A+B$ משולשת עליונה נשאיר כתרגיל.
תהא $C = AB$, נרצה להוכיח כי C משולשת עליונה, כלומר לכל $i > j$ מתקיים:

$$C_{i,j} = 0$$

כלומר:

$$C_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} A_{i,k}B_{k,j} = 0$$

משום שA, B משולשות עליונות מתקיים:

$$\forall l > k, \qquad A_{l.k} = B_{l,k} = 0$$

נחשב ישירות את $C_{i,j}$: לכן:

$$(C)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} A_{i,k}B_{k,j} = \sum_{k=1}^{i} \cancelto{0}{A_{i,k}} B_{k,j} + \sum_{k=i+1}^{n} A_{i,k}\cancelto{0}{B_{k,j}} = 0$$

תרגיל 4.1.16.

אם A, B משולשת תחתונה, אז גם $AB, A+B$.

פתרון:
יהיו A, B משולשת תחתונה, אז:

$$A+B = ((A+B)^t)^t = (A^t + B^t)^t$$

שהיא שחלוף של מט' משולשת עליונה ולכן משולשת תחתונה.
הוכחה עבור AB זהה.

תרגיל 4.1.17.

יהיו, $A \in \mathbb{R}^{m\times k}, B \in \mathbb{R}^{k\times n}$, הוכיחו כי

$$(AB)^t = B^t A^t$$

פתרון:
ראשית, נשים לב כי המימדים מתאימים, גם $(AB)^t$ וגם $B^t A^t$ מסדר $n \times m$. יהיו $1 \le i \le n$, $1 \le j \le m$, נראה כי $[(AB)^t]_{i,j} = [B^t A^t]_{i,j}$. ראשית:

$$[(AB)^t]_{i,j} = [AB]_{j,i} = \sum_{l=1}^{k} A_{j,l} B_{l,i}$$

שנית:

$$[B^t A^t]_{i,j} = \sum_{l=1}^{k} [B^t]_{i,l} [A^t]_{l,j} = \sum_{l=1}^{k} B_{l,i} A_{j,l} = \sum_{l=1}^{k} A_{j,l} B_{l,i}$$

כלומר, לכל i, j מתקיים:

$$[(AB)^t]_{i,j} = \sum_{l=1}^{k} A_{j,l} B_{l,i} = [B^t A^t]_{i,j}$$

ולכן $(AB)^t = B^t A^t$.

תרגיל בית שני

5.1 תרגילים להגשה

1. הוכיחו או הפריכו,

(א) תהא A מטריצה ממשית מסדר 3×3, כך שלכל $B = (b_{i,j})$ מטריצה ממשית מסדר 3×3 כך ש $\sum_{i,j=1}^{n} b_{i,j} = 0$ מתקיים $AB = 0$, אז $A = 0$.

(ב) תהא A מטריצה ממשית מסדר 3×3, כך שקיימת $B = (b_{i,j})$ מטריצה ממשית מסדר 3×3 כך ש $\sum_{i,j=1}^{n} b_{i,j} = 0$ וגם $AB = 0$, אז $A = 0$.

2. יהיו A, B, C מטריצות ריבועיות מסדר $n \times n$, איזו טענה תמיד מתקיימת?

(א) אם $C = AB$, אז $C^3 = A^3 B^3$.

(ב) אם $AB = BC$, אז $A = C$.

(ג) אם $CA = I$, אז $(ABC)^3 = AB^3C$.

(ד) אם $A^t = B^t C^t$ אז $A = BC$.

(ה) $(ABC)^t = A^t B^t C^t$.

5.2 תרגילים לא להגשה

1. יהיו A, B מטריצות ריבועיות מסדר n, הוכיחו כי אם A סימטרית, B אנטי-סימטרית, ו $C = B^2 - A$ אנטי-סימטרית, אז $B^2 = A$.

2. תהא A מטריצה כך ש:

$$A \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 7 \\ 8 & 8 \\ 9 & 9 \end{pmatrix}$$

מצאו את סדר המטריצה A והוכיחו כי $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ מקיים $A\vec{v} = 0$.

5.3 פתרונות לתרגילים שלא להגשה

1. נשים לב כי:

$$C^t = \left(B^2 - A\right)^t = \left(B^2\right)^t - A^t = \left(B^t\right)^2 - A = (-B)^2 - A = B^2 - A = C$$

כלומר C גם סימטרית וגם אנטי-סימטרית ולכן שווה למטריצת האפס, ולכן:

$$C = B^2 - A = 0 \implies B^2 = A$$

2. נסמן את הסדר של A ב$n \times m$. מכללי כפל מטריצות $m = 3, n = 3$.
נבחין כי כפל של מטריצה בעמודות מטריצה מקיים:

$$A \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix} \ \& \ A \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix}$$

וכן מלינאריות של כפל במטריצה:

$$A \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} \right) = A \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} - A \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ובפרט:

$$-3A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ -3 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} 1-4 \\ 2-5 \\ 3-6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

כלומר:

$$A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

תרגול רביעי

6.1 שיטת החילוץ של גאוס

הערה

לשמחתנו, יש אלגוריתם לדירוג קנוני של מטריצות כלליות, כלומר דרך לפתור כל מערכת משוואות. האלגוריתם נקרא שיטת החילוץ של גאוס, וגילה אותו קרל פרדריך גאוס. הוא מתבצע ע"י דירוג, כלומר הפעלת פעולות אלמנטריות על מטריצת המקדמים המורחבת של הממ"ל, עד להגעה לצורה קנונית.

תזכורת

נזכיר כי מטריצה מדורגת קנונית היא מטריצה המקיימת:

1. A מדורגת, כלומר האיבר הפתוח של כל שורה מופיע משמאל לאיבר הפותח בשורה מתחתיה, ושורות האפסים למטה.
2. האיבר הפותח של כל שורה הוא 1.
3. בכל עמודה של האיבר הפותח, הוא היחיד שאינו אפס.

על מטריצה A יש פעולות אלמנטריות:

1. הכפלת שורה בסקלר שאינו אפס.
2. הוספת שורה (או כפולה של שורה בסקלר) לשורה אחרת.
3. החלפת זוג שורות.

שימו ♡ הפעלת פעולה אלמנטרית על ממ"ל או על המטריצה המתאימה לה אינה משנה את פתרונות המערכת.

דוגמא 6.1.1.

נדגים את השיטה. תהא המטריצה:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 1 & 5 \end{array}\right)$$

נביא את המערכת לצורה המדורגת כלומר לצורה:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \star \\ 0 & 1 & 0 & \star \\ 0 & 0 & 1 & \star \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 1 & 5 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2 \to R_2 - R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \\ 2 & 2 & 1 & 5 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2 \to -R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 1 & 5 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_3 \to R_3 - 2R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & -5 & -7 \end{array}\right) \xrightarrow{R_3 \to -\frac{1}{2}R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & \frac{5}{2} & \frac{7}{2} \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_3 \to R_3 - R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right) \xrightarrow{R_3 \to 2R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_2 \to R_2 - 2R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_1 \to R_1 - 2R_2 - 3R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

6.2 מערכת משוואת לינארית

תזכורת

מטריצות מסדר $m \times n$ מעל $\mathbb{R}$ היא רשימה m שורות וn עמודות.
מערכת משוואות לינארית (ממ"ל) היא מערכת משוואות מהצורה:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + ... + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

למערכת כזאת אפשר לכתוב להתאים מטריצת מקדמים:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & ... & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & ... & a_{mn} \end{pmatrix}$$

ומטריצת מקדמים מורחבת:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & ... & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \\ a_{m1} & ... & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

הערה

שימו ♡, כל מערכת משוואות מקיימת בדיוק אחד מהמקרים הבאים:

1. אין פתרונות (אם יש שורת סתירה)
2. פתרון יחיד (אם בכל אחת מהשורות בצורה המדורגת יש איבר פותח)
3. אינסוף פתרונות (אם יש שורת אפסים)

תרגיל 6.2.1.

פתרו את המערכת:

$$\begin{cases} x+y+z=1 \\ x+2y+3z=4 \\ y+2z=2 \end{cases}$$

פתרון:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2 \to R_2 - R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{R_3 \to R_3 - R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right)$$

קיבלנו שורת סתירה בשורה 3, ולכן אין לממ"ל פתרון.

תרגיל 6.2.2.

פתרו את המערכת:

$$\begin{cases} x+y+z+w=4 \\ y+z+w=3 \\ z+w=2 \end{cases}$$

פתרון:

נביא את המערכת לצורה הקנונית:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{R_1 \to R_1 - R_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2 \to R_2 - R_3} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

המטריצה מדורגת קנונית, נמיר חזרה לממ"ל:

$$\begin{cases} x=1 \\ y=1 \\ z+w=2 \end{cases}$$

כלומר, אם נסמן $w = t$, אז מרחב הפתרונות שלנו הוא:

$$(x, y, z, w) = \{(1, 1, 2 - t, t) | t \in \mathbb{R}\}$$

6.2.1 ממ"ל הומוגנית ואי-הומוגנית

תזכורת

תהא $Ax = b$ ממ"ל, אז אם v פתרון שלה, כלומר:

$$Av = b$$

וw פתרון של המערכת $Ax = 0$, אז:

$$A(v + w) = Av + \cancelto{0}{Aw} = Av = b$$

כלומר $u = v + w$ פתרון של הממ"ל המקורית.
כלומר אם יש לנו ממ"ל, נוכל למצוא פתרון פרטי, לפתור את הממ"ל ההומוגנית, כלומר למצוא את הפתרון הכללי שלה, ואז הפתרון הכללי של הממ"ל האי-הומוגני יהיה <u>הפתרון הפרטי + הפתרון הכללי ההומוגני</u>.

דוגמא 6.2.3.

נניח יש לנו את הממ"ל:

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ 2x + 2y = 2 \end{cases}$$

ננחש את הפתרון $(x, y) = (1, 0)$, ואז נתבונן במערכת ההומוגנית:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2 \to R_2 - 2R_1} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

כלומר $x + y = 0$, כלומר $x = t, y = -t$, אז הפתרון הכללי הוא:

$$(x, y) = (t, -t) + (1, 0) = (t + 1, -t), \qquad t \in \mathbb{R}$$

דוגמא 6.2.4.

דוגמה נוספת! נניח יש לנו את הממ"ל:

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ 2x + 2y = 12 \end{cases}$$

נפתור את המערכת ההומוגנית באותו אופן, אבל כשנרצה לחפש פתרון פרטי, לא נמצא.
במקרה זה, כדאי לנסות למצוא שורת סתירה.
ואכן אם נחלק את המשוואה השנייה ב2 נקבל כי:

$$\begin{cases} x+y=1 \\ x+y=6 \end{cases}$$

וזו סתירה.

דוגמא 6.2.5.

מקרה אחרון! נניח יש לנו את הממ"ל:

$$\begin{cases} x+y=2 \\ x+2y=3 \end{cases}$$

ננחש את הפתרון $(x,y)=(1,1)$, ואז נתבונן במערכת ההומוגנית:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2 \to R_2 - 2R_1} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

כלומר לממ"ל ההומוגנית המתאימה יש פתרון יחיד והוא טריוואלי, ולכן הפתרון הכללי הוא מהצורה:

$$(x,y)=(0,0)+(1,1)=(1,1)$$

כלומר לממ"ל האי הומוגנית יש פתרון יחיד. במקרה הזה, השיטה של למצוא פתרון לממ"ל ההומוגנית "לא משתלמת" אך מוכיחה שיש פתרון יחיד. שימו ♡ ניחוש פתרון לא מבטיח שהוא יחיד.

הערה

שימו ♡ למערכת אי הומוגנית לעולם לא יהיה פתרון טריוואלי (פתרון האפס) כי זו תהא שורת סתירה!

תרגיל 6.2.6.

תהא המערכת $Ax=b$, כאשר $A=\text{diag}(\lambda_1,...,\lambda_n)$, כאשר $\lambda_k\neq 0$ לכל k, מצאי פתרון למערכת.

פתרון:
נשים לב כי המערכת שלנו קרובה למדורגת:

$$\left(\begin{array}{ccc|c}\lambda_1 & \dots & 0 & b_1\\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ 0 & \dots & \lambda_n & b_n\end{array}\right)\Rightarrow\left(\begin{array}{ccc|c}1 & \dots & 0 & \frac{b_1}{\lambda_1}\\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ 0 & \dots & 1 & \frac{b_n}{\lambda_n}\end{array}\right)$$

אז הפתרון למערכת הוא:

$$x_1=\frac{b_1}{\lambda_1},...,x_n=\frac{b_n}{\lambda_n}$$

תרגיל 6.2.7.

יהא $k\in\mathbb{R}$ והממ"ל:

$$\begin{cases}-5x+ky+z=8\\ -x+y+z=2\\ y+kz=2\end{cases}$$

1. מצאי עבור אילו ערכים של k יש למערכת פתרון יחיד, אין פתרונות או ∞ פתרונות.
2. מצאי את כל פתרונות המערכת עבור $k=0$.

פתרון:

1. נדרג את הממ"ל:

$$\left(\begin{array}{ccc|c}-5 & k & 1 & 8\\ -1 & 1 & 1 & 2\\ 0 & 1 & k & 2\end{array}\right)\xrightarrow[R_2\to -R_2]{R_1\leftrightarrow R_2}\left(\begin{array}{ccc|c}1 & -1 & -1 & -2\\ -5 & k & 1 & 8\\ 0 & 1 & k & 2\end{array}\right)\xrightarrow{R_3\to 5R_1+R_2}\left(\begin{array}{ccc|c}1 & -1 & -1 & -2\\ 0 & k-5 & -4 & -2\\ 0 & 1 & k & 2\end{array}\right)$$

נרצה לחלק ב$k-5$, כדאי להמשיך את הדירוג, כלומר נצטרך להניח כי $k\neq 5$, נעשה זאת, אבל נזכור בסוף התרגיל שצריך לבדוק מה קורה כאשר $k=5$, ובשביל זה נצטרך לחזור לנקודה הזאת של המטריצה, להציב $k=5$ ולראות מה קורה.

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1 & -1 & -1 & -2\\ 0 & k-5 & -4 & -2\\ 0 & 1 & k & 2\end{array}\right)\xrightarrow{R_2\to\frac{1}{k-5}R_2}\left(\begin{array}{ccc|c}1 & -1 & -1 & -2\\ 0 & 1 & \frac{-4}{k-5} & \frac{-2}{k-5}\\ 0 & 1 & k & 2\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_3\to R_3-R_2}\left(\begin{array}{ccc|c}1 & -1 & -1 & -2\\ 0 & 1 & \frac{-4}{k-5} & \frac{-2}{k-5}\\ 0 & 0 & k+\frac{4}{k-5} & 2+\frac{2}{k-5}\end{array}\right)=\left(\begin{array}{ccc|c}1 & -1 & -1 & -2\\ 0 & 1 & \frac{-4}{k-5} & \frac{-2}{k-5}\\ 0 & 0 & \frac{4+k(k-5)}{k-5} & \frac{2+2(k-5)}{k-5}\end{array}\right)$$

זהו, קיבלנו מטריצה מדורגת, הדבר הראשון שנרצה לראות הוא מתי האיברים הפותחים של השורות מתאפסים, כלומר מתי:

$$\frac{4+k(k-5)}{k-5}=0 \iff 4+k(k-5)=4+k^2-5k=0$$

כלומר:

$$k_{1,2}=\frac{5\pm\sqrt{25-16}}{2}=\frac{5\pm 3}{2}=4,1$$

אז דבר ראשון, כלומר $k\neq 4,1,5$ יש לנו פתרון יחד, נצטרך להציב כל מספר בנפרד ולראות מה קורה למערכת.

<u>כאשר $k=1$</u>:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & \frac{-4}{k-5} & \frac{-2}{k-5} \\ 0 & 0 & \frac{4+k(k-5)}{k-5} & \frac{2+2(k-5)}{k-5} \end{array}\right)=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & \frac{-4}{1-5} & \frac{-2}{1-5} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2+2(1-5)}{1-5} \end{array}\right)=$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & \frac{-4}{1-5} & \frac{-2}{1-5} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{2+2(1-5)}{1-5} \end{array}\right)=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & \frac{-4}{1-5} & \frac{-2}{1-5} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{3}{2} \end{array}\right)$$

בשורה 3 נקבל סתירה ולכן אין פתרון.

<u>כאשר $k=4$</u>:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & \frac{-4}{4-5} & \frac{-2}{4-5} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{2+2(4-5)}{4-5} \end{array}\right)=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

אז יש אינסוף פתרונות.

<u>כאשר $k=5$</u>: נחזור ללפני שחילקנו ב$k-5$ ונציב $k=5$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & -2 \\ 0 & k-5 & -4 & -2 \\ 0 & 1 & k & 2 \end{array}\right)=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -4 & -2 \\ 0 & 1 & 5 & 2 \end{array}\right)$$

וברור שיש פתרון יחיד.

כלומר כאשר $k\neq 1,4$ יש פתרון יחיד, כאשר $k=1$ אין פתרון וכאשר $k=4$ יש אינסוף פתרונות.

2. נחזור למט' המדורגת ונציב $k=0$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & \frac{-4}{k-5} & \frac{-2}{k-5} \\ 0 & 0 & \frac{4+k(k-5)}{k-5} & \frac{2+2(k-5)}{k-5} \end{array}\right)=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & \frac{-4}{-5} & \frac{-2}{-5} \\ 0 & 0 & \frac{4}{-5} & \frac{-8}{-5} \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[R_2\to -5R_2]{R_3\to -5R_3}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & -2 \\ 0 & -5 & -4 & -2 \\ 0 & 0 & 4 & -8 \end{array}\right)\xrightarrow[R_3\to\frac{1}{4}R_3]{R_3\to R_3+R_2}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & -2 \\ 0 & -5 & 0 & -10 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right)$$

מהשורה השלישית נקבל $z=-2$, מהשנייה $y=2$, ואז מהשורה הראשונה:

$$x-y-z=-2 \Rightarrow x=-2 \Rightarrow x=-6$$

אז הפתרון שלנו הוא:

$$(x,y,z)=(-2,2,-2)$$

תרגיל 6.2.8.

מצאי פולינום ממעלה 2 כך ש:

$$p(2)=4, p(1)=2, p(0)=2$$

פתרון:

אכן, יהיה פולינום ממעלה 2:

$$p(x)=a_2x^2+a_1x+a_0$$

נרצה שהוא יקיים את ההצבות הדרושות, כלומר:

$$\begin{cases} 4=p(2)=a_2 2^2+a_1 2+a_0=4a^2+2a_1+a_0 \\ 2=p(1)=a_2+a_1+a_0 \\ 2=p(0)=a_2 0+a_1 0+a_0=a_0 \end{cases}$$

כלומר קיבלנו מערכת משוואות לינארית! נפתור אותה ונדרג:

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

שלאחר דירוג נותנת את:

$$\begin{cases} a_2=1 \\ a_1=-1 \\ a_0=2 \end{cases}$$

6.3 דרגת מטריצה

תזכורת

בהינתן מטריצה $A\in\mathbb{R}^{m\times n}$, כלומר מטריצה עם m שורות וn עמודות. rank(A) (לפעמים גם מסומן $r(A)$) הוא מספר השורות שאינן שורות אפסים בצורה המדורגת הקנונית של A.
אם יש לנו ממ"ל $Ax=b$, אז יש קשר בין מספר הפתרונות של הממ"ל לדרגות של $A,(A|b)$.

1. אין לממ"ל פתרון $\iff$ יש שורת סתירה $\iff$ $\text{rank}(A) < \text{rank}(A|b)$.
2. יש לממ"ל פתרון יחיד $\iff$ אין שורת סתירה וגם אין משתנה חופשי $\iff$ מספר העמודות $= n = \text{rank}(A) = \text{rank}(A|b)$.
3. יש לממ"ל אינסוף פתרונות $\iff$ אין שורת סתירה וגם יש משתנה חופשי $\iff$ מספר העמודות $= n > \text{rank}(A) = \text{rank}(A|b)$.

תרגיל 6.3.1.

נתונה ממ"ל עם פתרון יחיד

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y = b_2 \end{cases}$$

האם קיימים $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ כך ש:

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = c_1 \\ a_{21}x + a_{22}y = c_2 \end{cases}$$

אין פתרון?

פתרון:

מאחר ולממ"ל יש פתרון יחיד מתקיים $\text{rank}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = 2$ אז גם לכל $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ מתקיים:

$$\text{rank}\left(\begin{array}{cc|c} a_{11} & a_{12} & c_1 \\ a_{21} & a_{22} & c_2 \end{array}\right) = 2$$

ולכן יש למערכת פתרון יחיד (לכל $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$).

תזכורת

נבחין כי מטריצה הפיכה אממ היא מדרגה מלאה. בצורה מפורשת:
מטריצה $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ הפיכה אם ורק אם $\text{rank}\, A = n$.

6.4 מבוא ללוגיקה

הערה

תודה רבה לאוריאל רוזנצוויג על הרשימות הנפלאות!

במתמטיקה, נרצה להוכיח טענות ומשפטים. משמעות הדבר, היא להניח הנחות מסויימות, ממנה להסיק מסקנה, ממנה להסיק מסקנה נוספת וכן הלאה.
אבני הבניין, או האטומים בלוגיקה מתמטית, הם הפסוקים הבסיסיים, כגון "התלמידה הצליחה במבחן", או "n הוא מספר טבעי".
בדומה לדוגמה השניה, פסוקים בסיסיים יכולים להיות תלויים בהשמה (מי הוא המספר n?).
לכל השמה הפסוק יכול להיות פסוק אמת (למשל אם $n = 1$) או פסוק שקר (למשל אם $n = \frac{1}{2}$).
באמצעות פסוקים בסיסיים, ניתן לבנות פסוקים מורכבים יותר. גם פסוקים אלו, יכולים להיות פסוקי אמת או שקר. בניית הפסוקים תתבצע באמצעות קשרים לוגיים.

טענה (ללא הוכחה) 6.4.1.

כעת, נציג את הקשרים הלוגיים.

כמת לוגי	סימן	יישום	כיצד לקרוא את היישום?
שלילה	$\neg$	$\neg p$	לא p / p לא נכון
או	$\vee$	$p \vee q$	p או q
וגם	$\wedge$	$p \wedge q$	p וגם q
גרירה (אם - אז)	$\implies$	$p \implies q$	אם p אז q / p גורר q
שקילות (אם ורק אם)	$\iff$	$p \iff q$	p אם ורק אם q / p ו-q שקולים

הערה

1. נבחין שבגרירה, כאשר הפסוק שלפני החץ (נקרא רישא, במקרה שלנו p) שקרי, טענת הגרירה תהיה אמת, ללא תלות בפסוק שאחרי החץ (נקרא סיפא, במקרה שלנו q).
מדוע? אם יגש אלינו אדם ויגיד: "אם יורד מהשמיים גשם של תפוזים, אז שמי הוא מתושלח", אנחנו לא נקרא לו שקרן, בין אם שמו מתושלח או לאו. זאת מכיוון שלא יורד מהשמיים גשם של תפוזים, והוא התנה את דבריו רק באפשרות שגשם כזה אכן יורד.
מכיוון שפסוק לוגי חייב להיות אמת או שקר, וביססנו שהפסוק איננו שקרי, מדובר בפסוק אמת.

2. פסוק 'אם ורק אם' מקבל ערך אמת כאשר שני הפסוקים הם אמת או שקר יחדיו. במקרה הזה נגיד שאלו פסוקים שקולים.
דוגמה מוכרת לפסוקים שקולים: כל פסוק p שקול לפסוק $\neg\neg p$.
דרך נוספת להסתכל על טענת אם ורק אם, היא $q \implies p$ וגם $p \implies q$.
כאשר נתקל בטענת אם ורק אם אותה נתבקש להוכיח, חשוב לזכור להוכיח את שני כיווני הגרירה.

3. נניח ש-$q \implies p$. הוכיחו שמכך נובע שהפסוק הלוגי $(\neg p) \implies (\neg q)$ הוא אמת. לגרירה $(\neg p) \implies (\neg q)$ נקרא זהות הקונטרה פוזיטיב של $q \implies p$.

דוגמא 6.4.2.

דוגמה מוכרת לזהות הקונטרה פוזיטיב היא בשיר "לכובע שלי שלוש פינות".
בהנתן כובע x, נאמר שמתקיים $p(x)$ כאשר x הוא הכובע שלי. כמו כן, נאמר שמתקיים $q(x)$ אם לכובע x יש שלוש פינות.
בשיר נאמר "לכובע שלי שלוש פינות". כלומר, אם x הוא הכובע שלי, אז ל-x שלוש פינות. או באופן שקול:

$$p(x) \implies q(x)$$

בסוף השיר נאמר "לולא היו לו שלוש פינות, לא היה הוא הכובע שלי". כלומר, אם x הוא ללא שלוש פינות, אז x הוא הכובע שלי. באופן שקול:

$$\neg q(x) \implies \neg p(x)$$

הערה

הזכרנו שניתן להסתכל על טענת $q \iff p$ כ-$q \implies p$ וגם $p \implies q$.
בשימוש בקונטרה פוזיטיב, דרך נוספת להתבונן בטענת אם ורק אם היא $q \implies p$ וגם $\neg q \implies \neg p$.

6.4.1 כמתים לוגים

כלי נוסף לכתיבת פסוקים מורכבים וטענות מתמטיות, הוא שימוש בכמתים לוגים. בכמתים הללו השתמשנו כבר בעבר. נגדיר אותם כעת באופן מסודר.

תזכורת

1. הכמת לכל, יסומן על ידי $\forall$, ונשתמש בו כאשר נרצה לכתוב פסוק על כל אובייקט שמקיים תכונה מסויימת.
2. הכמת קיים, יסומן על ידי $\exists$, ונשתמש בו כאשר נרצה לכתוב פסוק על קיום אובייקט שמקיים תכונה מסויימת.

הערה

משפטים אשר כתובים באמצעות הכמתים והקשרים הלוגיים, ולא במילים, נקראים משפטים מוצרנים.
את המשפטים המוצרנים נקרא משמאל לימין.

6.4.2 תבניות הוכחה

לסיכום, נציג מספר תבניות הוכחה שברובן כבר השתמשנו, ונשתמש עוד הרבה לאורך הקורס.

טענת לכל

תזכורת

טענת לכל, היא טענה בה נדרש להוכיח או להפריך שכל אובייקט שמקיים את תכונה p מקיים את תכונה q. למעשה, טענת לכל היא טענת גרירה: אם אובייקט מקיים את תכונה p אז הוא מקיים את תכונה q.
אם נרצה להוכיח את הטענה, נקח אובייקט כללי, ונניח שהוא מקיים רק את תכונה p, ונראה שמכך נובע שהוא מקיים את תכונה q. חשוב מאוד להזהר לא להניח הנחות נוספות לגבי האובייקט.
אם נרצה להפריך טענת לכל, נדרש למצוא דוגמה לאובייקט אשר מקיים את תכונה p אך לא מקיים את תכונה q. מספיק שמצאנו דוגמה אחת כזו, כדי להוכיח שטענת ה-"לכל" איננה נכונה.

טענה 6.4.3.

1. כל מטריצה אלכסונית היא משולשית עליונה
2. כל מטריצה משולשית עליונה היא משולשית תחתונה

<u>הוכחה:</u>
נוכיח לפי סעיפים:

1. הטענה נכונה, כי אם המטריצה אלכסונית בפרט כל האיברים מתחת לאלכסון הראשי הם אפסים.
2. הטענה שגויה, והמטריצה הבאה היא דוגמה נגדית:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

שימו ♡, כדי להפריך את הטענה היינו צריכות מטריצה משולשית עליונה שאינה משולשית תחתונה.

טענת קיים

תזכורת

טענת קיים, היא טענה בה נדרש להוכיח או להפריך קיום של אובייקט שמקיים את תכונה p.
אם נרצה להוכיח טענת קיים, נדרש להציג דוגמה של אובייקט שמקיים את תכונה p.
אם נרצה להפריך טענת קיים, נדרש להראות שתכונה p לא יכולה להתקיים. כלומר, שכל אובייקט בעולם לא מקיים את תכונה p.

טענה 6.4.4.

1. קיימת מטריצה משולשית עליונה שהיא משולשית תחתונה.
2. קיימת מטריצה כך שיש לה שתי מטריצות שהן השחלוף שלה.

הוכחה:
נפתור לפי הסעיפים:

1. קיימת כזו! לדוגמה, מטריצת האפס.
2. נפריך, כלומר נרצה להראות שלכל מטריצה אם קיימת לה שחלוף (עובדה שראינו ונובעת מההגדרה של שחלוף) אז היא יחידה. אכן, נניח שיש מטריצה A עבורה קיימות B, C כך ש:

$$A^t = B \qquad \& \qquad A^t = C$$

נפעיל שוב שחלוף ונשתמש בחוקי השחלוף:

$$A = B^t \qquad \& \qquad A = C^t$$

לכן:

$$B^t = C^t \Longrightarrow B = C$$

כלומר אם קיימת מטריצה משוחלפת היא יחידה.

הערה

שימו ♡ שיכלנו להוכיח גם באופן הבא. נניח בשלילה שקיימת מטריצה עם 2 מטריצות שונות ששוות לשחלוף שלה, ונקבל סתירה. עוד בנושא, תכף :)

הכלה חד כיוונית

תזכורת

טענת הכלה חד כיוונית, היא טענה בה נתונות לנו שתי קבוצות A, B ואנחנו נתבקש להוכיח או להפריך ש-$A \subseteq B$.
אם ברצוננו להוכיח את הטענה, עלינו להראות שכל $x \in A$ מקיים $x \in B$.
אם ברצוננו להפריך את הטענה, עלינו להראות שקיים איבר $x \in A$ שמקיים $x \notin B$.
למעשה, טענת הכלה חד כיוונית היא טענת "לכל" הבאה:

$$\forall x \in A : x \in B$$

שוויון קבוצות

תזכורת

טענת שוויון קבוצות, היא טענה בה נתונות לנו שתי קבוצות A, B, ואנחנו נתבקש להוכיח או להפריך ש-$A = B$
אם ברצוננו להוכיח את הטענה, עלינו להוכיח ששתי ההכלות $A \subseteq B$ ו-$B \subseteq A$ מתקיימות.
אם ברצוננו להפריך את הטענה, עלינו להראות שלפחות אחת משתי ההכלות לא מתקיימת.

הוכחה בדרך השלילה

תזכורת

כאשר נרצה להוכיח טענה בדרך השלילה, נניח את נתוני הטענה, ובנוסף להם, נניח את שלילת מסקנת הטענה. לאחר מכן, נראה שמכל ההנחות הללו יחד, נובעת סתירה לוגית.

תרגיל בית שלישי

7.1 תרגילים להגשה

תרגיל 7.1.1.

1. מצאי פולינום ממעלה 2 כך ש:

$$p(1) = 2; p(0) = 4; p'(2) = 2$$

2. מצאי פולינום ממעלה 3 כך ש:

$$p(1) = 2; p(0) = 1; p'(1) = 4$$

תרגיל 7.1.2.

נתונה מערכת המשוואות הבאה:

$$\begin{cases} ax + ay + az = a \\ -x + y - az = 2 \\ 2x - ay + az = 1 \end{cases}$$

עבור מספר $a \in \mathbb{R}$.

1. עבור אילו ערכי a למערכת יש פתרון יחיד, אינסוף פתרונות או אין פתרון?
2. כמה משתנים חופשיים יש למערכת? אילו משתנים הם החופשיים?

תרגיל 7.1.3.

הוכיחי או הפריכי את הטענות הבאות:

1. נתונה מערכת משוואות לינאריות $Ax = 0$ וx_1, x_2 פתרונות שלה. אזי גם $x_1 - x_2$ פתרון של המערכת.
2. נתונה מערכת משוואות לינאריות $Cy = d$ כך ש y_1, y_2 פתרונות שלה, אזי לכל α, β כך ש $\alpha + \beta = 2$ מתקיים ש:

$$\alpha y_1 + \beta y_2$$

גם פתרון של המערכת.

7.2 תרגילים לא להגשה

תרגיל 7.2.1.

הראי כי למערכת הבאה יש פתרון יחיד אמ"מ λ, α שונות זו מזו:

$$\begin{cases} x+y=0 \\ \lambda x+\alpha y=0 \end{cases}$$

<u>פתרון:</u>

נעביר את המערכת למטריצת מקדמים (אין צורך במטריצה מורחבת שכן המערכת הומוגנית):

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \lambda & \alpha \end{pmatrix}$$

נפצל למקרים אם למדא אפס או שלא:

1. $\lambda = 0$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}$$

נבחין כדי שיהיה פתרון יחיד, אלפא חייב להיות שונה מאפס, כלומר $\alpha \neq 0 = \lambda$.

2. $\lambda \neq 0$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & \frac{\alpha}{\lambda} \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & \frac{\alpha}{\lambda}-1 \end{pmatrix}$$

ושוב כדי שיהיה פתרון יחיד האיבר בשורה השנייה בעמודה השנייה צריך לא להתאפס, כלומר:

$$\frac{\alpha}{\lambda}-1\neq 0\frac{\alpha}{\lambda}=1 \iff \alpha=\lambda$$

תרגיל 7.2.2.

יהי $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$ פתרון של המערכת הבאה:

$$\begin{cases} y+z+t=0 \\ x-y+z-t=0 \\ -x+z-t=0 \end{cases}$$

שמקיים $xyz=8$. מצאו את ערך הביטוי:

$$x+y+z+t$$

פתרון:
נבין כיצד נראים פתרונות כלליים של המערכת, ואז נמצא אחד מבוקש. לשם כך, נדרג את המטריצה המתאימה לה:

$$\begin{pmatrix}0&1&1&1\\1&-1&1&-1\\-1&0&1&-1\end{pmatrix}\rightsquigarrow\begin{pmatrix}1&-1&1&-1\\0&1&1&1\\0&-1&0&-2\end{pmatrix}\rightsquigarrow\begin{pmatrix}1&0&2&0\\0&1&1&1\\0&0&1&-1\end{pmatrix}\rightsquigarrow\begin{pmatrix}1&0&0&2\\0&1&0&2\\0&0&1&-1\end{pmatrix}$$

לכן פתרון נראה מהצורה:

$$\begin{pmatrix}-2t\\-2t\\t\\t\end{pmatrix}$$

לכן עבור פתרון שמקיים:

$$4t^3=xyz=8\Rightarrow t^3=2\Rightarrow t=2^{\frac{1}{3}}$$

לכן:

$$x+y+z+t=-2t-2t+t+t=-2t=-2^{\frac{4}{3}}$$

תרגיל 7.2.3.

נתונה מערכת המשוואות הבאה:

$$\begin{cases}ax+ay-az=a\\-x+4y-az=0\\2x-8y+4z=1\end{cases}$$

עבור מספר $a\in\mathbb{R}$.

1. עבור אילו ערכי a למערכת יש פתרון יחיד, אינסוף פתרונות או אין פתרון?
2. כמה משתנים חופשיים יש למערכת? אילו משתנים הם החופשיים?

פתרון:
נרשום את המערכת המורחבת המתאימה לממ"ל, ונדרג:

$$\begin{pmatrix}a&a&-a&a\\-1&4&-a&0\\2&-8&4&1\end{pmatrix}\rightsquigarrow\begin{pmatrix}1&1&-1&1\\-1&4&-a&0\\2&-8&4&1\end{pmatrix}\rightsquigarrow\begin{pmatrix}1&1&-1&1\\0&5&-a-1&1\\0&-10&6&-1\end{pmatrix}$$

במעבר הראשון הנחנו ש$a\neq0$. נמשיך לדרג:

$$\rightsquigarrow\begin{pmatrix}1&1&-1&1\\0&5&-a-1&1\\0&0&4-2a&1\end{pmatrix}$$

כעת, אם $a\neq2$ אזי למערכת יש פתרון יחיד. אחרת, אם $a=2$ ישנה שורת סתירה, ואין פתרון.

נותר לבדוק עבור $a=0$:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & 0 & 0 \\ 2 & -8 & 4 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} -1 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

כלומר יש אינסוף פתרונות, וכן ישנו משתנה חופשי יחיד והוא y. נסכם:

1. אם $a=0$, למערכת יש אינסוף פתרונות עם משתנה חופשי y.
2. אם $a=2$ למערכת אין פתרון.
3. אחרת, כלומר $a\neq 0,2$ למערכת יש פתרון יחיד.

תרגול חמישי

8.1 אינדוקציה

8.1.1 הצגת העיקרון ותרגילים

הערה

בפרק הקרוב, נכיר את עיקרון האינדוקציה. עיקרון זה יאפשר לנו דרך תבניתית, אך עם זאת "אלגנטית" להוכיח טענות אשר בד"כ יהיו קשורות למספרים טבעיים. נתחיל מהגדרת העיקרון במקרה הבסיסי.

תזכורת

עיקרון האינדוקציה נאמר שמתקיים $P(n)$, אם טענה P התלויה בפרמטר $n \in \mathbb{N}$, מתקיימת.
נרצה להוכיח את הטענה P לכל $n \in \mathbb{N}$. נעשה זאת בשני שלבים.

1. בסיס האינדוקציה: נוכיח את $P(1)$. כלומר, נוכיח שהטענה P מתקיימת עבור $n = 1$.
2. צעד האינדוקציה: נוכיח שלכל $n \geq 1$, מתקיימת הגרירה:

$$P(n) \implies P(n+1)$$

כלומר, נראה שמההנחה שהטענה P מתקיימת עבור n, נובע שהטענה P מתקיימת עבור $n+1$.

מדוע עיקרון האינדוקציה עוזר לנו להוכיח את הטענה לכל $n \in \mathbb{N}$?
על עיקרון האינדוקציה נחשוב כמו על הפלת אבני דומינו. כיצד נבטיח להפיל את כל אבני הדומינו?
נציב את אבני הדומינו במרחק מספיק קרוב אחת לשניה, כך שכאשר האבן ה-n תפול, היא תפיל את האבן ה-$n+1$.
לאחר שהבטחנו שהאבנים מוצבות במיקומים הנכונים, נפיל את האבן הראשונה.
כך גם עובד עיקרון האינדוקציה. אנחנו נוכיח את הטענה עבור $n = 1$.
כעת, מכיוון שאנחנו הראנו שנכונות הטענה עבור 1, גוררת את נכונות הטענה עבור 2, ומכיוון שהוכחנו את הטענה עבור 1, הטענה נכונה גם עבור 2.
כך נמשיך, להסיק את נכונות הטענה עבור 3. מדוע? אנחנו ראינו שהטענה נכונה עבור 2, ואנחנו הוכחנו שנכונות הטענה עבור 2, גוררת את נכונות הטענה עבור 3.
נמשיך כך ונגיע לכל $n \in \mathbb{N}$.
נפנים את הרעיון בצורה יותר עמוקה באמצעות מספר תרגילים. לשם כך נכיר את ההגדרה הבאה:

תזכורת

בהנתן סדרה של איברים $\sum_{i=1}^{n} a_i$,$a_1, a_2, \dots, a_n$, נגדיר את:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n$$

זהו סימון שנועד לסייע לנו לכתוב סכומים של n איברים בצורה נוחה לקריאה. כיצד נקרא אותו?
ה-i מציין את אינדקס הספירה, ה-1 את הערך ההתחלתי וה-n את הערך הסופי.

תרגיל 8.1.1.

לכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים:

$$\sum_{i=1}^{n} i = 1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

<u>פתרון:</u>
נוכיח באינדוקציה.
בסיס האינדוקציה: עבור $n = 1$ מתקיים:

$$\sum_{i=1}^{n} i = 1 = \frac{1 \cdot 2}{2} = \frac{n(n+1)}{2}$$

צעד האינדוקציה: נניח שהטענה מתקיימת עבור $n = k$. כלומר:

$$\sum_{i=1}^{k} i = \frac{k(k+1)}{2}$$

נוכיח שמכך נובעת הטענה עבור $n = k + 1$. אכן:

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{k+1} i = \sum_{i=1}^{k} i + (k+1) = \\ = \frac{k(k+1)}{2} + (k+1) = \\ = \frac{k(k+1) + 2(k+1)}{2} = \\ = \frac{(k+1)(k+2)}{2}\end{aligned}$$

כפי שרצינו להוכיח.

תרגיל 8.1.2.

יהי $1 \neq a \in \mathbb{R}$. לכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים:

$$\sum_{i=1}^{n} a^i = \frac{a\left(a^n-1\right)}{a-1}$$

פתרון:
נוכיח באינדוקציה.
בסיס האינדוקציה: עבור $n=1$ מתקיים:

$$\sum_{i=1}^{n} a^i = a = \frac{a\left(a-1\right)}{a-1} = \frac{a\left(a^n-1\right)}{a-1}$$

צעד האינדוקציה: נניח שהטענה מתקיימת עבור $n=k$. כלומר:

$$\sum_{i=1}^{k} a^i = \frac{a\left(a^k-1\right)}{a-1}$$

נוכיח שמכך נובעת הטענה עבור $n=k+1$. אכן:

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{k+1} a^i &= \sum_{i=1}^{k} a^i + a^{k+1} = \\ &= \frac{a\left(a^k-1\right)}{a-1} + a^{k+1} = \\ &= \frac{a\left(a^k-1\right) + a^{k+1}\left(a-1\right)}{a-1} = \\ &= \frac{a^{k+1} - a + a^{k+2} - a^{k+1}}{a-1} = \\ &= \frac{-a + a^{k+2}}{a-1} = \frac{a\left(a^{k+1}-1\right)}{a-1}\end{aligned}$$

כפי שרצינו להוכיח.

הערה

לעיקרון האינדוקציה קיימת הכללה שעובדת בצורה דומה לגרסה שכבר הכרנו.
ראשית, לפעמים בסיס האינדוקציה יהיה עבור $n=0$.
כמו כן, לעיתים לא נרצה להוכיח טענה לכל $n \in \mathbb{N}$, אלא תהיה $A \subseteq \mathbb{N}$ ונרצה להוכיח את הטענה לכל $n \in A$.
גם בגרסה הזאת נוכיח את הטענה ראשית עבור האיבר המינימלי בקבוצה ה-A. לאחר מכן נוכיח שלכל איבר $a \in A$, אם הטענה נכונה עבורו, נובע שהטענה נכונה גם עבור האיבר $b \in A$ הקטן ביותר שמקיים $b > a$.

8.1.2 סכנות האינדוקציה

ראינו שאינדוקציה היא כלי מאוד שימושי להוכחת טענות, אך אם נעבוד איתה בצורה לא זהירה, ייתכן שנוכיח שטויות מוחלטות.

דוגמא 8.1.3.

נוכיח באינדוקציה שכל מספר טבעי הוא פצפון לעומת מיליון.
בסיס האינדוקציה: עבור $n = 1$, אין שאלה בכלל, 1 הוא פצפון לעומת מיליון.
צעד האינדוקציה: נניח ש-$n = k$ הוא פצפון לעומת מיליון. כבר דיברנו על זה ש-1 פצפון לעומת מיליון, אז כמה כבר $k + 1$ גדול יותר מ-k? לא הרבה. אז גם $k + 1$ פצפון לעומת מיליון.
טענה זו היא כמובן שגויה מהיסוד. ונובעת מכך שהמושג "פצפון לעומת מיליון" הוא לא מושג מתמטי מוגדר היטב.

דוגמא 8.1.4.

נוכיח באינדוקציה שלכל $n \in \mathbb{N}$, ובכל קבוצה של n סוסים, כל הסוסים יהיו באותו הצבע.
בסיס האינדוקציה: עבור $n = 1$, בכל קבוצה של סוס אחד, כל הסוסים באותו הצבע.
צעד האינדוקציה: נניח את נכונות הטענה עבור $n = k$. כלומר, שבכל קבוצה של k סוסים, כל הסוסים באותו הצבע. נסיק את הטענה עבור $n + 1$.
תהא $A = \{a_1, a_2, \dots, a_{k+1}\}$ קבוצה של $k + 1$ סוסים. נוציא מהקבוצה את הסוס a_{k+1}. בקבוצה $\{a_1, \dots a_k\}$ יש k סוסים, ולכן כולם באותו הצבע.
נוציא כעת מ-A את a_1. בקבוצה $\{a_2, a_3, \dots, a_{k+1}\}$ יש k סוסים ולכן כולם באותו הצבע.
הסוס a_2 היה בכל אחת משתי תתי הקבוצות. לכן הוא בצבע של כל הסוסים האחרים, כלומר כל הסוסים באותו הצבע.
לכולנו ברור שמשהו לא נעשה כשורה. אך היכן הבעיה?
התשובה היא צעד האינדוקציה. למעשה הבעיה היא שהנחנו ש-a_2 ו-a_{k+1} הם שני סוסים נפרדים. זאת מכיוון שאם $k = 1$, בקבוצת $k + 1$ הסוסים, יש רק שני סוסים, ואין סוס שיהיה שייך לשתי תת הקבוצות.

הערה

ניתן להגיע לסתירות מוזרות נוספות אם לא נזהר בהוכחה באינדוקציה. לכן חשוב מאוד לפעול בזהירות.

8.2 מרחבים וקטורים ותתי מרחבים וקטורים

תזכורת

הקבוצה V, יחד עם פעולת החיבור, וכפל בסקלר ב$\mathbb{F}$ נקראת <u>מרחב וקטורי מעל שדה</u> $\mathbb{F}$ אם מתקיים:

- סגירות לחיבור: $\forall v, w \in V,\ u + v \in V$.
- אסוציאטיביות בחיבור: $\forall v, u, w \in V,\ u + (v + w) = (u + v) + w$.
- קיום ווקטור האפס: $\exists 0 \in V,\ \forall v \in V,\ 0 + v = v + 0 = v$.
- קיום נגדי חיבורי: $\forall v \in V, \exists(-v) \in V,\ (-v) + v = v + (-v) = 0$.
- חילופיות בחיבור: $\forall v, u \in V,\ u + v = v + u$.
- סגירות לכפל בסקלר: $\forall \lambda \in \mathbb{F}, v \in V,\ \lambda v \in V$.
- פילוג של חיבור בסקלר: $\forall v \in V, \lambda, \mu \in \mathbb{F},\ (\lambda + \mu)v = \lambda v + \mu v$.
- פילוג של כפל בסקלר: $\forall v \in V, \lambda, \mu \in \mathbb{F},\ (\lambda\mu)v = \mu(\lambda v)$.
- פילוג של ווקטורים: $\forall u, v \in V, \lambda \in \mathbb{F},\ \lambda(u + v) = \lambda u + \lambda v$.
- כפל ביחידת השדה: $\forall v \in V,\ 1_{\mathbb{F}} \cdot v = v$.

כאשר איברי השדה נקראים סקלרים ואיברי המרחב נקראים וקטורים.

דוגמא 8.2.1.

נראה 3 דוגמאות למרחבים וקטורים מוכרים, כאשר $\mathbb{F}$ הוא או השדה $\mathbb{R}$ או $\mathbb{C}$.

1. מרחב המטריצות $\mathbb{F}^{n\times m}$ מעל $\mathbb{F}$ עם חיבור וכפל מטריצות כמו שהגדרנו בתרגול 4.
2. $\mathbb{F}^n$ מעל השדה $\mathbb{F}$ כלומר n-ניות עם כפל בסקלר וחיבור איבר איבר.
3. מרחב הפולינומים $\mathbb{F}[x]$ מעל השדה $\mathbb{F}$ עם הפעולות שהגדרנו בתרגול 1 של חיבור פולינומים וכפל בסקלר.
4. מרחב הפונקציות הממשיות מעל $\mathbb{R}$ עם פעולות החיבור והכפל בסקלר הרגילות של פונקציות.

טענה 8.2.2.

נבחין כי:

1. $\mathbb{C}^n$ הוא תת מרחב מעליו $\mathbb{R}$.
2. $\mathbb{R}^n$ הוא לא תת מרחב מעליו $\mathbb{C}$.

מרוכבים מעל ממשיים ולהיפך

הוכחה:
נוכיח את הטענה עבור $n=2$:
בשביל שמרחב יהיה מרחב וקטורי מעל שדה כלשהו (בפרט מעל $\mathbb{C}$) הוא צריך לקיים סגירות לכפל בסקלר. נבדוק האם זה המקרה:

$$(2+3i)\begin{pmatrix}1\\ \pi\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2+3i\\ (2+3i)\pi\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2+3i\\ 2\pi+3i\pi\end{pmatrix}\notin\mathbb{R}^2$$

כי אף אחת מהקורדינטות היא לא מספר ממשי!

תזכורת

יהי V מ"ו מעל שדה $\mathbb{F}$ ותהיי $W\subset V$ תת קבוצה לא ריקה של V. נאמר כי W הוא תמ"ו מעל $\mathbb{F}$ אם הוא עם אותן פעולות חיבור וקטורים וכפל וקטור בסקלר כמו V.

דרך שקולה לבדוק שת"מ $W\subset V$ הוא תמ"ו, היא לבדוק את התנאים הבאים:

1. $0\in W$
2. סגירות בחיבור ב W:
$$\forall w_1,w_2\in W,\quad w_1+w_2\in W$$
3. סגירות בכפל בסקלר ב W:
$$\forall w\in W,\lambda\in\mathbb{F},\quad \lambda w\in W$$

תרגיל 8.2.3.

בכל סעיף הוכיחי או הפריכי, האם הקבוצה הנתונה תמ"ו:

1.
$$A := \left\{ \begin{pmatrix} t \\ 1 \end{pmatrix} \middle| t \in \mathbb{R} \right\} \subset \mathbb{R}^2$$

2.
$$A := \{p(x) \mid \text{deg}(p) \in \mathbb{N}_{odd}\} \subset \mathbb{R}[x]$$

3.
$$A := \left\{ \begin{pmatrix} t \\ 2t \\ 3t \end{pmatrix} \middle| t \in \mathbb{R} \right\} \subset \mathbb{R}^3$$

4.
$$A := \left\{ \begin{pmatrix} t \\ t^2 \\ 0 \end{pmatrix} \middle| t \in \mathbb{R} \right\} \subset \mathbb{R}^3$$

פתרון:

1. נשים לב כי וקטור האפס, $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ לא בA, אז A לא תת-מרחב.

2. נראה כי A אינה סגורה לחיבור:
$$2x^3 + x + \in A$$
$$-2x^3 - 4x^2 + 3 \in A$$
אבל:
$$2x^3 + x + 1 + (-2x^3 - 4x^2 + 3) = -4x^2 + x + 4 \notin A$$

3. נראה כי A תמ"ו של $\mathbb{R}^3$, ראשית $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in A$, אם $v_1, v_2 \in A$, אז קיימים $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$ כך ש:
$$v_1 = \begin{pmatrix} t_1 \\ 2t_1 \\ 3t_1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} t_2 \\ 2t_2 \\ 3t_2 \end{pmatrix}$$
אז:
$$(v_1 + v_2) = \begin{pmatrix} t_1 \\ 2t_1 \\ 3t_1 \end{pmatrix} + v_2 = \begin{pmatrix} t_2 \\ 2t_2 \\ 3t_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t_1 + t_2 \\ 2(t_1 + t_2) \\ 3(t_1 + t_2) \end{pmatrix} \in A$$

נשאר לנו להראות סגירות לכפל בסקלר:

$$\lambda \in \mathbb{R}, v = \begin{pmatrix} t \\ 2t \\ 3t \end{pmatrix} \in A \Rightarrow \lambda v = \begin{pmatrix} \lambda t \\ 2(\lambda t) \\ 3(\lambda t) \end{pmatrix} \in A$$

אז A אכן תמ"ו של $\mathbb{R}^3$.

4. נראה כי A אינה סגורה לחיבור:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} \in A$$

אבל:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} \notin A$$

כלומר A לא מ"ו של $\mathbb{R}^3$.

8.2.1 איחוד וחיתוך תתי מרחבים

תרגיל 8.2.4.

נזכיר כי החיתוך של 2 קבוצות הוא אוסף כל האיברים שנמצאים בשתיהן. פורמלית עבור A, B קבוצות:

$$A \cap B := \{x | x \in A \text{ וגם } x \in B\}$$

הוכיחי או הפריכי כי חיתוך תמ"ו הוא תמ"ו.

פתרון:
נוכיח את כי איחוד של זוג תתי מרחבים V, W מעל $\mathbb{R}$ הוא מרחב וקטורי בעצמו.

1. נבחין כי $0 \in V, W$ ולכן הוא גם בחיתוך שלהם.
2. יהיו $v, w \in V \cap W$ וסקלר $\lambda \in \mathbb{R}$. מכך שכל אחד מהם מרחב וקטורי, מתקיים:

$$v + \lambda w \in V \qquad \& \qquad v + \lambda w \in W$$

ולכן מהגדרה:

$$v + \lambda w \in V \cap W$$

ולכן $V \cap W$ מקיים את התנאים השקולים להיותו מרחב וקטורי, כדרוש.

תרגיל 8.2.5

הוכיחי או הפריכי כי איחוד תמ"ו הוא תמ"ו.

פתרון:
נראה כי זה לא נכון. נתבונן במרחב הוקטורי $\mathbb{R}^3$ ובתתי המרחבים הבאים:

$$R_1 := \{(x,y,z) \mid y = 0 = z\}, R_2 := \{(x,y,z) \mid x = 0 = z\}, R_3 := \{(x,y,z) \mid x = 0 = y\}$$

בה"כ נראה ש R_1 הוא תת מרחב וקטורי:

$$0 = (0,0,0) \in R_1$$

$$\forall (x_1,0,0),(x_2,0,0) \in R_1,\ (x_1+x_2,0,0) \in R_1$$
$$\forall (x_1,0,0), \lambda \in \mathbb{R} \in R_1,\ \lambda(x_1,0,0) = (\lambda x_1,0,0) \in R_1$$

באופן דומה מוכיחים עבור R_2, R_3.

מתקיים ש:
$$(1,0,0) \in R_1 \subset R_1 \cup R_2, \qquad (0,2,0) \in R_2 \subset R_1 \cup R_2$$

ואילו הסכום שלהם מקיים:

$$(1,2,0) \notin R_1, R_2 \Rightarrow (1,2,0) \notin R_1 \cup R_2$$

כלומר תת המרחב $R_1 \cup R_2$ אינו סגור לחיבור ולכן אינו תת מרחב וקטורי של $\mathbb{R}^3$.

הערה

זו טעות חמורה ונפוצה מאוד!

טענה 8.2.6

יהיו V מרחב וקטורי ו W_1, W_2 שני תמ"ו שלו.
הוכיחי כי, $W_1 \cup W_2$ תמ"ו של V אמ"מ $W_1 \subset W_2$ או $W_2 \subset W_1$.

הוכחה:
הכיוון הראשון:
בה"כ $W_1 \subset W_2$, אז יש להראות כי $W_1 \cup W_2$ תמ"ו של V, ואכן, $W_1 \cup W_2 = W_2$ שהוא תמ"ו של V.
הכיוון השני:
נראה כי אם W_1 לא מוכל בW_2 וגם W_2 לא מוכל בW_1, אז $W_1 \cup W_2$ לא תמ"ו.
במקרה הנ"ל, קיים $v_1 \in W_1$, אבל $v_1 \notin W_2$ וגם $v_2 \in W_2$, $v_2 \notin W_1$, נראה כי $v_1 + v_2 \notin W_1 \cup W_2$,

נניח בשלילה כי $v_1 + v_2 \in W_1 \cup W_2$, אבל אז מסגירות החיבור של W_1 מתקיים:

$$\underbrace{v_1 + v_2}_{\in W_1} + \underbrace{(-v_1)}_{\in W_1} = v_2 \in W_1$$

שזו סתירה להנתחינו.
ובאותה צורה, אם $v_1 + v_2$ היה בW_2 היה מתקיים:

$$\underbrace{v_1 + v_2}_{\in W_2} + \underbrace{(-v_2)}_{\in W_2} = v_1 \in W_2$$

שזו גם סתירה, כלומר $v_1 + v_2$ לא בV_1 וגם לא בV_2, אז הוא לא ב$V_1 \cup V_2$, כלומר $V_1 \cup V_2$ לא סגור לאיחוד.

8.2.2 סכום ישר של תתי מרחבים

תזכורת

נסמן ע"י $W_1 + W_2$ את התמ"ו הבא של V:

$$W_1 + W_2 = \{w_1 + w_2 | w_1 \in W_1, w_2 \in W_2\}$$

מקרה מיוחד, בו נקרא לW_1, W_2 <u>סכום ישר</u> ונסמן $W_1 \oplus W_2$ הוא כאשר: $W_1 \cap W_2 = \{0\}$. לעיתים נרצה להוכיח שמתקיים ש:

$$V = W_1 \oplus W_2$$

ואז נרצה לדרוש בנוסף שמרחב הסכום שווה למרחב המקורי. התנאי השני, ש$W_1 \cap W_2 = \{0\}$ שקול לכך שכל $v \in V$ ניתן לייצג <u>בצורה יחידה</u> בתור $v = w_1 + w_2$ עבור $w_1 \in W_1, w_2 \in W_2$.

תרגיל 8.2.7.

1. הראו כי אוסף המטריצות מסדר $n \times n$ הסימטריות, אותם נסמן Sym_n, תמ"ו של $\mathbb{R}^{n\times n}$.
2. הראו כי אוסף המטריצות מסדר $n \times n$ האנטי-סימטריות, אותם נסמן ASym_n, תמ"ו של $\mathbb{R}^{n\times n}$.
3. הוכיחי כי $\mathbb{R}^{n\times n} = \text{Sym}_n \oplus \text{ASym}_n$.

<u>פתרון:</u>

1. נבדוק את הקריטריונים:

   (א) מטריצת האפס היא סימטרית,

(ב) יהיו $A,B \in \mathsf{Sym}_n$, כלומר $A^t = A, B^t = B$, אז:

$$(A+B)^t = A^t + B^t = (A+B)$$

כלומר $(A+B) \in \mathsf{Sym}_n$.

(ג) יהא $A \in \mathsf{Sym}_n$, כלומר $A = A^t, \lambda \in \mathbb{R}$, אז:

$$(\lambda A)^t = \lambda A^t = \lambda A$$

כלומר $(\lambda A) \in \mathsf{Sym}_n$.

2. ההוכחה זהה למקרה של Sym_n ומושארת כתרגיל.
3. נזכר שראינו בתרגול 3 בדיוק את זה, שכל מטריצה $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ אפשר לכתוב בתור:

$$A = \underbrace{\frac{1}{2}(A+A^t)}_{\text{סימטרית}} + \underbrace{\frac{1}{2}(A-A^t)}_{\text{אנטי-סימטרית}}$$

וזאת הדרך היחידה לעשות זאת, כלומר $\mathbb{R}^{n\times n} = \mathsf{Sym}_n \oplus \mathsf{ASym}_n$.

8.2.3 משמעות גיאומטרית של תתי מרחבים וקטורים

למעשה לתתי מרחבים יש משמעות גיאומטרית. נראה כמה דוגמאות ואז נאפיין גיאומטרית את אוסף תתי המרחבים ב R^3.שימו לב, לא תנתן בשלב זה הוכחה פורמלית!!
אזהרה: ציורים זה מועיל, עוזר ונחמד אבל הם עלולים לשקר, וממילא זו לא נחשבת הוכחה מתמטית אלא רק אינטואיציה/מוטיבציה.

דוגמא 8.2.8.

נאמר כי הקבוצה הבאה היא ישר ב $\mathbb{R}^n$:

$$\ell = \{\alpha v_0 \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$$

עבור וקטור $v_0 \neq 0$. מתקיים כי זה תת מרחב וקטורי. אכן:

1. עבור $\alpha = 0$ מתקיים $0 = 0v_0 \in \ell$.
2. עבור $v_1, v_2 \in \ell$ קיימים α_1, α_2 כך ש:

$$v_1 = \alpha_1 v_0 \qquad \& \qquad v_2 = \alpha_2 v_0$$

ולכן לכל $\lambda \in \mathbb{R}$ מתקיים:

$$v_1 + \lambda v_2 = \alpha_1 v_0 + \lambda \alpha_2 v_0 = (\alpha_1 + \lambda\alpha_2)v_0 \in \ell$$

ולכן כל ישר מקיים את שלושת התנאים השקולים לתתי מרחבים וקטורים, כלומר ישרים הם תתי מרחבים וקטורים.
שימו ♡ הישרים חייבים לעבור בראשית, אחרת 0 לא שייך למרחב וזה לא יכול להיות תת מרחב וקטורי.

דוגמא 8.2.9.

נראה דוגמה למרחב גיאומטרי שהוא לא מרחב וקטורי: נסמן את הספירה הדו מימדית בR^3 להיות הקבוצה הבאה:

$$S^2 := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1 \right\}$$

אזי הוא לא תת מרחב, שכן $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in S^2$ אבל הסכום שלהם לא.

דוגמא 8.2.10.

באופן דומה לישר, אם נבחר $v_0 \neq 0$, וגם v_1 שלא בישר הנוצר ע"י v_0, מישור יהיה האוסף של האיברים מהצורה:

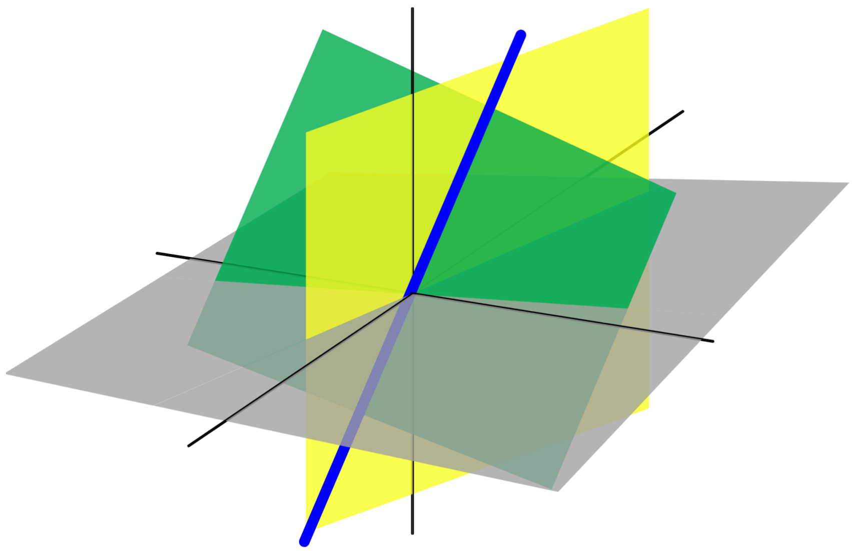
$$\mathcal{P} = \{\alpha v_0 + \beta v_1 \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$$

טענה (ללא הוכחה) 8.2.11.

ניתן למיין את כל תתי המרחבים של R^3, כלומר כל אחד מהמרחבים הוקטורים במרחב נראה מהצורה הבאה:

1. מרחב טריוואלי, כלומר $\{0\}$ או $\mathbb{R}^3$
2. ישר העובר דרך הראשית.
3. מישור העובר דרך הראשית.

לא תנתן הוכחה לטענה אלא רק הסבר רעיוני ציורי של ההוכחה שמופיע בתחילת העמוד.



איור 8.1: דוגמאות גיאומטריות לתתי מרחבים במרחב

תרגיל בית רביעי

9.1 תרגילים להגשה

תרגיל 9.1.1.

האם המרחבים הבאים תתי מרחבים וקטורים?

1.

$$\mathcal{U} := \left\{ \begin{pmatrix} t \\ t^2 \\ 0 \end{pmatrix} \middle| \, t \in \mathbb{R} \right\} \subset \mathbb{R}^3$$

2. עבור $A = diag(2,3,4)$,

$$\mathcal{V} := \{ B \in \mathbb{R}^{3\times 3} \mid BA = AB \} \subset \mathbb{R}^3$$

3. עבור $A = diag(2,3,4)$,

$$\mathcal{W} := \{ C \in \mathbb{R}^{3\times 3} \mid (CA)_{11} = 2A_{11},\ (CA)_{22} = 3A_{22},\ (CA)_{33} = 4A_{33} \} \subset \mathbb{R}^3$$

תרגיל 9.1.2.

תהיי A מטריצה מסדר 5×3 ו $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$. נניח כי למערכת $Ax = b$ יש פתרון, אז בהכרח:

1. למערכת $Ax = c$ יש פתרון לכל וקטור c עם 3 רכיבים.
2. למערכת ההומוגנית יש פתרון יחיד.
3. למערכת $Ax = b$ יש אינסוף פתרונות.
4. דרגת המערכת היא 3.

הערה

b הוא וקטור קבוע שנתון מראש.

תרגיל 9.1.3.

1. נסמן ב$\mathcal{U}$ את קבוצת המטריצות המשולשת העליונות מסדר $n \times n$.
הוכיחי כי $\mathcal{U}$ תמ"ו של $\mathbb{R}^{n\times n}$.
2. נסמן ב$\mathcal{V}$ את קבוצת המטריצות המשולשת התחתונות מסדר $n \times n$. הוכיחי כי $\mathcal{V}$ תמ"ו של $\mathbb{R}^{n\times n}$.
3. האם מתקיים:
$$\mathcal{U} + \mathcal{V} = \mathbb{R}^{n\times n}$$
4. האם מתקיים:
$$\mathcal{U} \oplus \mathcal{V} = \mathbb{R}^{n\times n}$$

9.2 שאלת רשות - אינדוקציה

תרגיל 9.2.1.

תהיי A מטריצה אי שלילית כך שכל איבר בה קטן מ2, פורמלית:

$$\forall i,j = 1,...,n \quad 0 \le A_{ij} \le 2$$

הוכיחי כי:

1. המטריצה A^2 מקיימת:
$$\forall i,j = 1,...,n \quad {A_{ij}}^2 \le 4n$$
2. המטריצה A^m כאשר m טבעי מקיימת:
$$\forall i,j = 1,...,n \quad A^m_{ij} \le n^{m-1}2^m$$

9.3 תרגילים לא להגשה

תרגיל 9.3.1.

יהיו $W_2 = \text{span}\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right)$, $W_1 = \text{span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$, הוכיחי כי:

$$W_1 \oplus W_2 = \mathbb{R}^2$$

אמ"מ $y \neq 0$.

<u>פתרון:</u>
ראשית נוכיח כי אם $y \neq 0$ אז $W_1 \oplus W_2 = \mathbb{R}^2$, ואכן יש לנו 2 דברים להוכיח:

1.
$$W_1 \cap W_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

2.
$$W_1 + W_2 = \mathbb{R}^2$$

ואכן:

1. אם $v \in W_1 \cap W_2$, אז קיימים $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ כך ש:
$$v = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = c_2 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$
כלומר:
$$\begin{pmatrix} c_1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} xc_2 \\ yc_2 \end{pmatrix}$$
אבל אם $y \neq 0$, אז $c_2 = 0$, ולכן $c_1 = 0$, כלומר $v = 0$.

2. יהא $v = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ כללי ב$\mathbb{R}^2$, עלינו להוכיח כי קיימים $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ כך ש:
$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 + c_2 x \\ c_2 y \end{pmatrix}$$
אז ראשית, $c_2 = \frac{b}{y}$, ואז:
$$a = c_1 + c_2 x = c_1 + x\frac{b}{y} \Rightarrow c_1 = a - \frac{bx}{y}$$
וסיימנו.

הכיוון השני, שאם $W_1 \oplus W_2 = \mathbb{R}^2$ אז $y \neq 0$ מושארת כתרגיל.

תרגיל 9.3.2.

יהיו W, U_1, U_2 תמ"ו של V. הוכיחו או הפריכו:

1. אם:
$$W + U_1 = W + U_2$$
אז $U_1 = U_2$

2. אם:

$$W \oplus U_1 = W \oplus U_2$$

אז $U_1 = U_2$

פתרון:

1. נראה דוגמא נגדית, אם $V = \mathbb{R}^2$, $W = \mathbb{R}^2, U_1 = \mathbb{R}^2, U_2 = \text{span}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$, אז באמת:

$$\underbrace{\mathbb{R}^2}_{W} + \underbrace{\mathbb{R}^2}_{U_1} = \underbrace{\mathbb{R}^2}_{W} + \underbrace{\text{span}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}}_{U_1}$$

אבל כמובן:

$$\mathbb{R}^2 \neq \text{span}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$$

2. שוב נראה דוגמא נגדית, נגדיר:

$$W = \text{span}\left(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right), \quad U_1 = \text{span}\left(\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right), \quad U_2 = \text{span}\left(\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right)$$

אז עלפי התרגיל הקודם מתקיים $W \oplus U_1 = W \oplus U_2 = \mathbb{R}^2$, אבל $U_1 \neq U_2$, כי למשל $\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \in U_2$, אבל $\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \notin U_1$.

תרגיל 9.3.3.

כתבו נוסחה סגורה לסדרה הבאה:

$$a_n = \begin{pmatrix}1 & 1\\1 & 1\end{pmatrix}^n$$

פתרון:
נוכיח באינדוקציה שמתקיים:

$$\begin{pmatrix}1 & 1\\1 & 1\end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix}2^{n-1} & 2^{n-1}\\2^{n-1} & 2^{n-1}\end{pmatrix}$$

בסיס האינדוקציה:
מתקיים כי:

$$a_1 = \begin{pmatrix}1 & 1\\1 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2^{1-1} & 2^{1-1}\\2^{1-1} & 2^{1-1}\end{pmatrix}$$

כרצוי. נעבור לצעד האינדוקציה, כלומר נניח את הטענה עבור n טבעי כלשהו, ונוכיח אותה עבור $n+1$:

$$a_{n+1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{n+1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{n} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^{n-1} & 2^{n-1} \\ 2^{n-1} & 2^{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} =$$
$$\begin{pmatrix} 2^{n-1}+2^{n-1} & 2^{n-1}+2^{n-1} \\ 2^{n-1}+2^{n-1} & 2^{n-1}+2^{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\cdot 2^{n-1} & 2\cdot 2^{n-1} \\ 2\cdot 2^{n-1} & 2\cdot 2^{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^{n} & 2^{n} \\ 2^{n} & 2^{n} \end{pmatrix}$$

כרצוי.

תרגול שישי

10.1 סכום ישר - המשך

תרגיל 10.1.1.

יהא V מ"ו בעל זוג תמ"ו W_1, W_2 אז $W_1 \cap W_2 = \{0\}$ (כלומר $W_1 + W_2 = W_1 \oplus W_2$) אמ"מ לכל $v \in W_1 + W_2$ קיימים ביחידות $w_1 \in W_1, w_2 \in W_2$ כך ש $v = w_1 + w_2$.

פתרון:
נניח כי קיים פירוק יחיד, ונניח בשלילה כי $0 \neq u \in W_1 \cap W_2$, יהא $v \in W_1 + W_2$ עם פירוק $v = w_1 + w_2$, אבל אז:

$$v = \underbrace{w_1 + u}_{\in W_1} + \underbrace{w_2 - u}_{\in W_2}$$

בסתירה להצגה היחידה של v.
נניח כי $W_1 \cap W_2 = \{0\}$, יהא $W_1 + W_2 \ni v = w_1 + w_2 = u_1 + u_2$ כאשר $w_1, u_2 \in W_1, w_2, u_2 \in W_2$, אז נקבל:

$$W_1 \ni w_1 - u_1 = u_2 - w_2 \in W_2$$

כלומר $w_1 - u_1 = 0$ או $w_1 = u_1$ וכנ"ל עבור $w_2 = u_2$ ולכן קיימת הצגה יחידה.

תזכורת

נסמן ע"י $W_1 + W_2$ את התמ"ו הבא של V:

$$W_1 + W_2 = \{w_1 + w_2 | w_1 \in W_1, w_2 \in W_2\}$$

מקרה מיוחד, בו נקרא לW_1, W_2 סכום ישר ונסמן $W_1 \oplus W_2$ הוא כאשר: $W_1 \cap W_2 = \{0\}$.
באופן שקול, כל איבר בתמ"ו החדש (הסכום) ניתן לפרק בצורה יחידה לאיבר מW_1 ועוד איבר מW_2.

דוגמא 10.1.2.

יהיו זוג תתי המרחבים הבאים של מרחב המטריצות מסדר 2 על 2:

$$\mathcal{U} := \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ c & d \end{pmatrix} \middle| a, c, d \in \mathbb{R} \right\} \quad ; \quad \mathcal{V} := \left\{ \begin{pmatrix} 0 & b \\ c' & 0 \end{pmatrix} \middle| b, c' \in \mathbb{R} \right\}$$

נבחין כי הסכום שלהם הוא מרחב כל המטריצות מסדר 2 על 2, כלומר:

$$\mathbb{R}^{2\times 2} = \mathcal{U} + \mathcal{V}$$

תהיי מטריצה כללית מסדר 2 על 2. אזי:

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ c & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

נבחין כי המחובר הראשון בסכום ב$\mathcal{U}$, וכי המחובר השני הוא ב$\mathcal{V}$, כרצוי. לכן:

$$\mathcal{U} + \mathcal{V} \subseteq \mathbb{R}^{2\times 2}$$

מצד שני, מכך ש $\mathcal{U}, \mathcal{V}$ תתי מרחבים של $\mathbb{R}^{2\times 2}$, גם הסכום שלהם הוא תת מרחב כלומר:

$$\mathcal{U} + \mathcal{V} \supseteq \mathbb{R}^{2\times 2}$$

מצד שני, נבחין כי הסכום אינו ישר שכן החיתוך אינו טריוואלי. לדוגמה:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{V} \cap \mathcal{U}$$

באופן שקול:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

אבל גם:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

כלומר ההצגה אינה יחידה.

10.2 צירופים לינאריים

תזכורת

יהא V מ"ו מעל $\mathbb{F}$, נאמר כי $v \in V$ הוא צירוף לינארי של $w_1, .., w_n \in V$ אם קיימים $a_1, ..., a_n \in \mathbb{F}$ כך ש:

$$v = a_1 w_1 + a_2 w_2 + ... + a_n w_n$$

דרך נוספת לכתוב זאת היא:

$$v = \sum_{i=1}^{n} a_i w_i$$

תרגיל 10.2.1.

בדקי האם:

$$w = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

צ"ל של:

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \ v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \ v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$$

מעל השדה $\mathbb{R}$.

פתרון:
נחפש $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ כך ש $w = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3$:

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 + \lambda_2 \\ \lambda_2 + 3\lambda_3 \\ \lambda_2 + 4\lambda_3 \\ \lambda_2 + 5\lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

אז יש לנו ממ"ל:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 5 & 4 \end{array}\right) \rightsquigarrow ... \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

לממ"ל הזה פתרון יחיד:

$$\lambda_1 = 2, \quad \lambda_2 = -1, \quad \lambda_3 = 1$$

כלומר w אכן צ"ל של v_1, v_2, v_3:

$$2\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\3\\4\\5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix}$$

תרגיל 10.2.2.

בדקי האם:

$$p(x)=x^3+2x^2+3$$

צ"ל של:

$$q_1(x)=x^2$$
$$q_2(x)=x^3+1$$
$$q_3(x)=x^3+x^2+x$$

מעל השדה $\mathbb{R}$.

<u>פתרון:</u>
נחפש $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ כך ש:

$$\lambda_1 q_1(x)+\lambda_2 q_2(x)+\lambda_3 q_3(x)=p(x)$$

אז:

$$x^3(\lambda_2+\lambda_3)+x^2(\lambda_1+\lambda_3)+x(\lambda_3)+(\lambda_2)=x^3+2x^2+3$$

כלומר:

$$\begin{cases}\lambda_2+\lambda_3=1\\ \lambda_1+\lambda_3=2\\ \lambda_3=0\\ \lambda_2=3\end{cases}$$

מהמשוואה הראשונה, השלישית ורביעית אנו כבר רואים שאין פתרון, כלומר $p(x)$ לא צ"ל של q_1, q_2, q_3.

תזכורת

למעשה, השאלה האם וקטור הוא צירוף לינארי של וקטורים אחרים (ואם כן, מי הם המקדמים) היא מציאת פתרון לממ"ל כפי שלמדנו בעבר. נראה זאת מפורשות עבור הוקטורים:

$$v:=\begin{pmatrix}v_1\\\vdots\\v_k\end{pmatrix},\quad w^1:=\begin{pmatrix}w_1^1\\\vdots\\w_k^1\end{pmatrix},\quad\dots\quad,w^n:=\begin{pmatrix}w_1^n\\\vdots\\w_k^n\end{pmatrix}$$

נרצה לשאול מתי v הוא צירוף לינארי של $w^1, ..., w^n$, כלומר מתי קיימות $\lambda^1, ..., \lambda^n$ כך ש:

$$v = \sum_{i=1}^{n} \lambda^1 w^i$$

ואם נכתוב זאת מפורשות, עבור אילו למדות מתקיים:

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ ... \\ v_k \end{pmatrix} = \lambda^1 \begin{pmatrix} w_1^1 \\ ... \\ w_k^1 \end{pmatrix} + ... + \lambda^n \begin{pmatrix} w_1^n \\ ... \\ w_k^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda^1 w_1^1 + ... + \lambda^n w_1^n \\ ... \\ \lambda^1 w_k^1 + ... + \lambda^n w_k^n \end{pmatrix}$$

כלומר:

$$\begin{cases} \lambda^1 w_1^1 + ... + \lambda^n w_1^n = v_1 \\ ... \\ \lambda^1 w_k^1 + ... + \lambda^n w_k^n = v_k \end{cases}$$

וזו מערכת משוואות לינארית במשתנים $\lambda^1, ..., \lambda^n$. לכן:

1. אם אין לה פתרון, לא ניתן להציג את v כצירוף לינארי של $w_1, ..., w_n$.
2. אם יש לה פתרון יחיד, ניתן להציג את v כצירוף לינארי, אבל רק בדרך אחת.
3. אם יש לה אינסוף פתרונות, אז ניתן להציג את v כצ"ל באינסוף דרכים שונות!

תרגיל 10.2.3.

עבור אילו ערכי $a \in \mathbb{R}$ הוקטור $\begin{pmatrix} a \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ צירוף לינארי של שורות המטריצה:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 0 \end{pmatrix}$$

<u>פתרון:</u>
נבחין כי שורות המטריצה מתאימים לוקטורים הבאים:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}$$

לכן נתרגם את השאלה (באמצעות התזכורת) לשאלה הבאה. מתי למערכת הבאה יש פתרון:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 2 & 5 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

כלומר, נדרג את המטריצה:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & a \\ 2 & 2 & 5 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

שלאחר דירוג נראת כמו:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & a \\ 0 & -2 & -3 & 1-2a \\ 0 & 0 & -\frac{9}{2} & -3a+\frac{7}{2} \end{pmatrix}$$

ולכן תמיד יש לה פתרון, כלומר הוקטור $\begin{pmatrix} a \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ תמיד צירוף לינארי של שורות המטריצה, בלי תלות בa.

10.3 מרחב הפרוש

תזכורת

יהיו $V \supset W = \{w_1, ..., w_n\}$, נסמן:

$$\text{span}_{\mathbb{F}}(W) = \text{span}_{\mathbb{F}}(w_1, ..., w_n) = \{a_1w_1 + a_2w_2 + ... + a_nw_n | a_1, ..., a_n \in \mathbb{F}\}$$

אם $\text{span}_{\mathbb{F}}(W) = V$ נאמר כי W <u>פורשת</u> את V.

תרגיל 10.3.1.

הוכיחי כי $W = \left\{ p(x) \in \mathbb{R}_{\leq 3}[x] \middle| \int_{-1}^{1} p(x)dx = 0 \right\}$ תת-מרחב של $R_{\leq 3}[x]$ ומצאי קבוצה פורשת.

<u>תזכורת:</u>

$$\int_{-1}^{1} x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}\Bigg|_{x=-1}^{x=1} = \frac{1^{n+1}}{n+1} - \frac{(-1)^{n+1}}{n+1}$$

<u>פתרון:</u>

ראשית נראה כי מדובר בתמ"ו, ברור כי פולינום האפס בW, יהיו $p(x), q(x) \in W$, אז:

$$\int_{-1}^{1} p(x) + q(x)dx = \int_{-1}^{1} p(x)dx + \int_{-1}^{1} q(x)dx = 0$$

ויהא $\lambda \in \mathbb{R}$, אז:

$$\int_{-1}^{1} \lambda p(x)dx = \lambda \int_{-1}^{1} p(x)dx = 0$$

נבדוק עבור פולינום כללי $p(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$ מתי $p(x) \in W$, ואכן:

$$\int_{-1}^{1} a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 dx = a_3\frac{x^4}{4}\Bigg|_{x=-1}^{x=1} + a_2\frac{x^3}{3}\Bigg|_{x=-1}^{x=1} + a_1\frac{x^2}{2}\Bigg|_{x=-1}^{x=1} + a_0x\Bigg|_{x=-1}^{x=1}$$

$$= a_2\frac{2}{3} + 2a_0 = 0$$

כלומר:

$$a_0 = -\frac{1}{3}a_2$$

נשים לב כי אין שום הגבלה על a_1, a_3, כלומר $p(x) \in W$ אמ"מ:

$$p(x) = sx^3 - \frac{1}{3}tx^2 + ux + t$$

לכל $s, t, u \in \mathbb{R}$, אז:

$$p(x) = sx^3 + t\left(1 - \frac{1}{3}x^2\right) + ux$$

כלומר הקבוצה:

$$p_1(x) = x^3$$

$$p_2(x) = 1 - \frac{1}{3}x^2$$

$$p_3(x) = x$$

פורשת את W.

תרגיל 10.3.2.

יהי $\mathcal{V}$ מרחב וקטורי מעל $\mathbb{R}$ ויהיו תתי קבוצות שלו:

$$S := \{w_1, ..., w_n\} \quad ; \quad T := \{u_1, ..., u_m\}$$

הוכיחי כי:

$$\text{span}(S) + \text{span}(T) = \text{span}(S \cup T)$$

פתרון:
נרצה להראות הכלה דו כיוונית.
יהי $x \in \text{span}(S \cup T)$. אז מהגדרת נפרש קיימים $\lambda_1, ..., \lambda_{n+m} \in \mathbb{R}$ כך ש:

$$x = \lambda_1 w_1 + ... + \lambda_n w_n + \lambda_{n+1} u_1 + ... + \lambda_{n+m} u_m = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i w_i + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j u_j$$

אבל, נבחין כי מהגדרת נפרש:

$$\sum_{i=1}^{n}\lambda_i w_i \in \text{span}(S) \quad \& \quad \sum_{j=1}^{m}\lambda_j u_j \in \text{span}(T)$$

כלומר מהגדרת סכום:

$$x \in \text{span}(S) + \text{span}(T)$$

כלומר סה"כ:

$$\text{span}(S) + \text{span}(T) \supseteq \text{span}(S \cup T)$$

מצד שני, יהי $x \in \text{span}(S) + \text{span}(T)$. לכן קיימים:

$$x = s + t \quad \text{such that} \quad s \in \text{span}(S) \quad ; \quad t \in \text{span}(T)$$

כלומר, מהגדרה קיימות $\lambda_1, ..., \lambda_n \in \mathbb{R},\ \mu_1, ..., \mu_m \in \mathbb{R}$ כך ש:

$$s = \sum_{i=1}^{n}\lambda_i w_i \quad ; \quad t = \sum_{j=1}^{m}\mu_j u_i$$

לכן:

$$x = \sum_{i=1}^{n}\lambda_i w_i + \sum_{j=1}^{m}\mu_j u_i \in \text{span}(S \cup T)$$

כלומר:

$$\text{span}(S) + \text{span}(T) \subseteq \text{span}(S \cup T)$$

סה"כ:

$$\text{span}(S) + \text{span}(T) = \text{span}(S \cup T)$$

הערה

שימי ♡, זה לא חייב להיות סכום ישר!

10.4 מרחבי שורות ועמודות של מטריצות

תזכורת

תהיי $A \in \mathbb{F}^{m \times n}$ מטריצה מסדר $a \times m$, נסמן:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \ddots & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

אם נסמן ב $R_1, ..., R_m$ את שורות A, וב$C_1, ..., C_n$ את עמודות A, אז נגדיר את תתי המרחבים:

$$\text{Row}(A) = \text{span}(R_1, .., R_m) = \text{span}\left(\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \end{pmatrix}, ..., \begin{pmatrix} a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}\right) \subset \mathbb{F}^n$$

$$\text{Col}(A) = \text{span}(C_1, ..., C_n) = \text{span}\left(\begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}\right) \subset \mathbb{F}^m$$

עובדה חשובה שראינו בהרצאה היא שבמהלך תהליך הדירוג, $\text{Row}(A)$ נשמרת.

תרגיל 10.4.1.

תהא $A \in \mathbb{F}^{m \times n}$, ותהא B שקולת שורות לA, כלומר בעזרת דירוג ניתן להגיע מA לB, הוכיחו או הפריכו:

$$\text{Col}(A) = \text{Col}(B)$$

<u>פתרון:</u>

נראה כי עובדה זו לא נכונה, בניגוד למקרה של Row.

נשים לב כי:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

אבל:

$$\text{Col}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \text{span}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Col}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \text{span}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

וכמובן ש:

$$\text{span}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \neq \text{span}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

תזכורת

מרחב השורות ומרחב העמודות מאפשר לנו ליצור דרך להשוות בין שני מרחבי פרוש של קבוצות. כדי לגלות האם הספן שווה, נוכל לחשב אותו ישירות או לחילופין לכתוב את הוקטורים הללו כשורות של מטריצה (ולהוסיף שורות אפסים אם יש יותר משתנים ממשוואות), ולדרג את 2 המטריצות לצורה הקנונית. מכך שהצורה המדורגת היא יחידה, הן שקולות שורה ולכן מרחבי השורות שלהם שווים, כלומר הספאן המקורי. נדגים זאת בתרגיל הבא:

תרגיל 10.4.2.

הוכיחי כי לא מתקיים:

$$\text{span}\left\{\begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix},\begin{pmatrix}3\\3\\2\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\3\\2\\0\end{pmatrix}\right\}=\text{span}\left\{\begin{pmatrix}-2\\-4\\-6\\-8\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\1\\-1\\-3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}8\\12\\8\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}6\\8\\2\\-8\end{pmatrix}\right\}$$

<u>פתרון:</u>
נעביר כל אחת מהקבוצות היוצרות לשורות של מטריצה ונדרג:

$$\begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&3&2&1\\2&3&2&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

ואת המטריצה השנייה:

$$\begin{pmatrix}-2&2&8&6\\-4&1&12&8\\-6&-1&8&2\\-8&-3&0&-8\end{pmatrix}$$

ונבחין כי לשתיהן יש צורות מדורגות קנונית שונות:

$$\begin{pmatrix}1&0&0&1\\0&1&0&-\frac{12}{5}\\0&0&1&\frac{13}{5}\\0&0&0&0\end{pmatrix}\neq\begin{pmatrix}1&0&0&1\\0&1&0&0\\0&0&1&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

כלומר אחד הפרושים הינו:

$$\text{span}\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\\-\frac{12}{5}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\1\\\frac{13}{5}\end{pmatrix}\right\}$$

והשני:

$$\text{span}\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\1\\1\end{pmatrix}\right\}$$

ונבחין כי $\begin{pmatrix}0\\0\\1\\1\end{pmatrix}$ רק בשני, לכן הפרושים אינם שווים.

10.5 תלות ואי-תלות לינארית

תזכורת

יהי V מ"ו מעל שדה $\mathbb{F}$. הוקטורים $v_1, ..., v_n$ (או לחילופין הקבוצה $T = \{v_1, ...v_n\}$) נקראת תלויה לינארית אם קיימים $\alpha_1, ...\alpha_n \in \mathbb{F}$ לא כולם אפסים כך ש:

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_1 v_1 = \alpha_1 v_1 + ... + \alpha_n v_n = 0$$

הוקטורים $v_1, ..., v_n$ (או לחילופין הקבוצה T) יקראו בלתי תלויים לינארית אם לכל $\alpha_1, ..., \alpha_n \in \mathbb{F}$ כך ש:

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_1 v_1 = \alpha_1 v_1 + ... + \alpha_n v_n = 0$$

בהכרח מתקיים ש $\alpha_1 = ... = \alpha_n = 0$.
דרך נוספת לחשוב על אי תלות לינארית, היא שהפתרון היחיד למערכת הלינארית שבודקת האם וקטור האפס הוא צירוף לינארי של הוקטורים הנתונים הוא הפתרון הטריוואלי. במקרה זה, נאמר כי הוקטורים בת"ל. אחרת, קיים פתרון שאינו טריוואלי והמשתנים בפתרון הזה יהיו המקדמים של הוקטורים בצירוף וקטורים שאינו טריוואלי.

תרגיל 10.5.1.

עבור אילו ערכי x הקבוצה הבאה תלויה לינארית מעל $\mathbb{R}$?

$$\left\{ \begin{pmatrix}2\\0\\x\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\2\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}x\\1\\0\\0\end{pmatrix} \right\}$$

פתרון:
נשתמש בהבחנה 10.2 ונרצה למצוא מתי למערכת ההומוגנית המתאימה לקבוצה יש יותר מהפתרון הטריוואלי. לכן, נדרג את המטריצה הבאה, ולפי הצורה המדורגת שלה נבין מתי הקבוצה תלויה או

בלתי תלויה לינארית.

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & x \\ 0 & 2 & 1 \\ x & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & x \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & x \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & x \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & x \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

שימו ♡, במעבר הראשון הנחנו ש $x \neq 0$, לכן אנחנו צריכות לבדוק גם את המקרה שבו $x = 0$:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

כלומר בכל מקרה המטריצה המתאימה היא שקולת שורה ליחידה ולכן לכל $x \in \mathbb{R}$ הקבוצה בת"ל.

טענה 10.5.2.

יהא V מ"ו מעל $\mathbb{F}$, $S = \{v_1, ...v_n\} \subset V$ תת קבוצה שלו, אם $0 \in S$ אז היא תלויה לינארית.

<u>הוכחה:</u>

בה"כ $v_1 = 0$. נבחר מקדמים באופן הבא:

$$\alpha_1 = 1, \qquad \forall 1 \leq i \leq n, \qquad \alpha_i = 0$$

אזי מתקיים:

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_1 v_1 = \alpha_1 v_1 + ... + \alpha_n v_n = \sum_{i=1}^{n} \alpha_1 v_1 = 1v_1 + 0v_2 + ... + 0v_n = v_1 = 0$$

כלומר, מצאנו מקדמים שלא כולם אפסים כך שהצירוף של איברי S עימם הוא 0, ולכן S תלויה לינארית, כרצוי.

תרגיל בית חמישי

11.1 תרגילים להגשה

תרגיל 11.1.1.

יהיו $W_2 = \text{span}\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right)$, $W_1 = \text{span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$, הוכיחי כי:

$$W_1 \oplus W_2 = \mathbb{R}^2$$

אמ"מ $y \neq 0$.

תרגיל 11.1.2.

נסמן $V := \mathbb{C}^3$ מ"ו מעל $\mathbb{C}$ ויהיו $V_1, .., V_4$ תתי המרחבים הבאים שלו:

$$V_1 := \left\{\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} \mid z_2 = z_3 = 0\right\} \quad \& \quad V_2 := \left\{\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} \mid z_1 = z_3 = 0\right\}$$

$$V_3 := \left\{\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} \mid z_3 = 0\right\} \quad \& \quad V_4 := \left\{\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} \mid z_1 = 0\right\}$$

1. האם $V_1 \oplus V_2 = V$?
2. האם $V_3 \oplus V_4 = V$?

תרגיל 11.1.3.

יהיו הוקטורים הבאים:

$$v_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ \alpha \end{pmatrix} \quad v_2 := \begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \quad v_3 := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} \quad u := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \beta \end{pmatrix}$$

מצאו עבור אילו $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ הוקטור u צירוף לינארי של v_1, v_2, v_3.

הערה

תזכורת: כאשר צריך להוכיח שסכום של זוג קבוצות הוא שווה למרחב וקטורי, יש להוכיח קודם כל שהן תתי מרחבים שלו. זאת אומרת שיש להוכיח בשאלות 1 ו2 שהקבוצות $W_1, W_2, V_1, ..., V_4$ הם תתי מרחבים של המרחבים המתאימים.

11.2 תרגילים לא להגשה

תרגיל 11.2.1.

יהא W תמ"ו של V, ותהא $S = \{w_1, ..., w_n\} \subset W$.

1. הוכיחי כי $\text{span}(S) \subset W$.
2. הוכיחי כי $\text{span}(S)$ תמ"ו של W.

פתרון:
נשים לב כי W, בתת-מרחב וקטורי סגור לחיבור וכפל בסקלר, אז משום שכל $S \subset W$, אז גם כל צ"ל של אברי S, כלומר

$$\text{span}(S) \subset W$$

נראה כי $\text{span}(S)$ תמ"ו.

1. ברור כי $0 \in \text{span}(S)$.
2. יהיו $v_1, v_2 \in \text{span}(S)$, כלומר:
$$v_1 = \lambda_1 w_1 + ... + \lambda_n w_n, v_2 = \eta_1 w_1 + ... + \eta_n w_n$$
אז:
$$v_1 + v_2 = (\lambda_1 + \eta_1) w_1 + ... + (\lambda_n + \eta_n) w_n \in \text{span}(S)$$
3. אם $\eta \in \mathbb{F}, v = v_1 = \lambda_1 w_1 + ... + \lambda_n w_n \in \text{span}(S)$ אז:
$$\eta v = \eta\lambda_1 w_1 + ... + \eta\lambda_n w_n \in \text{span}(S)$$

תרגיל 11.2.2.

בדקו האם הקבוצה $\{x-1, x+1, x^2-1\} \subset \mathbb{R}[x]$ שבמרחב הפולינומים מעל $\mathbb{R}$ תלויה לינארית.

פתרון:
נניח כי קיימים $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}$ כך ש:

$$a_1(x-1) + a_2(x+1) + a_3(x^2-1) = 0$$

כלומר:

$$a_3x^2 + (a_1+a_2)x + (a_2-a_1-a_3) = a_1x - a_1 + a_2x + a_2 + a_3x^2 - a_3 = 0$$

פולינומים שווים אם המקדמים שלהם שווים, לכן:

$$\begin{cases} a_3 = 0 \\ a_1 + a_2 = 0 \\ a_2 - a_1 - a_3 = 0 \end{cases}$$

נרשום את המערכת בצורה מטריציונית:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right)$$

אם נדרג נקבל את המטריצה:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

לכן הפתרון היחיד למערכת הוא $a_1 = a_2 = a_3 = 0$, כלומר הקבוצה בלתי תלויה לינארית.

תרגיל 11.2.3.

תהא $S = \{(1,i)(i,-1)\} \subset \mathbb{C}^2$. הראו כי:

1. הקבוצה תלויה לינארית ב$\mathbb{C}^2$ כמרחב וקטורי מעל $\mathbb{C}$.
2. הקבוצה בלתי תלויה לינארית ב$\mathbb{C}^2$ כמרחב וקטורי מעל $\mathbb{R}$.

פתרון:

1. נניח כי השדה הוא $\mathbb{C}$. אזי נרצה למצוא $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ כך ש:

$$z_1(1,i) + z_2(i,-1) = (0,0)$$

נניח שקיימים כאלו. אזי מטריצת המקדמים היא:

$$\begin{pmatrix} 1 & i \\ i & -1 \end{pmatrix}$$

ולאחר דירוג נקבל את המטריצה:

$$\begin{pmatrix} 1 & i \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

זוהי מטריצת מקדמים של מערכת הומוגנית עם שורת אפסים, כלומר יש אינסוף פתרונות למערכת ובפרט אחד לא טריוואלי (פתרון שלא כולו אפסים), והוא יעיד שהקבוצה תלויה לינארית.

2. נניח כעת כי השדה הוא $\mathbb{R}$. אזי נרצה למצוא $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ כך ש:

$$(a_1 + ia_2, a_1 i - a_2) = a_1(1,i) + a_2(i,-1)(a_1 + ia_2, ia_1 - a_2) = (0,0)$$

אבל מספרים מרוכבים שווים אם החלקים הממשים והמדומים שלהם שווים, כלומר:

$$ia_1 - a_2 = 0 \iff a_1 = a_2 = 0$$

לכן, $a_1 = a_2 = 0$ והקבוצה בלתי תלויה לינארית.

תרגול שביעי

12.1 תלות לינארית - המשך

תרגיל 12.1.1.

בדקו האם הקבוצה הבאה תלויה לינארית:

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix}$$

מעל השדה $\mathbb{R}$.

פתרון:
נעביר את הוקטורים להיות שורות מטריצה, ונדרג אותה:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \\ -3 & 2 \\ 1 & -4 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

מכך שיש שורות אפסים, ניתן להסיק כי חלק מהשורות (כלומר הוקטורים) היו מלכתחילה תלויים לינארית באחרים.

הערה

טעות נפוצה היא לחשוב שאם יש לי קבוצה תלויה לינארית, אז כל אחד מהוקטורים הוא צירוף לינארי של האחרים. למעשה, אנו יודעים כי קיים כזה, אך לא בהכרח הראשון. לדוגמה:

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ניתן להציג את הוקטור האחרון כצירוף לינארי של הוקטור הראשון והשני, אך לא להיפך.

תזכורת

דרך לגלות מי הם הוקטורים שתלויים לינארית באחרים היא לכתוב אותם כעמודות מטריצה, לדרג אותה ואז העמודות עם האיברים הפותחים (מתאים למשתנים התלויים) יהיו אלו שתלויות בעמודות עם המשתנים החופשיים, כלומר איפה שיש משתנה חופשי יהיה צ"ל לינארי של העמודות האחרות (כיוון שניתן לקבוע את המקדם שלו להיות 1 ואת השאר המשתנים החופשיים להיות 0).

אכן, עבור הוקטורים מדוגמה הקודמת אם נשים אותם כעמודות מטריצה נקבל:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

ואכן הוקטור שמתאים לעמודה האחרונה (ולמשתנה החופשי) הוא צ"ל של 2 העמודות, אבל העמודות הראשונות אינן צ"ל של שאר העמודות.

תרגיל 12.1.2.

תהא $S = \{(1,\sqrt{2})(\sqrt{2},2)\} \subset \mathbb{R}^2$. הראו כי:

1. הקבוצה תלויה לינארית ב$\mathbb{R}^2$ כמרחב וקטורי מעל $\mathbb{R}$.
2. הקבוצה בלתי תלויה לינארית ב$\mathbb{R}^2$ כמרחב וקטורי מעל $\mathbb{Q}$.

<u>פתרון:</u>

1. מעל $\mathbb{R}$, נשים לב כי:

$$\sqrt{2}(1,\sqrt{2}) + (-1)(\sqrt{2},2) = (0,0)$$

לכן הקבוצה ת"ל.

2. נבדוק האם הקבוצה בת"ל מעל $\mathbb{Q}$, יהיו $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{Q}$ כך ש:

$$\lambda_1(1,\sqrt{2}) + \lambda_2(\sqrt{2},2) = (0,0)$$

כלומר:

$$(\lambda_1 + \sqrt{2}\lambda_2, \sqrt{2}\lambda_1 + 2\lambda_2) = (0,0)$$

בפרט:

$$\lambda_1 + \sqrt{2}\lambda_2 = 0$$

אם $\lambda_2 = 0$, נקבל $\lambda_1 = 0$, אבל אם $\lambda_2 \neq 0$, נקבל:

$$\sqrt{2} = -\frac{\lambda_1}{\lambda_2} \in \mathbb{Q}$$

שזו כמובן סתירה כי $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.
כלומר, בהכרח$\lambda_1 = \lambda_2 = 0$, ולכן הקבוצה בת"ל.

טענה 12.1.3.

יהא V מ"ו מעל $\mathbb{F}$. הוכיחי כי $S=\{v_1,v_2\}\subset V$ תלויה לינארית אמ"מ איבריה כפולה בסקלר אחד של השני.

הוכחה:
כלומר, נראה ש S ת"ל אמ"מ $v_1=\lambda v_2$ עבור $\lambda\in\mathbb{F}$ כלשהי.
כיוון ראשון נניח כי הקבוצה ת"ל. אזי קיימים λ_1,λ_2 לא כולם אפסים (בה"כ $\lambda_1\neq 0$) כך ש:

$$\lambda_1v_1+\lambda_2v_2=0$$

כלומר:

$$v_1=-\frac{\lambda_1}{\lambda_2}v_2$$

ולכן הם כפולה בסקלר אחד של השני.

כיוון שני נניח כי הם כפולה בסקלר אחד של השני, כלומר $v_1=\alpha v_2$. אזי:

$$v_1-\alpha v_2=0$$

עבור $\lambda_1=1,\lambda_2=-\alpha$, מתקיים שהצירוף הלינארי של איברי S עימם הוא 0, כלומר S תלויה לינארית.

הערה

הטענה הבאה היא אהובה, חשובה ומאוד שימושית!

טענה 12.1.4.

יהיו W, U_1, U_2 תמ"ו של V. הוכיחו או הפריכו:

1. אם:
$$W + U_1 = W + U_2$$
אז $U_1 = U_2$

2. אם:
$$W \oplus U_1 = W \oplus U_2$$
אז $U_1 = U_2$

<u>הוכחה:</u>

1. נראה דוגמא נגדית, אם $V = \mathbb{R}^2$, $W = \mathbb{R}^2, U_1 = \mathbb{R}^2, U_2 = \text{span}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$, אז באמת:
$$\underbrace{\mathbb{R}^2}_{W} + \underbrace{\mathbb{R}^2}_{U_1} = \underbrace{\mathbb{R}^2}_{W} + \underbrace{\text{span}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}}_{U_1}$$
אבל כמובן:
$$\mathbb{R}^2 \neq \text{span}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$$

2. שוב נראה דוגמא נגדית, נגדיר:
$$W = \text{span}\left(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right), \quad U_1 = \text{span}\left(\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right), \quad U_2 = \text{span}\left(\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right)$$
אז בדיקה מהירה תראה כי $W \oplus U_1 = W \oplus U_2 = \mathbb{R}^2$, אבל $U_1 \neq U_2$, כי למשל $\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \in U_2$, אבל $\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \notin U_1$.

12.2 בסיס ומימד

תזכורת

יהא V מ"ו, קבוצה:

$$B = \{v_1, ..., v_n\}$$

קבוצה שהיא גם פורשת את V וגם בת"ל נקראת בסיס של V.
אם V נוצרת סופית אז קיים בסיס סופי, ולמספר האיברים בו נקרא המימד של V ונסמן:

$$|B| = n = \dim V$$

טענה (ללא הוכחה) 12.2.1.

מספר תכונות חשובות.

1. אם B_1, B_2 זוג בסיסים של V, אז:
$$|B_1| = |B_2|$$
2. אם $W = \{w_1, ..., w_m\} \subset V$, בת"ל, אז:
$$|W| = m \leq \dim(V)$$
3. אם $W = \{w_1, ..., w_m\} \subset V$, פורשת את V, כלומר $V = \text{span}(W)$, אז:
$$|W| = m \geq \dim(V)$$
4. אם $W = \{w_1, ..., w_m\} \subset V$, ומתקיים $\dim(V) = |W|$, ו־W או פורשת את V, או בת"ל אז W בסיס של V.

תרגיל 12.2.2.

הוכיחי כי:

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

בסיס של $\mathbb{R}^3$.

פתרון:
נשים לב כי עלינו להוכיח 2 דברים, אי-תלות ופרישה, אבל משום ש $|W| = 3 = \dim \mathbb{R}^3$, אז אם W או בת"ל או פורשת את $\mathbb{R}^3$, אז היא אוטומטית מקיימת את 2 התכונות.
נוכיח אי-תלות, יהיו $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ כך ש:

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 = 0$$

אז:

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 + \lambda_2 + 2\lambda_3 \\ 2\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 \\ 3\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

נדרג את המטריצה המתאימה:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow \ldots \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

למערכת הזאת יש פתרון יחיד, $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$ וסיימנו.

תרגיל 12.2.3.

הוכיחו כי הקבוצה:

$$M = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \middle| a + b + c + d = 0 \right\}$$

תמ"ו של $\mathbb{R}^{2\times 2}$ ומצאו בסיס עבורה.

<u>פתרון:</u>
ראשית נוכיח כי מדובר בתמ"ו:

- ברור כי $0 \in M$.
- יהיו $M_1 = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix}, M_2 = \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix} \in M$, אז:

$$M_1 + M_2 = \begin{pmatrix} a_1 + a_2 & b_1 + b_2 \\ c_2 + c_2 & d_1 + d_2 \end{pmatrix}$$

ומתקיים:

$$a_1 + a_2 + b_2 + b_2 + c_1 + c_2 + d_1 + d_2 = (a_1 + b_1 + c_1 + d_1) + (a_2 + b_2 + c_2 + d_2) = 0$$

- אם $\lambda \in \mathbb{R}, M_1 = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix} \in M$ אז $\lambda M_1 = \begin{pmatrix} \lambda a_1 & \lambda b_1 \\ \lambda c_1 & \lambda d_1 \end{pmatrix}$ ומתקיים:

$$\lambda a_1 + \lambda b_1 + \lambda c_1 + \lambda d_1 = \lambda(a_1 + b_1 + c_1 + d_1) = 0$$

אז $\lambda M_1 \in M$.

כעט אנו יודעים כי מדובר בתמ"ו של $\mathbb{R}^{2\times 2}$, אנו יודעים כי $M \neq \mathbb{R}^{2\times 2}$, אז $\dim M < 4$.
נחפש איברים בת"ל בM, אז ניחוש טוב הוא:

$$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, M_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, M_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

ברור כי $M_1, M_2, M_3 \in M$, אז אם נראה כי הם בת"ל אז אוטומטית נקבל כי הם בסיס, ואכן:

$$\lambda_1 M_1 + \lambda_2 M_1 + \lambda_3 M_3 = \begin{pmatrix} \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 & -\lambda_1 \\ -\lambda_2 & -\lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \iff \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$$

תרגיל .12.2.4

הוכיחי כי $\mathbb{R}[x]$ אינה נוצרת סופית.

פתרון:
נניח בשלילה כי $\mathbb{R}[x]$ נוצרת סופית, כלומר קיים ל$\mathbb{R}[x]$ בסיס:

$$B = \{p_1(x), ..., p_n(x)\}$$

נסמן:

$$M = \max_{k=1}^{n} \deg(p_k(x))$$

אז x^{M+1} לא צ"ל של אברי B, בשלילה לכך ש B פורשת את $\mathbb{R}[x]$.

תרגיל .12.2.5

(תרגיל ממבחן עבר - מועד א' ינואר 2022)
תהא:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ויהיו:

$$U = \left\{X \in \mathbb{R}^{3\times3} | AX - XA = 0\right\}$$

$$V = \left\{Y \in \mathbb{R}^{3\times3} | AY + YA = 0\right\}$$

תמ"ו של $\mathbb{R}^{3\times3}$ (איו צורך להוכיח כי מדובר בתמ"ו), מצאו בסיס ומימד ל $U \cap V$.

פתרון:
תהא $Z \in U \cap V$, אז:

$$\begin{cases} AZ - ZA = 0 \\ AZ + ZA = 0 \end{cases} \Rightarrow ZA = AZ = 0$$

תהא $M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$, אז:

$$AM = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 5d & 5e & 5f \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$MA = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 5b & 0 \\ d & 5e & 0 \\ g & 5h & 0 \end{pmatrix}$$

כלומר, $a = b = c = d = e = f = g = h = 0 \iff MA = AM = 0$, אז:

$$U \cap V = \text{span}\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$$

אז $\dim(U \cap V) = 1$, והמטריצה היחידה בspan היא הבסיס למרחב.

12.3 השלמה לבסיס

תזכורת

יהא V מ"ו ממימד n, ותהא $W = \{w_1, .., w_k\}$ קבוצה בת"ל, אז בהכרח קיימים $U = \{u_{k+1}, ..., u_n\}$ כך ש:

$$B = W \cup U = \{w_1, .., w_k, u_{k+1}, ..., u_n\}$$

בסיס של V.
כלומר כל קבוצה בת"ל ניתן להשלים לבסיס.

תרגיל 12.3.1.

מצאו בסיס B ל$\mathbb{C}^2$ כמ"ו מעל $\mathbb{R}$ המכיל את:

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1+i \\ 0 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 1-i \\ 0 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ i \end{pmatrix}$$

<u>פתרון:</u>

אנו יודעים כי מימד $\mathbb{C}^2$ כמ"ו מעל $\mathbb{R}$ הוא 4, ולכן מספיק למצוא וקטור יחיד, v_4 כך ש $v_1, ..., v_4$ בת"ל

נסיים. ואכן ננחש את $v_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ואכן:

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 + \lambda_4 v_4 = \begin{pmatrix} \lambda_1(1+i) + \lambda_2(1-i) \\ i\lambda_3 + \lambda_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 + \lambda_2 + i(\lambda_1 - \lambda_2) \\ i\lambda_3 + \lambda_4 \end{pmatrix} = 0$$

כלומר:

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ \lambda_1 - \lambda_2 = 0 \\ \lambda_3 = 0 \\ \lambda_4 = 0 \end{cases} \iff \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 0$$

תרגיל 12.3.2.

השלימו את:

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, v_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

לבסיס של $\mathbb{R}^5$.

פתרון:
עכשיו לנחש יהיה קצת קשה, אז נעשה את הדבר הבא:

1. נבדוק כי הקבוצה בת"ל (נדלג על כך בתרגיל הזה).
2. נרשום את $v_1, ..., v_4$ כשורות מטריצה A.
3. נדרג את המטריצה למטרציה B
4. נקבל בסיס חדש למרחב השורות, שאותו קל יותר להשלים לבסיס של $\mathbb{R}^5$.
5. נשים לב כי $\text{Row}(A) = \text{Row}(B)$, אז ההשלמה לבסיס של $\text{Row}(B)$ תהווה את אותה השלמה של $\text{Row}(A)$ אותה אנו מחפשים.

אז:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

כלומר, המרחב הנפרש על ידי $v_1, ..., v_4$ הוא אותו מרחב שנפרש על ידי:

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, u_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, u_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

וזאת קבוצה שקל להשלים לבסיס עם:

$$u_5 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

אז בסיס ל-$\mathbb{R}^5$ הוא:

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix},\ v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix},\ v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix},\ v_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\ u_5 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

תרגיל בית שש

13.1 תרגילים להגשה

1. יהא $V=\mathbb{R}^4$, $v_4=\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix}$, $v_3=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\-1\end{pmatrix}$, $v_2=\begin{pmatrix}1\\1\\1\\2\end{pmatrix}$, $v_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}$, נסמן $S=(v_1,v_2,v_3,v_4)$, האם S בסיס ל V? אם כן הוכיחו זאת, אם לא מצאו תת-קבוצה $\tilde{S}\subset S$ בעלת 3 איברים, אותה ניתן להשלים לבסיס, ומצאו השלמה עבורה. כמה בחירות שונות יש ל $\tilde{S}$? הוכיחו זאת.

2. מצאו בסיס ומימד לתמ"ו (אין צורך להוכיח כי הוא אכן תמ"ו):

$$W=\{p\in\mathbb{R}_{\text{deg}\leq 3}|x^2p''(x)-4xp'(x)+6p(x)=0\}$$

3. יהא V מ"ו ממימד $n\geq 2$, עם זוג בסיסים, $B_1=(v_1,...,v_n),B_2=(w_1,...,w_n)$, הוכיחו או הפריכו, (נמקו!)

(א) $B=(v_1,w_2,...,w_k,v_{k+1},...)$ בהכרח בסיס של V.

(ב) בהכרח קיימים $v\in B_1,w\in B_2$ כך שהקבוצה (v,w) בת"ל.

(ג) הקבוצה $B=(v_1-w_1,...,v_1-w_n)$ בהכרח בסיס של V.

13.2 תרגילים לא להגשה

הערה

מרחבים ממימד אינסופי לא בחומר הקורס (מעבר להכרתם), אך עדיין כל סעיף בשאלה זאת נוכל לפתור עם כלים של הקורס.

תהא הקבוצה,

$$C(\mathbb{R})=\{(a_n)_{n=1}^{\infty}|\forall n,a_n\in\mathbb{R}\}$$

קבוצת הסדרות הממשיות שראינו בחדו"א, נגדיר את הפעלות:

$$(a_n)_{n=1}^{\infty}+(b_n)_{n=1}^{\infty}=(a_n+b_n)_{n=1}^{\infty}$$

$$\lambda(a_n)_{n=1}^{\infty}=(\lambda a_n)_{n=1}^{\infty}$$

עבור $(a_n)_{n=1}^{\infty},(b_n)_{n=1}^{\infty}\in C(\mathbb{R}),\lambda\in\mathbb{R}$. נקבל מרחב וקטורי מעל $\mathbb{R}$ (אין צורך להוכיח זאת).

1. (א) הוכיחו כי הקבוצה:
$$C_0(\mathbb{R}) = \left\{(a_n)_{n=1}^{\infty} \in C(\mathbb{R}) | \lim_{n\to\infty} a_n = 0\right\}$$
תמ"ו של $C(\mathbb{R})$.

(ב) נגדיר את הוקטורים:
$$e_1 = (1, 0, ..., 0, ...)$$
$$e_2 = (0, 1, 0..., 0, ...)$$
$$e_3 = (0, 0, 1, 0, ..., 0, ...)$$
$$e_4 = (0, 0, 0, 1, 0, ..., 0, ...)$$
וכו', ועבור $N \in \mathbb{N}$, נגדיר:
$$S_N = (e_1, ..., e_N)$$
הראו כי S_N בת"ל (לכל N).

(ג) הראו כי לכל N, הקבוצה S_N אינה פורשת את $C_0(\mathbb{R})$.

(ד) הסיקו כי $C_0(\mathbb{R})$ לא ממימד סופי.

(ה) הסיקו כי $C(\mathbb{R})$ לא ממימד סופי.

2. (א) נסמן $A(\mathbb{R})$ את אוסף הסדרות החשבוניות כלומר אוסף הסדרות המקיימות:
$$\exists a, d \in \mathbb{R}, \qquad \forall n \geq 0, a_n = a + nd$$
הוכיחו כי $A(\mathbb{R})$ תמ"ו.

(ב) הוכיחו כי:
$$f_1 = (1, 1, ..., 1, ...)$$
$$f_2 = (0, 1, 2, 3, 4, ...)$$
בסיס של $A(\mathbb{R})$.

13.3 פתרונות לתרגילים שלא להגשה

1. (א) ראשית, וקטור האפס של המרחב הוא הסדרה הקבועה 0 שאכן מתכנסת לאפס, כלומר $\vec{0} \in C_0(\mathbb{R})$, יהיו $(a_n)_{n=0}^{\infty}, (b_n)_{n=0}^{\infty} \in C_0(\mathbb{R}), \lambda \in 0$, מארתמתיקה של גבולות מתקיים:
$$\lim_{n\to\infty} a_n + b_n = 0, \qquad \lim_{n\to\infty} \lambda a_n = \lambda \cdot 0 = 0$$
ולכן $(a_n)_{n=0}^{\infty} + (b_n)_{n=0}^{\infty} \in C_0(\mathbb{R})$ וגם, $\lambda(a_n)_{n=0}^{\infty} \in C_0(\mathbb{R})$, ולכן $C_0(\mathbb{R})$ מ"ו.

(ב) תהא $N \in \mathbb{N}$, נניח כי קיימים $\lambda_1, ..., \lambda_N$ כך ש:
$$\lambda_1 e_1 + ... + \lambda_N e_N = 0$$
אבל, נשים לב כי $\lambda_1 e_1 + ... + \lambda_N e_N$ זאת הסדרה $(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_N, 0, ..., 0, ...)$ אבל, אם היא שווה לוקטור האפס, בהכרח $\lambda_1 = \lambda_2 = ... = \lambda_N = 0$, ולכן הקבוצה בת"ל.

(ג) נשים לב כי אם $(c_n)_{n=0}^{\infty} \in \text{span}(e_1, ..., e_N)$, אז בדומה לחישוב בסעיף הקודם נקבל כי $c_{N+1} = 0$, אז למשל $e_{N+1} \notin \text{span}(S_N)$ ולכן הקבוצה לא פורשת את $C_0(\mathbb{R})$.

(ד) נניח בשלילה כי $\dim(C_0(\mathbb{R})) = k \in \mathbb{N}$, אז הקיום של S_{k+1} כקבוצה בת"ל עם $k+1$ איברים מהווה סתירה.

(ה) בדומה בסעיף הקודם, היום ו $C_0(\mathbb{R})$ תמ"ו של $C(\mathbb{R})$, הקבוצה S_{k+1} בת"ל, ומכאן הנימוק זהה לזה של הסעיף הקודם.

2. (א) נשים לב כי הסדרה הקבועה אפס הינה סדרה חשבונית, יהיו זוג סדרות חשבוניות:

$$A = (a, a+d, a+2d, a+3d, ...), \qquad B = (b, b+c, b+2c, b+3c, ...)$$

עבור $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. וסקלר $\lambda \in \mathbb{R}$, נשים לב כי זוג הסדרות הבאות:

$$A + B = ((a+b) + (c+d), (a+b) + 2(c+d), (a+b) + 3(c+d), ...)$$

$$\lambda A = (\lambda a, \lambda a + \lambda d, \lambda a + 2(\lambda d), \lambda a + 3(\lambda d), ...)$$

גם חשבוניות, ולכן $A(\mathbb{R})$ תמ"ו.

(ב) ברור כי f_1, f_2 לא כפל בסקלר אחד של השני, ולכן הקבוצה $B = (f_1, f_2)$ בת"ל, נשים לב כי סדרה חשבונית כללית מקיימת:

$$A = (a, a+d, a+2d, a+3d, ...) = af_1 + df_2$$

כלומר, הקבוצה B גם פורשת את $A(\mathbb{R})$ ולכן בסיס.

תרגול שמיני

14.1 השלמה לבסיס (חזרה)

תזכורת

יהא V מ"ו ממימד n, ותהא $W = \{w_1, .., w_k\}$ קבוצה בת"ל, אז בהכרח קיימים $U = \{u_{k+1}, ..., u_n\}$ כך ש:

$$B = W \cup U = \{w_1, .., w_k, u_{k+1}, ..., u_n\}$$

בסיס של V.
כלומר כל קבוצה בת"ל ניתן להשלים לבסיס.

תרגיל 14.1.1.

מצאו בסיס B ל$\mathbb{C}^2$ כמ"ו מעל $\mathbb{R}$ המכיל את:

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1+i \\ 0 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 1-i \\ 0 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ i \end{pmatrix}$$

פתרון:

אנו יודעים כי מימד $\mathbb{C}^2$ כמ"ו מעל $\mathbb{R}$ הוא 4, ולכן מספיק למצוא וקטור יחיד, v_4 כך ש $v_1, ..., v_4$ בת"ל נסיים. ואכן ננחש את $v_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ואכן:

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 + \lambda_4 v_4 = \begin{pmatrix} \lambda_1(1+i) + \lambda_2(1-i) \\ i\lambda_3 + \lambda_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 + \lambda_2 + i(\lambda_1 - \lambda_2) \\ i\lambda_3 + \lambda_4 \end{pmatrix} = 0$$

כלומר:

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ \lambda_1 - \lambda_2 = 0 \\ \lambda_3 = 0 \\ \lambda_4 = 0 \end{cases} \iff \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 0$$

תרגיל 14.1.2.

השלימו את:

$$v_1=\begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\\5\end{pmatrix},v_2=\begin{pmatrix}2\\3\\4\\5\\6\end{pmatrix},v_3=\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\\2\end{pmatrix},v_4=\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\\0\end{pmatrix}$$

לבסיס של $\mathbb{R}^5$.

<u>פתרון:</u>
עכשיו לנחש יהיה קצת קשה, אז נעשה את הדבר הבא:

1. נבדוק כי הקבוצה בת"ל (נדלג על כך בתרגיל הזה).
2. נרשום את $v_1,...,v_4$ כשורות מטריצה A.
3. נדרג את המטריצה למטרציה B
4. נקבל בסיס חדש למרחב השורות, שאותו קל יותר להשלים לבסיס של $\mathbb{R}^5$.
5. נשים לב כי $\text{Row}(A)=\text{Row}(B)$, אז ההשלמה לבסיס של $\text{Row}(B)$ תהווה את אותה השלמה של $\text{Row}(A)$ אותה אנו מחפשים.

אז:

$$A=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\2&3&4&5&6\\1&1&1&1&2\\1&1&0&0&0\end{pmatrix}\rightsquigarrow\begin{pmatrix}1&0&0&-1&0\\0&1&0&1&0\\0&0&1&1&0\\0&0&0&0&1\end{pmatrix}$$

כלומר, המרחב הנפרש על ידי $v_1,...,v_4$ הוא אותו מרחב שנפרש על ידי:

$$u_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\\-1\\0\end{pmatrix},u_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\\0\end{pmatrix},u_3=\begin{pmatrix}0\\0\\1\\1\\0\end{pmatrix},u_4=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\\1\end{pmatrix}$$

וזאת קבוצה שקל להשלים לבסיס עם:

$$u_5=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\\0\end{pmatrix}$$

אז בסיס ל$\mathbb{R}^5$ הוא:

$$v_1 = \begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\\5\end{pmatrix},\ v_2 = \begin{pmatrix}2\\3\\4\\5\\6\end{pmatrix},\ v_3 = \begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\\2\end{pmatrix},\ v_4 = \begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\\0\end{pmatrix},\ u_5 = \begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\\0\end{pmatrix}$$

14.2 מיון גיאומטרי של תתי מרחב

טענה 14.2.1.

נוכיח את המיון הגיאומטרי של תתי מרחבים ב$\mathbb{R}^3$ כפי שניסחנו בתרגול קודם, כלומר:
יהי U תת מרחב של $\mathbb{R}^3$. אזי $\mathcal{U}$ חייב להיות אחד מהדברים הבאים:

1. תת מרחב טריוואלי.
2. ישר העובר דרך הראשית.
3. מישור העובר דרך הראשית.
4. כל המרחב.

הוכחה:

1. אם $\mathcal{U}$ הוא תת מרחב טריוואלי סיימנו.
2. אחרת, קיים לו וקטור u שונה מ0. מכך ש $\mathcal{U}$ תת מרחב וקטורי, הוא סגור לכפל בסקלר ולכן:
$$\text{span}(u) \subseteq \mathcal{U}$$
אם אם אין עוד וקטורים שאינם כפולה בסקלר של u, אזי $\mathcal{U} = \text{span}(u)$, כלומר המרחב הוא ישר.
3. אחרת, קיים וקטור v שאינו כפולה בסקלר של u. אזי:
$$\text{span}(u, v) \subseteq \mathcal{U}$$
אם אין עוד וקטורים שאינם במישור שנפרש ע"י u, v מתקיים כי $\mathcal{U}$ הוא מישור.
4. אחרת, קיימים 3 וקטורים שאינם על אותו מישור, כלומר אינם תלויים לינארית. נראה בהמשך כי זה $W \subseteq \mathbb{R}^3$, ווקטורים $u, w, v \in W$ כך ש:
$$w \neq 0 \quad \& \quad v \notin \text{span}(w) \quad \& \quad u \notin \text{span}(v, w)$$
נרצה לראות שהקבוצה בת"ל. אכן, יהיו $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ כך ש:
$$\lambda_1 u + \lambda_2 v + \lambda_3 w = 0$$

נ"ש שלא כולן אפסים. נחלק למקרים ונראה כי כל מקרה מוביל לסתירה.

(א) אם $\lambda_1 = 0$, אזי המשוואה היא:

$$\lambda_2 v + \lambda_3 w = 0$$

אבל לא כל הלמדאות אפסים, ולכן אם $\lambda_2 \neq 0$ נקבל:

$$v = \frac{-\lambda_3}{\lambda_2} w \in \text{span}(w)$$

בסתירה להנחות. אחרת, $\lambda_2 = 0$ ואז $\lambda_3 \neq 0$ וכן:

$$\lambda_3 w = 0 \Longrightarrow w = 0$$

בסתירה להנחה על $w \neq 0$.

(ב) במקרה השני, $\lambda_1 \neq 0$ כלומר:

$$u = \frac{-\lambda_2}{\lambda_1} v + \frac{-\lambda_3}{\lambda_1} w \in \text{span}(u, w)$$

בסתירה להנחות

סה"כ זו קבוצה בת"ל, ולכן משיקולי מימדים היא גם פורשת, כלומר בסיס. מכך W הוא תת מרחב, מתקיים:

$$\mathbb{R}^3 = \text{span}(u, v, w) \subseteq W \subseteq \mathbb{R}^3$$

ולכן W הוא כל המרחב, מה שמסיים את המיון!

14.3 תרגילים מסכמים

תרגיל 14.3.1.

מצאי בסיס למרחב:

$$\text{span}\left\{\begin{pmatrix}1\\-2\\3\\4\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\3\\-3\\-5\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\1\\0\\-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\-2\\0\end{pmatrix}\right\}$$

פתרון:
יש 2 גישות לפתור את השאלה. נראה את שתיהן:
דרך ראשונה:
נבחין כי זו קבוצה פורשת. נרצה להבין האם היא בת"ל או אם היא ת"ל, מי צירופים לינארים של אחרים. דרך שנייה:
להעביר את הוקטורים לשורות מטריצה, לדרג ולהשתמש בכך שדירוג שומר על מרחב שורות, ושהשורות בצורה המדורגת הן בת"ל.

תרגיל 14.3.2.

תהיי הממ"ל:

$$\begin{cases}x+y+2z=3\\x+y=4\\x+y+z=2\end{cases}$$

מצאי בסיס למרחב הפתרונות של הממ"ל ההומוגנית, והשלימי אותו לבסיס של כל המרחב.

פתרון:
ראשית, נבחין כי הממ"ל ההומוגנית המתאימה היא:

$$\begin{cases}x+y+2z=0\\x+y=0\\x+y+z=0\end{cases}$$

כדי לקבל פתרונות, נעביר אותה לצורה מטריציונית ונדרג:

$$\begin{pmatrix}1&1&2&0\\1&1&0&0\\1&1&1&0\end{pmatrix}\rightsquigarrow\begin{pmatrix}1&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

כלומר פתרונות למערכת הם מהצורה:

$$\begin{cases}x+y=0\\z=0\\y=t\qquad t\in\mathbb{R}\end{cases}\rightsquigarrow\begin{cases}x=-t\\z=0\\y=t\qquad t\in\mathbb{R}\end{cases}$$

כלומר הקבוצה:

$$\left\{ \begin{pmatrix} -t \\ t \\ 0 \end{pmatrix} \middle| t \in \mathbb{R} \right\}$$

כדי למצוא בסיס, נבחין כי כל הפתרונות הם מהצורה:

$$\left\{ t \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \middle| t \in \mathbb{R} \right\} = \text{span}_{\mathbb{R}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

כלומר הקבוצה $\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ פורשת את מרחב הפתרונות המבוקש. מכך שהוקטור אינו 0, הקבוצה בת"ל, כלומר מהגדרה היא בסיס של מרחב הפתרונות של המערכת ההומוגנית המתאימה.
נרצה להשלים אותו לבסיס של $\mathbb{R}^3$.

הערה

בשלב הזה ניתן או לנחש השלמה לבסיס ולהראות שזו קבוצה בת"ל, ואז משיקולי מימדים היא פורשת. דרך נוספת, היא לבדוק בידיים עם דירוג המטריצה המתאימה, כמו בתרגיל הקודם.

נעביר את הוקטור לשורות מטריצה, ונשלים בשורות אפסים (לפי כמות העמודות) ונקבל:

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

המטריצה כבר מדורגת, ואכן אם נחליף את שורות האפסים בשורות:

$$v_1 := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad ; \quad v_2 := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

נקבל כי מרחב השורות שלה הוא $\mathbb{R}^3$, כלומר כדי להשלים לבסיס נוסיף את הוקטורים:

$$\{v_1^t, v_2^t\}$$

ומכך שמרחב השורות נשמר תחת דירוג, זו גם השלמה של הקבוצה המקורית, לכן:

$$\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

בסיס של $\mathbb{R}^3$ כרצוי.

14.4 משפט המימדים

תזכורת

יהא V מ"ו, ויהיו $S=\{v_1,...,v_n\},T=\{w_1,...,w_m\}$ תתי-קבוצות של V אז:

$$\text{span}(T)+\text{span}(S)=\text{span}(S\cup T)$$

תזכורת

יהא V מ"ו נוצר סופית ויהיו זוג תמ"ו U,W של V, אז מתקיים:

$$\dim(U+W)=\dim(U)+\dim(W)-\dim(U\cap W)$$

תרגיל 14.4.1.

יהיו V מרחב וקטורי מעל שדה $\mathbb{F}$ ממימד 6, U תת מרחב וקטורי של V ממימד 4, W תת מרחב וקטורי של V ממימד 5. בנוסף, נניח שU לא מוכל בW. הראו כי: $\dim(U\cap W)=3$.

פתרון:

U,W תתי מרחבים של V ולכן גם סכומם תת מרחב של V. לכן:

$$U+W\subset V\Rightarrow\dim(U+W)\leq 6$$

ממשפט המימדים:

$$\dim(U+W)=\dim(U)+\dim(W)-\dim(U\cap W)$$

נציב את ההנחות שלנו:

$$6\geq\dim(U+W)=4+5-\dim(U\cap W)$$

כלומר:

$$\dim(U\cap W)\geq 3$$

אבל חיתוך הוא בפרט תת מרחב של כל אחד מהמרחבים, כלומר:

$$U\cap W\subset U\ ;\ U\cap W\subset W\Rightarrow\dim(U\cap W)\leq\min\dim(U),\dim(W)=\min 4,5=4$$

כלומר, סה"כ:

$$4\geq\dim(U\cap W)\geq 3$$

נניח בשלילה שהמימד של החיתוך הוא 4. אז:

$$\dim(U\cap W)=4=\dim(U)\ \ \&\ \ U\cap W\subset U\Rightarrow U=W\cap U\subset W$$

וזו סתירה כי הנחנו ש$W\subsetneq U$. לכן, $\dim(U\cap W)=3$, כרצוי.

תרגיל 14.4.2.

חשבו את ממדי החיתוך והסכום עבור: $U = \text{span}\{1-x, 2\},\ W = \text{span}\{3+x, x^2\}$ ב $\mathbb{R}_2[x]$.

פתרון:
נבחין כי $1-x, 2$ אינם כפולה בסקלר אחד של השני. לכן, הם בלתי תלויים לינארית. כלומר, זו קבוצה פורשת בת"ל של U, כלומר בסיס. מהגדרת מימד, $\text{dim}(U) = 2$. באופן דומה, גם $\text{dim}(W) = 2$.
מהתזכורת:

$$U + W = \text{span}\{1-x, 2\} + \text{span}\{3+x, x^2\} = \text{span}\{1-x, 2, 3+x, x^2\}$$

נבדוק אם הקבוצה הפורשת תלויה לינארית. נתבונן בקבוצה:

$$(a_1 + 2a_2) + (-a_1)x + (a_3)x^2 = a_1(1-x) + a_2(2) + a_3(3+x) + a_4(x^2) = 0$$

והממ"ל המתאימה:

$$\begin{cases} a_1 + 2a_2 + 3a_3 = 0 \\ -a_1 + a_3 = 0 \\ a_4 = 0 \end{cases}$$

והמטריצה המתאימה היא:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

וזו מטריצה הומוגניות עם יותר עמודות משורות, כלומר יש פתרון לא טריוואלי והקבוצה תלויה לינארית.
לכן, $\text{dim}(U + W) < 4$.
ואכן ניתן להבחין כי תלות אחת היא בכך ש:

$$(-1)(3+x) + 2(2) + (-1)(1-x) = 0$$

נוריד את $3 + x$ ונבדוק בת"ל:

$$(a_1 + 2a_2) + (-a_1)x + (a_3)x^2 = a_1(1-x) + a_2(2) + a_3(x^2) = 0$$

והממ"ל המתאימה:

$$\begin{cases} a_1 + 2a_2 = 0 \\ -a_1 = 0 \\ a_3 = 0 \end{cases}$$

והפתרון שלה הוא רק $a_1 = a_2 = a_3 = 0$.כלומר, זו קבוצה בת"ל מגודל 3, והמימד הוא לכל היותר 3, ולכן הוא בדיוק 3.
ממשפט המימדים:

$$3 = \text{dim}(U + W) = \text{dim}(U) + \text{dim}(W) - \text{dim}(U \cap W) = 2 + 2 - \text{dim}(U \cap W)$$

לכן: $\text{dim}(U \cap W) = 1$ כרצוי.

תרגיל 14.4.3.

יהא V מ"ו נוצר סופית, ויהא W תמ"ו של V כך ש $\dim W = \dim V$, הוכיחו כי $V = W$.

פתרון:

נבחר לW בסיס, $B_W = \{w_1, ..., w_n\}$, בפרט B_W קבוצה בV שהיא בת"ל, ומתקיים $|B_W| = \dim(W) = \dim(V)$, אז:

$$W = \text{span}(B_W) = V$$

תרגיל 14.4.4.

עבור תתי המרחבים מתרגול 5:

$$\mathcal{U} := \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ c & 0 \end{pmatrix} \middle| a, c \in \mathbb{R} \right\} \quad ; \quad \mathcal{V} := \left\{ \begin{pmatrix} 0 & b \\ d & 0 \end{pmatrix} \middle| b, d \in \mathbb{R} \right\}$$

1. מצאי בסיס ל2 תתי המרחבים.
2. מצאי מימד לחיתוך $\mathcal{U} \cap \mathcal{V}$.

פתרון:

1. נרצה למצוא קבוצה פורשת ובת"ל לכל אחד מהמרחבים. שימו ♡, אי אפשר להשתמש בטריקים של מימדים כי אנו לא יודעות מראש מה המימדים שלהם.
נבחין כי כל מטריצה ב$A \in \mathcal{U}$ היא מהצורה הבאה עבור $a, c, d \in \mathbb{R}$:

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ c & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ c & 0 \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

כלומר מהגדרה:

$$A \in \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

מצד שני:

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\} \in \mathcal{U} \Longrightarrow \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\} \subseteq \mathcal{U}$$

לכן מהכלה דו"ב יש שיוויון, כלומר הקבוצה הבאה קבוצה פורשת.

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

נרצה להראות שהיא בת"ל. אכן יהיו $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ כך ש:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ \lambda_2 & 0 \end{pmatrix}$$

ואכן מהגדרת שיוויון מטריצות איבר איבר, כל הלמדאות מתאפסות, כלומר הקבוצה בת"ל. מציאת בסיס ל$\mathcal{V}$ תהיה מאוד דומה.

2. כדי למצוא את המימד של החיתוך יש כמה דרכים. נרצה להעזר במשפט המימדים, ולשם כך נחשב את מימד הסכום. נזכר כי:

$$\mathcal{U}+\mathcal{V}=\text{span}\left\{\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}\right\}+\text{span}\left\{\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}\right\}=$$

ומטענה שראינו מתקיים:

$$=\text{span}\left\{\left\{\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}\right\}\bigcup\left\{\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}\right\}\right\}=$$

$$=\text{span}\left\{\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}\right\}$$

ונבחין (תרגיל לכן!) שזו קבוצה בת"ל, כלומר היא בסיס ולכן:

$$1=-3+2+2=-\dim(\mathcal{U}+\mathcal{V})+\dim(\mathcal{U})+\dim(\mathcal{V})=\dim(\mathcal{U}\cap\mathcal{V})$$

לכן המימד של החיתוך הוא 1.

אכן, היה אפשר לחשב ישירות את החיתוך ואז את המימד שלו או להשתמש בחישוב של הסכום כתת מרחב ולמצוא לו בסיס :)

14.5 משפט הדרגה ומרחבי שורות ועמודות

14.5.1 תזכורת על מרחבי שורות ועמודות

תזכורת

תהיי $A\in\mathbb{F}^{m\times n}$ מטריצה מסדר $m\times a$, נסמן:

$$A=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&\dots&a_{1n}\\\vdots&&\ddots&\\a_{m1}&a_{m2}&\dots&a_{mn}\end{pmatrix}$$

אם נסמן ב $R_1,...,R_m$ את שורות A, אז:

$$\text{Row}(A)=\text{span}(R_1,..,R_m)=\text{span}\left(\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&\dots&a_{1n}\end{pmatrix},...,\begin{pmatrix}a_{m1}&a_{m2}&\dots&a_{mn}\end{pmatrix}\right)\subset\mathbb{F}^n$$

עובדה חשובה שראינו בהרצאה היא שבמהלך תהליך הדירוג, $\text{Row}(A)$ נשמרת.

תרגיל 14.5.1.

תהא $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 4 \\ 1 & 2 & 4 & 4 \end{pmatrix}$ מצאו בסיס ל-Row(A), Col(A).

פתרון:
נתחיל מ-Row(A).
שלושת שורות A הן:

$$R_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$
$$R_2 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 4 \end{pmatrix}$$
$$R_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 4 \end{pmatrix}$$

אז:

$$\lambda_1 R_1 + \lambda_2 R_2 + \lambda_3 R_3 = 0 \iff \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ 2\lambda_1 + 3\lambda_2 + 2\lambda_3 = 0 \\ 3\lambda_1 + 4\lambda_2 + 4\lambda_3 = 0 \\ 4\lambda_1 + 4\lambda_2 + 4\lambda_3 = 0 \end{cases}$$

מהמשוואה הראשונה והשנייה נקבל $\lambda_2 = 0$, אז מהמשוואה הראשונה והשלישית נקבל:

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_3 = 0 \\ 3\lambda_1 + 4\lambda_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 0$$

אז הקבוצה בת"ל ונקבל כי R_1, R_2, R_3 בסיס ל-Row(A).
עבור Col(A), ישר נשים לב כי $C_4 = 4C_1$, אז נבדוק האם C_1, C_2, C_3 בת"ל ולכן בסיס, כלומר האם:

$$\eta_1 C_1 + \eta_2 C_2 + \eta_3 C_3 = 0 \iff \eta_1 = \eta_2 = \eta_3 = 0$$

ואכן:

$$\eta_1 C_1 + \eta_2 C_2 + \eta_3 C_3 = \begin{pmatrix} \eta_1 + 2\eta_2 + 3\eta_3 \\ \eta_1 + 3\eta_2 + 4\eta_3 \\ \eta_1 + 2\eta_2 + 4\eta_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

אז מהמשוואה הראשונה והשנייה נקבל $\eta_3 = 0$, אז מהמשוואה הראשונה והשנייה נקבל:

$$\begin{cases} \eta_1 + 2\eta_2 \\ \eta_1 + 3\eta_2 \end{cases} = 0 \iff \eta_1 = \eta_2 = 0$$

כלומר, C_1, C_2, C_3 בסיס ל-Col(A).

14.5.2 משפט הדרגה

תזכורת

תהא $A \in \mathbb{F}^{m\times n}$ מטריצה, אז:

$$\text{rank}(A) = \dim(\text{Row}(A)) = \dim(\text{Col}(A))$$

אוסף שיוויונות אלו נקראים גם משפט הדרגה!

תרגיל 14.5.2.

הוכיחו או הפריכו:
תהא A מטריצה מסדר 4×3, אז עמודה 4 צ"ל של העמודות האחרות.

פתרון:
זה לא נכון, נראה דוגמא נגדית:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

תרגיל 14.5.3.

עבור כל ערכי
$s, t \in \mathbb{R}$ מצאו בסיס למרחב השורות ועמודות ל:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & s+t \\ 0 & 1 & 2 & st \\ 0 & 0 & 1 & e^t \end{pmatrix}$$

פתרון:
נשים לב כי העמודה הראשונה, השנייה והשלישית בת"ל (לכל s, t) ולכן לכל s, t הדרגה של A היא 3, ולכן לכל s, t בסיס למרחב השורות הוא פשוט שלושת העמודות, ומרחב השורות הוא כל $\mathbb{R}^3$, אז נבחר פשוט את הבסיס הסטנדרטי:

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

14.6 המרחב המאפס

תזכורת

תהא $A \in \mathbb{R}^{n\times m}$, נסמן:

$$N(A) = \{v \in \mathbb{R}^m | Av = 0\}$$

בדיקה מהירה תראה כי זה זהו תמ"ו של $\mathbb{R}^m$, בוודאי $0 \in N(A)$, וגם:

$$v_1, v_2 \in N(A) \Rightarrow Av_1 = Av_2 = 0 \Rightarrow A(v_1 + v_2) = 0 \Rightarrow v_1 + v_2 \in N(A)$$

$$v_1 \in N(A) \Rightarrow Av_1 = 0 \Rightarrow \forall\lambda \in \mathbb{F}, A(\lambda v_1) = \lambda A(v_1) = \lambda 0 = 0 \Rightarrow \forall\lambda \in \mathbb{F}, \lambda v_1 \in N(A)$$

באופן שקול, ניתן לדבר על המרחב המאפס כעל מרחב הפתרונות של ממ"ל הומוגנית. ואכן כל הוקטורים שנשלחים ע"י מטריצת המקדמים שלה ל0, הם פתרונות לממ"ל ההומוגנית (מתכונות כפל מטריצות).

ראיתן בנוסף בהרצאה שמימד $N(A)$ הוא בדיוק מספר המשתנים החופשיים בדירוג הקנוני, כלומר מספר המשתנים בכלל הממ"ל, פחות מספר האיברים הפותחים, או במילים אחרות:

$$\text{dim}(N(A)) = m - \text{rank}(A)$$

תרגיל 14.6.1.

יהא $B \in \mathbb{R}^{n\times m}$, נסמן $K = \{Bv | v \in \mathbb{R}^m\} \subset \mathbb{R}^n$, הוכיחו כי $K = \text{Col}(B)$.

<u>פתרון:</u>

נסמן את עמודות B ע"י $b_1, ..., b_m$, ואת $v = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}$, אז נשים לב כי:

$$Bv = \lambda_1 b_1 + ... + \lambda_n b_n$$

זה מניב ראשית כי $K \subset \text{Col}(B)$, אבל גם מעבר לזה, אם $w \in \text{Col}(B)$, אז עפ"י הגדרה $w \in \text{span}(b_1, ..., b_n)$, ולכן קיימם $\eta_1, ..., \eta_n \in \mathbb{R}$ כך ש$w = \eta_1 b_1 + ... + \eta_n b_n$, ולכן:

$$B\begin{pmatrix} \eta_1 \\ \vdots \\ \eta_n \end{pmatrix} = w$$

תרגיל 14.6.2.

יהיו $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ כך ש $AB = 0$, הוכיחו כי $\text{Col}(B) \subset N(A)$.

פתרון:
יהא $v \in \text{Col}(B)$, מהתרגיל הקודם קיים $w \in \mathbb{R}^n$ כך ש $v = Bw$, אז מתקיים:

$$Av = ABw = 0w = 0$$

כלומר $v \in N(A)$, ולכן $\text{Col}(B) \subset N(A)$.

תרגיל 14.6.3.

תהא:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & 3 & -6 \end{pmatrix}$$

מצאו בסיס ומימד ל $\text{Row}(A), \text{Col}(A), N(A) = \{v \in \mathbb{R}^3 | Av = 0\}$.

פתרון:
ראשית, נתחיל ממרחב השורות, ברור כי $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -6 \end{pmatrix} \right\}$ בת"ל, היות והם אינם כפל בסקלר אחד של השני, גם נקבל כי $\text{rank}(A) = \dim(\text{Col}(A)) = \dim(\text{Row}(A)) = 2$.
נעבור למרחב השורות, נשים לב בי אנו יודעים שהוא יהיה תמ"ו של $\mathbb{R}^2$ ממימד $\text{rank}(A) = 2$, ולכן הוא חייב להיות $\mathbb{R}^2$ כולו, נבחר לו את הבסיס הסטנדרטי, $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ עבור $N(A)$, אנו יודעים כי מרחב הפתרונות של מערכת הומוגנית הינו מספר הנעלמים (מספר העמודות) פחות הדרגה, אז $3 - 2 = 1$.
נחפש וקטור המקיים:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = Av = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & 3 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + 2y - 3z \\ 3x + 3y - 6z \end{pmatrix}$$

ובאמת נשים לב כי $x = y = z = 1$ פתרון, אבל לכן, היות ו $\dim(N(A)) = 1$ אז:

$$\text{span}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \subset N(A) \Rightarrow N(A) = \text{span}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

בפרט, $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ בסיס של $N(A)$.

תרגיל בית שבע

15.1 תרגילים להגשה

1. תהא $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ כך ש $B^{2024} = I_n$, הוכיחו כי $N(B) = \{0\}$ - ללא שימוש במטריצות הפיכות!
2. יהיו U, V תתי-המרחבים הבאים של $\mathbb{R}^4$:

$$U = \text{span}\left\{ \begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\2\\2\\2\end{pmatrix} \right\}$$

$$V = \left\{ \begin{pmatrix}a\\b\\c\\d\end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}c\\d\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} \right\}$$

(אין צורך להוכיח כי הם תמ"ו) מצאו בסיס ומימד ל $U, V, U+V, U\cap V$.

3. תהא $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ מטריצה ריבועית, הוכיחו או הפריכו (נמקו!)
   (א) אם $\dim(\text{Col}(A) \cap \text{Row}(A)) > 0$, אז $\text{Row}(A) = \text{Col}(A)$.
   (ב) אם קיים $\lambda \in \mathbb{R}$ כך ש $A + \lambda A^t = 0$, אז $\text{Col}(A) = \text{Row}(A)$.
   (ג) אם $\text{Col}(A) = \text{Row}(A)$, אז קיים $\lambda \in \mathbb{R}$ כך ש $A + \lambda A^t = 0$.

15.2 תרגילים לא להגשה

1. יהיה $V = \mathbb{R}^{2\times 3}$, נגדיר:

$$U = \left\{ \begin{pmatrix}\alpha & \beta & 0\\ -\beta & \alpha & 0\end{pmatrix} \middle| \alpha, \beta \in \mathbb{R} \right\}$$

$$W = \text{span}\left\{ \begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 2 & 2 & 3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1 & 1 & -1\\ -3 & -2 & -3\end{pmatrix} \right\}$$

תמ"ו של V (אין צורך להוכיח כי הם תמ"ו), מצאו:
   (א) בסיס ומימד של U.
   (ב) בסיס ומימד של W.
   (ג) בסיס ומימד של $U \cap W$.

והסיקו את המימד של $U + W$.

2. יהיו זוג תתי מרחבים של $\mathbb{R}^4$:

$$W = \text{span}\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\2\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\-a\\0\end{pmatrix}\right\}$$

$$U = \text{span}\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\-a\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$$

מהם כל ערכי הפרמטר הממשי $a \in \mathbb{R}$ (אם קיימים) עבורם:

$$\mathbb{R}^4 = U \oplus W$$

15.3 פתרונות לתרגילים לא להגשה

1. ראשית, נשים לב כי:

$$U = \text{span}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\-1 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

מטריצות אליו אינן כפל בסקלר אחת של השנייה, ולכן הן בת"ל, ולכן בסיס של U, ובפרט $\dim U = 2$.
עבור W, חישוב ייראה לנו כי:

$$\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\1 & 2 & 3\end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\2 & 2 & 3\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-1 & 1 & -1\\-3 & -2 & -3\end{pmatrix}.$$

כלומר:

$$W = \text{span}\left\{\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\2 & 2 & 3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1 & 1 & -1\\-3 & -2 & -3\end{pmatrix}\right\}$$

ומאותו נימוק כמו עובר U, זהו בסיס והמימד הוא 2.
עבור החיתוך, אם $A \in U \cap W$, אז $A \in U$ וגם $A \in W$, ולכן קיימים $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$ כך ש:

$$\alpha\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\-1 & 0 & 0\end{pmatrix} = \gamma\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\2 & 2 & 3\end{pmatrix} + \delta\begin{pmatrix}-1 & 1 & -1\\-3 & -2 & -3\end{pmatrix}$$

כלומר:

$$\begin{cases}\alpha = \gamma - \delta\\ \beta = \delta\\ 0 = \delta - \gamma\\ -\beta = 2\gamma - 3\delta\\ \alpha = 2\gamma - 2\delta\\ 0 = 3\gamma - 3\delta\end{cases}$$

זהו ממ"ל, נשאיר כתרגיל שפתרונו הינו:

$$\begin{pmatrix}\alpha\\\beta\\\gamma\\\delta\end{pmatrix} \in \text{span}\begin{pmatrix}0\\1\\1\\1\end{pmatrix}$$

כלומר A מהצרוה:

$$A=\beta\begin{pmatrix}0&1&0\\-1&0&0\end{pmatrix}=\beta\begin{pmatrix}1&0&1\\2&2&3\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}-1&1&-1\\-3&-2&-3\end{pmatrix}$$

בפרט:

$$U\cap W=\text{span}\begin{pmatrix}0&1&0\\-1&0&0\end{pmatrix}$$

בפרט, זהו הבסיס של $U\cap W$, ומימדו 1.
עפ"י משפט המימדים:

$$\dim(U+W)=\dim U+\dim V-\dim(U\cap W)=2+2-1=3$$

2. נשים לב כי $\dim U,\dim W\leq 2$, נסיק ממשפט המימדים כי $U\cap V=\{0\}\iff U+V=\mathbb{R}^4$, נשים לב כי:

$$U+V=\text{span}\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\2\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\-a\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\-a\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\end{pmatrix}\right\}=\text{Row}\underbrace{\begin{pmatrix}1&0&2&0\\0&1&-a&0\\1&0&-a&0\\0&1&0&1\end{pmatrix}}_{=A}$$

נדרג את A:

$$\begin{pmatrix}1&0&2&0\\0&1&-a&0\\1&0&-a&0\\0&1&0&1\end{pmatrix}\xrightarrow{R_3\to R_3-R_1}\begin{pmatrix}1&0&2&0\\0&1&-a&0\\0&0&-a-2&0\\0&1&0&1\end{pmatrix}\xrightarrow[a\neq-2]{R_3\to\frac{1}{-a-2}R_3}\begin{pmatrix}1&0&2&0\\0&1&-a&0\\0&0&1&0\\0&1&0&1\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_2\to R_2+aR_3}\begin{pmatrix}1&0&2&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&1&0&1\end{pmatrix}\xrightarrow{R_4\to R_4-R_3}\begin{pmatrix}1&0&2&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$$

שדרגתה 4 כלומר אם $a\neq-2$ הסכום ישר.
אם $a=-2$, אז A שקולת שורות ל:

$$\begin{pmatrix}1&0&2&0\\0&1&-a&0\\0&0&-a-2&0\\0&1&0&1\end{pmatrix}\overset{a=-2}{=}\begin{pmatrix}1&0&2&0\\0&1&2&0\\0&0&0&0\\0&1&0&1\end{pmatrix}$$

בה שורת אפסים, אז $\dim U+W\leq 3$ ולא מתקיים $U\oplus W=\mathbb{R}^4$.

תרגול תשיעי

16.1 מטריצות הפיכות

תזכורת

מטריצה ריבועית $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ נקראת הפיכה אם קיימת מטריצה $B \in \mathbb{F}^{n\times n}$ כך ש:

$$AB = BA = I_n$$

נסמן $B = A^{-1}$.

טענה (ללא הוכחה) 16.1.1.

1. יהיו A, B מטריצות הפיכות מאותו סדר אז AB גם הפיכה ומתקיים:

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$

2. תהא A הפיכה, אז גם A^t הפיכה ומתקיים:

$$(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$$

3. אם A הפיכה, אז:

$$AB = AC \Rightarrow B = C$$

בפרט:

$$AB = 0 \Rightarrow B = 0$$

4. $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ הפיכה אמ"מ:

   (א) A שקולת שורה ל-I_n.

   (ב) לכל $b \in \mathbb{F}^n$ קיימת למע"ל $Ax = b$ פתרון יחיד שהוא:

   $$x = A^{-1}b$$

   (ג)

   $$\text{rank}(A) = n$$

דוגמא 16.1.2.

נחשב בידיים את ההופכית של $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ אז נניח כי:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

אז:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+c & b+d \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

אז $c = 0, d = 1$, אז:

$$\begin{pmatrix} a+c & b+d \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b+1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ולכן:

$$a = 1, \quad b = -1$$

אז:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

תרגיל 16.1.3.

תהא $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, הוכיחו כי:

1. אם בA שורת אפסים אז A אינה הפיכה.
2. אם בA עמודת אפסים אז A אינה הפיכה.
3. האם במקרה בו בA אין שורת ועמודת אפסים A בהכרח הפיכה?

<u>פתרון:</u>

1. תהא Aעם שורת אפסים, כלומר קיים k כך ש $(A)_{k,i} = 0$ לכל $1 \leq i \leq k$.
   נניח בשלילה שקיימת $B = A^{-1}$ אז $AB = I_n$, אבל נחשב:
   $$(AB)_{k,k} = \sum_{i=1}^{n} A_{k,i} B_{i,k} = 0$$
   אבל:
   $$(AB)_{k,k} = (I_n)_{k,k} = 1$$
   שזו סתירה.
   <u>פתרון אלטרנטיבי:</u> אם בA שורשת אפסים, אז $\text{rank}(A) < n$, ולכן A לא הפיכה.
2. תהא A מטריצה עם עמודת אפסים, נניח בשלילה כי A הפיכה, אז גם A^t, אבל בA^t שורת אפסים, אז נקבל סתירה לסעיף הקודם.

3. נראה דוגמא נגדית:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

אז $\text{rank}(A) = 1 \neq 2$, אז היא לא הפיכה.

תרגיל 16.1.4.

תהא $\begin{pmatrix} \lambda_1 & ... & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & ... & \lambda_n \end{pmatrix} = A = \text{diag}(\lambda_1, ..., \lambda_n)$, הוכיחו כי A הפיכה אמ"מ $\lambda_1, ..., \lambda_n \neq 0$,

<u>פתרון:</u>
ראשית, אם $\lambda_k = 0$ עבור k כלשהו אז ב-A שורת אפסים ולכן A אינה הפיכה, נראה כי אם $\lambda_1, ..., \lambda_n \neq 0$ אז A הפיכה, ואכן נזכר כי:

$$\text{diag}(\lambda_1, ..., \lambda_n)\,\text{diag}(\eta_1, ..., \eta_n) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & ... & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & ... & \lambda_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta_1 & ... & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & ... & \eta_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \eta_1\lambda_1 & ... & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & ... & \eta_n\lambda_n \end{pmatrix}$$

אז באמת:

$$B = \text{diag}\left(\frac{1}{\lambda_1}, ..., \frac{1}{\lambda_n}\right)$$

מקיימת:

$$AB = \text{diag}(1, ..., 1) = I_n$$

תרגיל 16.1.5.

תהא $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, כך ש:

$$A^{10} = -I_n$$

הוכיחו כי A הפיכה ומצאו את A^{-1}.

<u>פתרון:</u>
נשים לב כי:

$$A^{20} = (-I_n)(-I_n) = (-1)^2 I_n = I_n$$

אז:

$$A^{20} = AA^{19} = I_n$$

אז:

$$A^{-1} = A^{19}$$

תזכורת

בהנתן A, על מנת למצוא את A^{-1}, נכתוב את $P=(A|I_n)$ ונדרג את A לI_n עד שנקבל $(I_n|B)$ ואז $B=A^{-1}$.

תרגיל 16.1.6.

מצאו את המטריצה ההופכית ל:

$$A=\begin{pmatrix}1&2&3\\1&0&0\\1&1&1\end{pmatrix}$$

<u>פתרון:</u>
נרשום את:

$$P=\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&2&3&1&0&0\\1&0&0&0&1&0\\1&1&1&0&0&1\end{array}\right)$$

ונדרג:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&2&3&1&0&0\\1&0&0&0&1&0\\1&1&1&0&0&1\end{array}\right)\xrightarrow{R_1\leftrightarrow R_2}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&0&1&0\\1&2&3&1&0&0\\1&1&1&0&0&1\end{array}\right)\xrightarrow{\substack{R_2\to R_2-R_1\\R_3\to R_3-R_1}}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&0&1&0\\0&2&3&1&-1&0\\0&1&1&0&-1&1\end{array}\right)\xrightarrow{R_2\to R_2-2R_3}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&0&1&0\\0&0&1&1&1&-2\\0&1&1&0&-1&1\end{array}\right)\xrightarrow{R_3\to R_3-R_2}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&0&1&0\\0&0&1&1&1&-2\\0&1&0&-1&-2&3\end{array}\right)\xrightarrow{R_3\leftrightarrow R_2}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&0&1&0\\0&1&0&-1&-2&3\\0&0&1&1&1&-2\end{array}\right)$$

אז:

$$A^{-1}=\begin{pmatrix}0&1&0\\-1&-2&3\\1&1&-2\end{pmatrix}$$

תרגיל 16.1.7.

תהא $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$ כך ש:

$$(A+I_n)^2=0$$

הוכיחו כי A הפיכה.

<u>פתרון:</u>
נפתח סוגריים:

$$(A+I_n)^2=(A+I_n)(A+I_n)=A^2+A+A+I_n=A^2+2A+I_n$$

אז:

$$A^2 + 2A = -I_n \Rightarrow A(A + 2I_n) = -I_n \Rightarrow A(-A - 2I_n) = I_n$$

אז:

$$A^{-1} = -A - 2I_n$$

תרגיל 16.1.8.

יהיו $A, B, C \in \mathbb{R}^{n\times n}$ הפיכות, נסמן:

$$D = 3A^2B^tC^2A$$

מצאו את D^{-1}.

פתרון:
נשים לב כי:

$$DA^{-1} = 3A^2B^tC^2AA^{-1} = 3A^2B^tC^2$$

$$DA^{-1}(C^{-1})^2 = 3A^2B^tC^2(C^{-1})^2 = 3A^2B^t$$

$$DA^{-1}(C^{-1})^2(B^t)^{-1} = 3A^2B^t(B^t)^{-1} = 3A^2$$

$$DA^{-1}(C^{-1})^2(B^t)^{-1}(A^2)^{-1} = 3A^2(A^2)^{-1} = 3I_n$$

$$D\left(\frac{1}{3}A^{-1}(C^{-1})^2(B^t)^{-1}(A^2)^{-1}\right) = I_n$$

אז:

$$D^{-1} = \frac{1}{3}A^{-1}(C^{-1})^2(B^t)^{-1}(A^2)^{-1}$$

תרגיל 16.1.9.

תהא $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ הפיכה, ותהא B מטריצה כך ש:

$$A^2 = B^2$$

הוכיחו כי B הפיכה.

פתרון:
נשים לב כי:

$$B^2(A^{-1})^2 = A^2(A^{-1})^2 = I_n$$

אז:

$$B(B(A^{-1})^2) = I_n$$

אז:

$$B^{-1} = B(A^{-1})^2$$

הערה

בשימוש דטרמיננטה, התרגיל הקודם מיידי.

תרגיל 16.1.10.

1. תהא $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ הפיכה, וv_1, v_2, v_3 ווקטורים בת"ל, הוכיחו כי Av_1, Av_2, Av_3 גם בת"ל.
2. האם הטענה נכונה עבור A שאינה הפיכה?

פתרון:

1. נניח בשלילה כי Av_1, Av_2, Av_3 ת"ל, כלומר קיימים $\lambda_1, \lambda_3, \lambda_3$ שאינם כולם אפס כך ש:

$$\lambda_1 Av_1 + \lambda_2 Av_2 + \lambda_3 Av_3 = 0$$

אבל:

$$\lambda_1 Av_1 + \lambda_2 Av_2 + \lambda_3 Av_3 = A(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3)$$

כלומר $u = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3$ פתרון של המערכת $Ax = 0$, אבל A הפיכה ולכן הפתרון היחיד של המערכת הוא $u = 0$ אז:

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 = 0$$

בסתירה לכך ש v_1, v_2, v_3 בת"ל.

2. נראה דוגמא נגדית:

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \ v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \ v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \ A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

16.2 דטרמיננטות

תזכורת

לכל מטריצה ריבועית $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ קיים מספר (סקלר) שנסמן $\text{det}(A) = |A| \in \mathbb{F}$.
לפני שנראה כיצד מחשבים אותו, מספר תכונות חשובות הן:

1. A הפיכה אמ"מ $\text{det}(A) \neq 0$.
2. כפליות הדטרמיננטה:

$$\text{det}(AB) = \text{det}(A)\,\text{det}(B)$$

בפרט, אם A הפיכה אז:

$$\text{det}(A^{-1})\,\text{det}(A) = \text{det}(A^{-1}A) = \text{det}(I_n) = 1$$

אז:

$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$$

.3

$$\det(A) = \det(A^t)$$

.4

$$\det(\lambda A) = \lambda^n \det(A)$$

דוגמא 16.2.1.

חישוב דטרמיננטה נעשה באופן ריקורסיבי, ההגדרה המדויקת של דטרמיננטה נלמדה בהרצאות, אנו נראה דוגמאות בלבד.

נתחיל במקרה של 2×2, אם $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ אז:

$$\det(A) = ac - bd$$

למשל:

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = 1 \cdot 4 - 2 \cdot 3 = -2$$

אם A היא $n \times n$, נבחר שורה או עמודה, ואז לכל איבר בה, נסמן את המינור של איבר זה ע"י מחיקת השורה או עמודה שלו, המינורים מטריצות $(n-1) \times (n-1)$ ואז נחבר את הדטרמיננטות שלהן כפול האיבר המחוק תחת הסימן הבא:

$$\begin{pmatrix} + & - & + & \dots \\ - & + & - & \dots \\ + & - & + & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

למשל:

.1

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

אז נפתח על פי השורה הראשונה:

$$\begin{aligned} \det(A) &= (+1)\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} + (-2)\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \\ &= 2 - 3 - 2(2-1) + 3(3-1) = 3 \end{aligned}$$

.2

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

נבחר את העמודה השלישית ונפתח סביבה:

$$\det(A) = +3\det\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 3 & 1 & -1\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}$$

את $\det\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 3 & 1 & -1\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}$ נחשב עפ"י השורה הראשונה:

$$\det\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 3 & 1 & -1\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}3 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix} = 2+3-1 = 4$$

אז:

$$\det(A) = +3\det\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 3 & 1 & -1\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix} = 3\cdot 4 = 12$$

תרגיל 16.2.2.

האם מתקיים $\det(A+B) = \det(A) + \det(B)$?

פתרון:

לא, נראה דוגמא נגדית:

$$A = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$$

אז $\det(A) + \det(B) = 2$, אבל:

$$\det(A+B) = \det\left(\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\right) = \det\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix} = 0$$

תרגיל 16.2.3.

מצאו עבור אילו $t \in \mathbb{R}$ המטריצה הבאה הפיכה?

$$A = \begin{pmatrix}1 & t & 3\\ t & 1 & 2\\ 0 & t & 4\end{pmatrix}$$

פתרון:

נחשב את $\det(A)$ בעזרת השורה הראשונה:

$$\det(A) = 1\det\begin{pmatrix}1 & 2\\ t & 4\end{pmatrix} - t\det\begin{pmatrix}t & 3\\ t & 4\end{pmatrix} = 4-2t-t(4t-3t) = -t^2-2t+4$$

כלומר, A לא הפיכה אמ"מ $-t^2-2t+4=0$ אמ"מ $t=\frac{-2\pm\sqrt{20}}{-2}$.

תרגיל 16.2.4.

תהא A_n מטרציה מסדר $n\times n$ עם 2 על האלכסון הראשי ו1 מתחת/מעל האלכסון הראשי:

$$A_1=(2)\,,\ A_2=\begin{pmatrix}2&1\\1&2\end{pmatrix},\ A_3=\begin{pmatrix}2&1&0\\1&2&1\\0&1&2\end{pmatrix},\ A_4=\begin{pmatrix}2&1&0&0\\1&2&1&0\\0&1&2&1\\0&0&1&2\end{pmatrix}$$

חשבו את $\det(A_n)$.

<u>פתרון:</u>

חישוב ישיר ייתן לנו כי:

$$\det(A_1)=2,\quad \det(A_2)=3,\quad \det(A_3)=4$$

וננחש כי $\det(A_n)=n+1$, נוכיח זאת באינדוקציה, נשים לב כי:

$$A_n=\begin{pmatrix}2&1&0&\dots&0\\1&2&1&\dots&0\\0&1&&&\\ \vdots&\vdots&&A_{n-2}&\\0&0&&&\end{pmatrix}$$

כלומר:

$$\det(A_n)=2\det(A_{n-1})-\det\begin{pmatrix}1&1&\dots&0\\0&&&\\ \vdots&&A_{n-2}&\\0&&&\end{pmatrix}=2\det(A_{n-1})-\det(A_{n-2})$$

את מקרה הבסיס ראינו, יהא $n\geq 3$, ונניח כי לכל $m<n$ מתקיים:

$$\det A_m = m+1$$

אז:

$$\det(A_n)=2\det(A_{n-1})-\det(A_{n-2})=2((n-1)+1)-((n-2)+1)=2n-(n-1)=n+1$$

וסיימנו.

16.2.1 השפעת דירוג על דטרמיננטות

תזכורת

תהא A מטריצה ריבועית, פעולות הדירוג משפיעות על $\det(A)$ בצורה הבאה:

1. החלפת שורה מכפילה את הדטרמיננטה ב-1.
2. הכפלת שורה ב$\lambda \in \mathbb{F}$ מכפילה את הדטרמיננטה בλ. לכן הכפלת המטריצה בסקלר מכפילה את הדטרמיננטה בסקלר בחזקת כמות
3. הוספת לשורה כל שורה אחרת כפול כל סקלר לא משנה את הדטרמיננטה.

בנוסף, אם A משולשת (עליונה או תחתונה) אז $\det(A)$ שווה למכפלת האיברים באלכסון.

הערה

נשים לב כי מהתכונה השנייה אנו יכולים להסיק את תכונה 4 בתזכורת הקודמת, שהכפלת מטריצה $n \times n$ בסקלר λ מכפילה את כל הדטרמיננטה בλ^n.

תרגיל 16.2.5.

חשבו את

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 6 & 12 \\ 0 & 2 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 3 & 10 \end{pmatrix}$$

פתרון:
נבצע פעולות דירוג:

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 6 & 12 \\ 0 & 2 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 3 & 10 \end{pmatrix} = -\det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 & 12 \\ 0 & 0 & 3 & 10 \end{pmatrix} = -2\det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 3 & 10 \end{pmatrix}$$

$$= -2\det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 3 & 10 \end{pmatrix} = -2\det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = -2(1\cdot 2\cdot 3\cdot 4) = -48$$

תרגיל 16.2.6.

הוכיחו או הפריכו:

1. קיימת $A \in \mathbb{R}^{5\times 5}$ כך ש:
$$A^{2025} = -3I_5$$

2. קיימת $A \in \mathbb{R}^{9\times 9}$ כך ש:
$$A^{2024} = -2I_9$$

פתרון:

1. נבחין כי:
$$\alpha = \sqrt[2025]{-3} = -\sqrt[2025]{3} \in \mathbb{R}$$
היות ו 2025 אי-זוגי.
לכן המטריצה $A = \alpha I_5$ תקיים:
$$A^{2025} = (\alpha I_5)^{2025} = \alpha^{2025}(I_5)^{2025} = -3I_5$$

2. נניח בשלילה שקיימת מטריצה כזאת, אז:
$$(\det(A))^{2024} = \det(A^{2024}) = \det(-2I_9) = (-2)^9 \det(I_9) = (-2)^9 = -2^9 = -512$$
כלומר:
$$\det(A) = \sqrt[2024]{-512} \notin \mathbb{R}$$
אבל A מטריצה ממשית, ולכן $\det(A) \in \mathbb{R}$, שזו סתירה.

אין תרגיל בית להגשה השבוע - חג שמח!

17.1 תרגילים לא להגשה

1. תהיי $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ הפיכה כך שסכום כל שורה הוא $c \neq 0$, הוכיחו כי סכום האיברים בכל שורה ב A^{-1} הינו $\frac{1}{c}$.

2. מצאו עבור אילו ערכי $a \in \mathbb{R}$ המטריצה הבאה הפיכה (ללא שימוש בדטרמיננטה):

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 3 \\ a^2 & 2a-2 & 1 \\ a & 1 & a \end{pmatrix}$$

3. יהיו $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ מטריצות הפיכות, הוכיחו כי

$$D = A^{2024}B^t(32C)BCBC$$

הפיכה, ומצאו את ההפכית שלי.

17.2 פתרונות לתרגילים לא להגשה

1. נסמן $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$, ונשים לב כי מתקיים:

$$A\vec{v} = c\vec{v}$$

נפעיל את המטריצה ההופכית על שני האגפים ונקבל:

$$\vec{v} = A^{-1}A\vec{v} = A^{-1}c\vec{v} = cA^{-1}\vec{v}$$

נזכר כי $c \neq 0$ ולכן:

$$A^{-1}\vec{v} = \frac{1}{c}\vec{v}$$

התבוננות בהגדרת כפל מטריצות ייראה כי זה גורר כי סכום האיברים בכל שורה של A^{-1} הינו $\frac{1}{c}$.

2. אנו יודעים כי A הפיכה אמ"מ דרגתה 3, אז נדרג:

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 3 \\ a^2 & 2a-2 & 1 \\ a & 1 & a \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1 \to \frac{1}{3}R_1} \begin{pmatrix} 1 & \frac{2}{3} & 1 \\ a^2 & 2a-2 & 1 \\ a & 1 & a \end{pmatrix} \xrightarrow[a\neq 0]{R_2 \to R_2 - a^2 R_1} \begin{pmatrix} 1 & \frac{2}{3} & 1 \\ 0 & 2a-2-\frac{2a^2}{3} & 1-a^2 \\ a & 1 & a \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_3\to R_3-aR_1}\begin{pmatrix}1 & \frac{2}{3} & 1\\ 0 & 2a-2-\frac{2a^2}{3} & 1-a^2\\ 0 & 1-\frac{2a}{3} & 0\end{pmatrix}\xrightarrow{R_2\leftrightarrow R_3}\begin{pmatrix}1 & \frac{2}{3} & 1\\ 0 & 1-\frac{2a}{3} & 0\\ 0 & 2a-2-\frac{2a^2}{3} & 1-a^2\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[a\neq\frac{3}{2}]{R_2\to\frac{1}{1-\frac{2a}{3}}R_2}\begin{pmatrix}1 & \frac{2}{3} & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 2a-2-\frac{2a^2}{3} & 1-a^2\end{pmatrix}$$

בדיקה מהירה תראה כי $2a-2-\frac{2a^2}{3}$ לא מתאפס לכל $a\in\mathbb{R}$, ולכן:

$$\begin{pmatrix}1 & \frac{2}{3} & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 2a-2-\frac{2a^2}{3} & 1-a^2\end{pmatrix}\xrightarrow{R_3\to\frac{1}{2a-2-\frac{2a^2}{3}}R_3}\begin{pmatrix}1 & \frac{2}{3} & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & \frac{1-a^2}{2a-2-\frac{2a^2}{3}}\end{pmatrix}\xrightarrow{R_3\to R_3-R_2}\begin{pmatrix}1 & \frac{2}{3} & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & \frac{1-a^2}{2a-2-\frac{2a^2}{3}}\end{pmatrix}$$

נשים לב כי עבור $a=\pm1$, דרגת המטריצה לא 3, ולכן היא אינה הפיכה, עבור $a=0$, נציב במטריצה שקיבלנו לפני שהכפלנו שורה באפס ונקבל:

$$\begin{pmatrix}1 & \frac{2}{3} & 1\\ a^2 & 2a-2 & 1\\ a & 1 & a\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & \frac{2}{3} & 1\\ 0 & -2 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}$$

וברור שדרגתה 3, ולכן היא הפיכה, דבר דומה נעשה עבור $a=\frac{3}{2}$:

$$\begin{pmatrix}1 & \frac{2}{3} & 1\\ 0 & 1-\frac{2a}{3} & 0\\ 0 & 2a-2-\frac{2a^2}{3} & 1-a^2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & \frac{2}{3} & 1\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & \star & \star\end{pmatrix}$$

קיבלנו שורת אפסים, ולכן המט' אינה הפיכה.
סה"כ, A הפיכה לכל $a\in\mathbb{R}$ פרט ל $a=\pm1,\frac{3}{2}$.

3. ראשית, נזכר כי היות ו A,B הפיכות, גם A^{2024},B^t כאשר ההפוכית שלהן הינו $(A^{-1})^{2024},(B^{-1})^t$ בהתאמה, שנית, נשים לב כי:

$$\begin{aligned}D\left(\frac{1}{32}C^{-1}B^{-1}C^{-1}B^{-1}C^{-1}(B^t)^{-1}(A^{-1})^{2024}\right)&=\frac{1}{32}DC^{-1}B^{-1}C^{-1}B^{-1}C^{-1}(B^t)^{-1}(A^{-1})^{2024}\\&=\frac{1}{32}A^{2024}B^t(32C)BCBCC^{-1}B^{-1}C^{-1}B^{-1}C^{-1}(B^t)^{-1}(A^{-1})^{2024}\\&=\frac{1}{32}A^{2024}B^t(32C)BCBB^{-1}C^{-1}B^{-1}C^{-1}(B^t)^{-1}(A^{-1})^{2024}\\&=\frac{1}{32}A^{2024}B^t(32C)BCC^{-1}B^{-1}C^{-1}(B^t)^{-1}(A^{-1})^{2024}\\&=\frac{1}{32}A^{2024}B^t(32C)BB^{-1}C^{-1}(B^t)^{-1}(A^{-1})^{2024}\\&=\frac{1}{32}A^{2024}B^t(32C)C^{-1}(B^t)^{-1}(A^{-1})^{2024}\\&=\frac{32}{32}A^{2024}B^t(B^t)^{-1}(A^{-1})^{2024}\\&=A^{2024}(A^{-1})^{2024}=I\end{aligned}$$

כלומר, D הפיכה ומתקיים $D^{-1}=\frac{1}{32}C^{-1}B^{-1}C^{-1}B^{-1}C^{-1}(B^t)^{-1}(A^{-1})^{2024}$.

תרגול עשירי

18.1 שובה של הדטרמיננטה

18.1.1 מטריצה צמודה (Adjoint)

תזכורת

תהא $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ מטריצה ריבועית הפיכה, נסמן ב $M_{i,j}$ את הדט' של המטריצה $(n-1)\times(n-1)$ שנוצרת ע"י מחיקת השורה i ועמודה j, אז נגדיר את המטריצה הבאה:

$$\text{adj}(A) \in \mathbb{R}^{n\times n}$$

על ידי:

$$[\text{adj}(A)]_{j,i} = (-1)^{i+j} M_{i,j}$$

שימו לב לכך שהאינדקסים הפוכים! נוכל גם לכתוב:

$$[\text{adj}(A)^t]_{i,j} = (-1)^{i+j} M_{i,j}$$

מתקיימים:

1. $$\text{adj}(AB) = \text{adj}(B)\,\text{adj}(A)$$

2. $$\text{adj}(A^t) = (\text{adj}(A))^t$$

3. $$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\,\text{adj}(A)$$

הערה

התכונה האחרונה היא הסיבה העיקרית ש$\text{adj}(A)$ מעניינת אותנו, היא מאפשרת לנו לחשב את קאורדינטה מסוימת של A^{-1} ללא מציאת כולה.

תרגיל 18.1.1.

תהא:

$$\mathbb{R}^{2024\times 2024} \ni A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & 2024 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

הוכיחו כי A הפיכה ומצאו את $[A^{-1}]_{1,1}$.

פתרון:
ראשית, נזכר שראינו בהרצאה שהדט' של מטריצה משולשת עליונה הינה מכפלת אברי האלכסון, כלומר $\det(A) = 1$ ולכן A הפיכה, שנית:

$$M_{1,1} = \det I_{2023} = 1$$

כלומר:

$$\text{adj}(A)_{1,1} = 1$$

כלומר:

$$[A^{-1}]_{1,1} = \frac{1}{1} M_{1,1} = \det I_{2023} = 1$$

18.1.2 כלל קרמר

תזכורת

כלל קרמר תהא A מטריצה ריבועית הפיכה, ותהא מערכת המשוואות:

$$A\vec{x} = \vec{b}$$

נסמן ב $A_k^{\vec{b}}$ את המטריצה המתקבלת ע"י החלפת עמודה k בוקטור b, נגדיר:

$$d_k = \frac{\det(A_k^{\vec{b}})}{\det A}$$

אז $D = \begin{pmatrix} d_1 \\ \vdots \\ d_n \end{pmatrix}$ פתרון למערכת.

תרגיל 18.1.2.

פתרו את המשוואה הבאה בעזרת כלל קרמר:

$$\begin{cases} 2x+y-z=3 \\ x+y+z=1 \\ x-2y-3z=4 \end{cases}$$

<u>פתרון:</u>
נכתוב כמטריצות:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

אז:

$$\text{det}(A) = 5 \neq 0 \implies A \text{ הפיכה}$$

$$\text{det}(A_1^{\vec{b}}) = \text{det}\begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 4 & -2 & -3 \end{pmatrix} = 10 \implies d_1 = \frac{10}{5} = 2$$

$$\text{det}(A_2^{\vec{b}}) = \text{det}\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & -3 \end{pmatrix} = -5 \implies d_2 = \frac{-5}{5} = -1$$

$$\text{det}(A_3^{\vec{b}}) = \text{det}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 4 \end{pmatrix} = 0 \implies d_3 = \frac{0}{5} = 0$$

אז:

$$D = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

פתרון של המערכת.

18.1.3 קריאה עצמית - מטריצת ונדרמונדה

תרגיל 18.1.3.

יהיו $x_0, ..., x_n \in \mathbb{R}$, נסמן:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \dots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^n \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(n+1)\times(n+1)}$$

מטריצה זאת נקראת מטריצת Vandermonde ויש לה שימושים רבים.
מתקיים כי $\det A = \prod_{1\le i<j\le n}(x_i - x_j)$, הוכיחו זאת עבור $n = 2$.

פתרון:
עבור $n = 2$ מתקיים כי:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 \\ 1 & x_1 & x_1^2 \\ 1 & x_2 & x_2^2 \end{pmatrix}$$

נשתמש בפעולות דירוג:

$$\det A = \det \begin{pmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 \\ 1 & x_1 & x_1^2 \\ 1 & x_2 & x_2^2 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 \\ 0 & x_1 - x_0 & x_1^2 - x_0^2 \\ 0 & x_2 - x_0 & x_2^2 - x_0^2 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} x_1 - x_0 & x_1^2 - x_0^2 \\ x_2 - x_0 & x_2^2 - x_0^2 \end{pmatrix}$$

נזכר בכך ש det כפלית בכל שורה בנפרד ונקבל כי:

$$\begin{aligned} \det(A) &= \det \begin{pmatrix} x_1 - x_0 & (x_1 - x_0)(x_1 + x_0) \\ x_2 - x_0 & (x_2 - x_0)(x_2 + x_0) \end{pmatrix} = (x_1 - x_0) \det \begin{pmatrix} 1 & x_1 + x_0 \\ x_2 - x_0 & (x_2 - x_0)(x_2 + x_0) \end{pmatrix} \\ &= (x_1 - x_0)(x_2 - x_0) \det \begin{pmatrix} 1 & x_1 + x_0 \\ 1 & x_2 + x_0 \end{pmatrix} = (x_1 - x_0)(x_2 - x_0)((x_2 + x_0) - (x_1 + x_0)) \\ &= (x_1 - x_0)(x_2 - x_0)(x_2 - x_1) \end{aligned}$$

תרגיל 18.1.4.

יהיו $n+1$ נקודות ב $\mathbb{R}^2$, $(x_0,y_0),...,(x_n,y_n)$ כך ש $i \neq j \Rightarrow x_i \neq x_j$, הוכיחו כי קיים פולינום ממעלה n:

$$p(x) = a_0 + a_1 x + ... + a_n x^n$$

כך ש:

$$\forall i, p(x_i) = y_i$$

<u>פתרון:</u>
נשים לב כי אנו מחפשים $a_0,...,a_n \in \mathbb{R}$ כך ש:

$$\begin{cases} p(x_0) = a_0 + a_1 x_0 + ... + a_n x_0^n = y_0 \\ p(x_1) = a_0 + a_1 x_1 + ... + a_n x_1^n = y_1 \\ \vdots \\ p(x_n) = a_0 + a_1 x_n + ... + a_n x_n^n = y_n \end{cases}$$

כלומר:

$$\begin{pmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & ... & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & ... & x_1^n \\ 1 & x_2 & x_2^2 & ... & x_2^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & ... & x_n^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

אנו יודעים כי קיימת למערכת פתרון יחיד אמ"מ $\det(A) \neq 0$, אבל ראינו כי:

$$\det A = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_i - x_j)$$

אבל כל ה $x_0,...,x_n$ שונים ולכן:

$$\det(A) \neq 0$$

וסיימנו.

18.2 העתקות לינאריות

תזכורת

יהיו V, W מרחבים וקטורים מעל אותו שדה $\mathbb{F}$. פונקציה $T : V \to W$ תקרא העתקה לינארית אם:

1.
$$\forall v_1, v_2 \in V, \quad T(v_1 + v_2) = T(v_1) + T(v_2)$$

2.
$$\forall \lambda \in \mathbb{F}, \quad v \in V, \quad T(\lambda v) = \lambda T(v)$$

או לחילופין:
$$\forall \lambda \in \mathbb{F},\ v_1, v_2 \in V, \quad T(\lambda v_1 + v_2) = \lambda T(v_1) + T(v_2)$$

לקבוצת כל האיברים שנשלחים ל0 נקרא הגרעין של ההעתקה, ולאוסף כל האיברים שהתקבלו בW ע"י T נקרא התמונה של T, ונסמן:

$$\text{ker}(T) = \{v \in V \mid T(v) = 0\} \subset V$$

$$\text{Im}(T) = \{T(v) \mid v \in V\} \subset W$$

תזכורת

תהיי העתקה לינארית $T : V \to W$. נזכיר כי התחום של T הוא V, וכי הטווח הוא W. נאמר כי:

1. T מונומורפיזם אם הגרעין שלה הוא טריוואלי. באופן שקול, אם T חח"ע.
2. T אפימורפיזם אם התמונה שלה היא כל הטווח.
3. T איזומורפיזם אם היא מונומורפיזם ואפימורפיזם, כלומר חח"ע ועל.
4. T אנדומורפיזם אם התחום שווה לטווח
5. T אוטומורפיזם אם היא איזומורפיזם ואנדומורפיזם.

הערה

שימו ♡, העתקה לינארית מעבירה 0 ל0 ונגדי ולנגדי, כלומר:

$$\forall v \in V, \qquad T(-v) = -T(v), \qquad T(0_V) = 0_W$$

בפרט $\text{ker}(T) \ni 0_V$, וגם $\text{Im}(T) \ni 0_W$.

תרגיל 18.2.1.

עבור העתקות הבאות, בדקו האם מדובר בהעתקה לינארית, ואם כן מצאו את הגרעין והתמונה.

.1
$$T:\mathbb{R}^{2\times 2}\to\mathbb{R}^{2\times 2},\qquad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\mapsto\begin{pmatrix} a & c+d \\ 1 & b \end{pmatrix}$$

.2
$$T:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^3,\qquad T(x)=\begin{pmatrix} x \\ x \\ x \end{pmatrix}$$

.3
$$T:\mathbb{R}^{2\times 2}\to\mathbb{R}^{2\times 2},\qquad A\mapsto A^2$$

4. עבור $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ מטריצה מסדר 2×3 נגדיר את ההעתקה:
$$T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2,\qquad T(v)=Av$$

פתרון:

1. זו לא העתקה לינארית כי $T(0)\neq 0$.
2. ראשית נבדוק שזו העתקה לינארית. יהיו $\lambda\in\mathbb{F},x_1,x_2\in\mathbb{R}$. נחשב:
$$T(\lambda x_1+x_2)=\begin{pmatrix} \lambda x_1+x_2 \\ \lambda x_1+x_2 \\ \lambda x_1+x_2 \end{pmatrix}=\lambda\begin{pmatrix} x_1 \\ x_1 \\ x_1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} x_2 \\ x_2 \\ x_2 \end{pmatrix}=\lambda T(x_1)+T(x_2)$$
נבדוק מהו הגרעין של ההעתקה. מהגדרה אנחנו מחפשים את כל ה $x\in\mathbb{R}$ כך ש:
$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}=T(x)=\begin{pmatrix} x \\ x \\ x \end{pmatrix}$$
וזה נכון רק עבור $x=0$, כלומר הגרעין של T הוא $\{0\}$. נחשב את התמונה:
$$\mathrm{Im}(T)=\{T(x)\mid x\in\mathbb{R}\}=\left\{\begin{pmatrix} x \\ x \\ x \end{pmatrix}\middle| x\in\mathbb{R}\right\}=\left\{x\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\middle| x\in\mathbb{R}\right\}=\mathrm{span}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$$
3. זו לא העתקה לינארית, כי אין לינאריות בכפל בסקלר:
$$T(2I)=4I^2=4I$$
$$2T(I)=2I^2=2I$$

4. נבחין כי כפל מטריצות הוא לינארי, ולכן בפרט גם כפל מטריצה בוקטור לינארי, כלומר:

$$\forall\lambda\in\mathbb{F},\ v_1,v_2\in V\quad T(\lambda v_1+v_2)=A(\lambda v_1+v_2)=\lambda Av_1+Av_2=\lambda T(v_1)+T(v_2)$$

נבדוק מהו הגרעין של ההעתקה. מהגדרה אנחנו מחפשים את כל ה $x\in\mathbb{R}$ כך ש:

$$\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}=0=T\begin{pmatrix}\lambda_1\\\lambda_2\\\lambda_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&3\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda_1\\\lambda_2\\\lambda_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda_1+2\lambda_2+3\lambda_3\\\lambda_3\end{pmatrix}$$

זו ממ"ל שהפתרון שלה הוא:

$$\lambda_3=0,\lambda_1=-2\lambda_2$$

כלומר:

$$\text{ker}(T)=\left\{\begin{pmatrix}\lambda_1\\\lambda_2\\\lambda_3\end{pmatrix}\,\middle|\,\lambda_1=-2\lambda_2,\ \lambda_3=0\right\}$$

$$=\left\{\begin{pmatrix}-2\mu\\\mu\\0\end{pmatrix}\,\middle|\,\mu\in\mathbb{R}\right\}=\left\{\mu\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix}\,\middle|\,\mu\in\mathbb{R}\right\}=\text{span}\left\{\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix}\right\}$$

נרצה לראות שהתמונה של ההעתקה היא $\mathbb{R}^2$, כלומר שלכל $a,b\in\mathbb{R}$ קיימים $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ כך ש:

$$\begin{pmatrix}\lambda_1+2\lambda_2+3\lambda_3\\\lambda_3\end{pmatrix}=T\begin{pmatrix}\lambda_1\\\lambda_2\\\lambda_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$$

זו ממ"ל במשתנים $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ שנוכל לפתור ע"י דירוג מטריצת המקדמים המורחבת, או שנבחין כי $\lambda_1=a-3b,\lambda_2=0,\lambda_3=b$ הוא פתרון של המערכת.

תזכורת

נבחין כי התמונה והגרעין של כל העתקה הם תתי מרחבים וקטורים בעצמם.
זה יאפשר לנו להשתמש בשיקולי מימדים ובתכונות של תתי מרחבים שלמדנו עד כה כדי להבין/להוכיח דברים על ההעתקה.

18.3 בניית העתקות לינאריות

תזכורת

אם $B=\{v_i\}_{i=1}^n$ בסיס ל V, אז לכל $w_1,...,w_n\in W$, קיימת העתקה לינארית יחידה המקיימת:

$$T(v_1)=w_1,....,T(v_n)=w_n$$

תרגיל 18.3.1.

מצאו העתקה לינארית $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^4$ המקיימת

$$\ker T=\operatorname{span}\left(\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right).\qquad \operatorname{Im}T=\operatorname{span}\left(\begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}\right)$$

<u>פתרון:</u>

נשלים את $f_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ לבסיס של $\mathbb{R}^3$, למשל על ידי:

$$f_2=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},f_3=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$$

ונגדיר:

$$T(f_1)=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix},T(f_2)=\begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix},T(f_3)=\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}$$

וסיימנו! אנחנו יודעים שקיימת העתקה יחידה שמקיימת זאת, והיא תקיים את הנדרש:

$$T(af_1+bf_1+cf_3)=aT(f_1)+bT(f_2)+cT(f_3)=b\begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix}+c\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}$$

ולכן מתקיים הנדרש (מודע?).
נשים לב כי זאת לא העתקה היחידה שמקיימת זאת, וזה בא לידי ביטוי בבחירת הבסיס.

תרגיל 18.3.2.

האם קיימת העתקה לינארית $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}_2[x]$ כך ש:

$$T\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}=3x^2+3,\qquad T\begin{pmatrix}0\\2\\0\end{pmatrix}=5x,\qquad T\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}=x^2+x+1$$

אם כן מצאו את $\ker T,\operatorname{Im} T$.

<u>פתרון:</u>
דבר ראשון, אנו יודעים שאם v_1,v_2,v_3 בסיס ל$\mathbb{R}^3$ אז קיימת העתקה כזאת. ואנו יודעים שהוקטורים האלה בסיס אמ"מ הם בת"ל, נבדוק זאת:

$$\lambda_1\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}+\lambda_2\begin{pmatrix}0\\2\\0\end{pmatrix}+\lambda_3\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda_1+\lambda_3\\2\lambda_1+2\lambda_2+\lambda_3\\3\lambda_1+2\lambda_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

מהמשוואה הראשונה והשלישית $\lambda_1=\lambda_3=0$ אז מהמשוואה השנייה $\lambda_2=0$, כלומר הווקטורים בת"ל ולכן קיימת התעקה כזאת.
נשים לב כי $3x^2+3,5x,x^2+x+1$ קבוצה בת"ל (נשאיר זאת כתרגיל) ולכן משיקולי מימד בסיס של $\mathbb{R}_2[x]$ ולכן $\operatorname{Im} T=\mathbb{R}_2[x]$ וגם $\ker T=\{0\}$.

תרגיל 18.3.3.

האם קיימת העתקה לינארית $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2$ כך ש:

$$T\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix},\quad T\begin{pmatrix}0\\2\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix},\quad T\begin{pmatrix}-5\\0\\-15\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\5\end{pmatrix}$$

אם כן מצאו את $\ker T,\operatorname{Im} T$.

<u>פתרון:</u>
נשים לב כי:

$$\begin{pmatrix}-5\\0\\-15\end{pmatrix}=-5\left(\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0\\2\\0\end{pmatrix}\right)$$

אז אם הייתה קיימת העתקה כזאת, אז מלינאריות:

$$T\begin{pmatrix}-5\\0\\-15\end{pmatrix}=T\left(-5\left(\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0\\2\\0\end{pmatrix}\right)\right)=-5T\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}+5T\begin{pmatrix}0\\2\\0\end{pmatrix}=-5\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}+5\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\\5\end{pmatrix}$$

אבל, עפ"י הנתון מתקיים:

$$T\begin{pmatrix}-5\\0\\-15\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\5\end{pmatrix}$$

אז לא קיימת העתקה לינארית כזאת.

תרגיל 18.3.4.

תרגיל למחשבה - מה היה קורה אילו הנתונים היו:

$$T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2 \quad ; \quad T\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}, \quad T\begin{pmatrix}0\\2\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}, \quad T\begin{pmatrix}-5\\0\\-15\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\\5\end{pmatrix}$$

<u>פתרון:</u>
רמז: הייתה קיימת כזו העתקה, אבל היינו צריכים להשלים לבסיס, כי אחד הנתונים "מיותר", מכיוון שהוא צירוף לינארי של הנתונים האחרים, והעתקות לינאריות משמרות צירופים לינאריים.

18.3.1 קשר בין המרחב המאפס, מרחב העמודות והעתקות לינאריות

תזכורת

עבור ההעתקה הלינארית הבאה:

$$T:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m \quad v\mapsto Av \quad ; \quad A\in\mathbb{R}^{m\times n}$$

נבחין כי המרחב המאפס הוא הגרעין של ההעתקה, ומרחב העמודות הוא התמונה של ההעתקה. זהו לא צירוף מקרים, אלא הסבר לבנייה המסובכת יחסית של כפל מטריצות. למעשה, במובן כלשהו כל העתקה לינארית יכולה להכתב בצורה הזו, אבל עוד על זה בתרגול הבא (:

תרגיל 18.3.5.

תהיי A המטריצה הבאה:

$$A=\begin{pmatrix}1&2&0\\4&8&0\\0&0&2\end{pmatrix}$$

נגדיר את תת המרחב הבא:

$$\mathcal{U}:=\{B\in\mathbb{R}^{3\times3}\mid AB=0\}$$

מצאי מימד למרחב.

פתרון:
להוכיח ש$\mathcal{U}$ הינו תת מרחב ישאר כתרגיל (נובע מתכונת פילוג של כפל מטריצות).
נבחין כי הדרגה של המטריצה היא 2, ולכן המימד של המרחב המאפס הוא $3-2=1$, בפרט קיים $v\in\mathbb{R}^3$ כך ש:

$$N(A)=\text{span}_{\mathbb{R}}(v)$$

$B\in\mathcal{U}$ מקיימת:

$$0=AB=A\begin{pmatrix}| & | & |\\ C_1 & C_2 & C_3\\ | & | & |\end{pmatrix}\Longrightarrow AC_1=0\ \ \&\ \ AC_2=0\ \ \&\ \ AC_3=0$$

כלומר מהגדרה:

$$C_1,C_2,C_3\in N(A)$$

לכן כל מטריצה ב $\mathcal{U}$ היא מהצורה:

$$B=\begin{pmatrix}| & | & |\\ \lambda_1 v & \lambda_2 v & \lambda_3 v\\ | & | & |\end{pmatrix}=\lambda_1\begin{pmatrix}| & 0 & 0\\ v & 0 & 0\\ | & 0 & 0\end{pmatrix}+\lambda_2\begin{pmatrix}0 & | & 0\\ 0 & v & 0\\ 0 & | & 0\end{pmatrix}+\lambda_3\begin{pmatrix}0 & 0 & |\\ 0 & 0 & v\\ 0 & 0 & |\end{pmatrix}$$

כלומר:

$$\mathcal{U}\subseteq\text{span}\left\{\begin{pmatrix}| & 0 & 0\\ v & 0 & 0\\ | & 0 & 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0 & | & 0\\ 0 & v & 0\\ 0 & | & 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0 & 0 & |\\ 0 & 0 & v\\ 0 & 0 & |\end{pmatrix}\right\}$$

מצד שני נבחין כי:

$$A\begin{pmatrix}| & 0 & 0\\ v & 0 & 0\\ | & 0 & 0\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}0 & | & 0\\ 0 & v & 0\\ 0 & | & 0\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}0 & 0 & |\\ 0 & 0 & v\\ 0 & 0 & |\end{pmatrix}=0$$

ולכן:

$$\begin{pmatrix}| & 0 & 0\\ v & 0 & 0\\ | & 0 & 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0 & | & 0\\ 0 & v & 0\\ 0 & | & 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0 & 0 & |\\ 0 & 0 & v\\ 0 & 0 & |\end{pmatrix}\in\mathcal{U}$$

ומסגירות $\mathcal{U}$ לצירופים לינארים:

$$\text{span}\left\{\begin{pmatrix}| & 0 & 0\\ v & 0 & 0\\ | & 0 & 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0 & | & 0\\ 0 & v & 0\\ 0 & | & 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0 & 0 & |\\ 0 & 0 & v\\ 0 & 0 & |\end{pmatrix}\right\}\subseteq\mathcal{U}$$

לכן זוהי קבוצה פורשת. היא גם בת"ל (הושאר כתרגיל, נובע מההגדרה) ולכן היא בסיס, כלומר המימד הוא 3.

18.3.2 משפט המימדים של העתקות לינאריות

תזכורת

יהיו V, W מרחבים וקטורים נוצרים סופית מעל שדה $\mathbb{F}$, ו־$T : V \to W$ העתקה לינארית, אז:

$$\dim(\ker(T)) + \dim(\operatorname{Im}(T)) = \dim(V)$$

הערה

מקרה פרטי של משפט המימדים, בו נשתמש הרבה הוא במקרה ש:

$$\dim W = \dim V$$

ואז:

$$\operatorname{Im} T = W \iff \ker(T) = \{0\}$$

כלומר, במקרה ש־$\dim V = \dim W$, אז: T חח"ע אמ"מ T על אמ"מ T איזומורפיזם.

תרגיל 18.3.6.

עבור העתקות הלינאריות הבאות, בדקו האם הן חח"ע ועל:

1. $$T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \qquad \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 4 \\ 1 & 4 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$$
2. $$T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \qquad \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$$
3. $$T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2 \qquad \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$$

<u>פתרון:</u>

1. לא. נבחין כי משיקולי מימדים, חח"ע אמ"מ על. מצד שני, הדרגה של המטריצה אינה מלאה, ולכן המימד של המרחב המאפס שונה מאפס, כלומר המרחב המאפס אינו טריוואלי, ולכן ההעתקה אינה חח"ע, שכן הגרעין הוא המרחב המאפס.
2. הדרגה מלאה, ולכן המטריצה הפיכה, כלומר ההעתקה הפיכה ולכן בפרט חח"ע ועל. ניתן להוכיח גם באופן דומה לסעיף הקודם (משיקולי מימדים המימד של המרחב המאפס הוא 0), או להבחין ישירות כי לכל וקטור קיים מקור.

3. כעת לא ניתן להשתמש בשיקולי מימדים ויש לבדוק בנפרד. נבחין כי הדרגה של המטריצה מלאה, אולם המימד של המרחב המאפס הוא 1, כלומר ההעתקה אינה חח"ע. מצד שני, המימד של התמונה הוא 2 ממשפט המימדים ולכן התמונה היא הכל כלומר ההעתקה על. ניתן גם היה לבדוק ישירות שיש לכל איבר מקור, כי לממ"ל המתאימה יש אינסוף פתרונות ולכן בפרט קיים מקור אחד.

תרגיל 18.3.7.

תהא העתקה:

$$T:\mathbb{R}_{10}[x]\to\mathbb{R}_9[x],\qquad T(p(x))=p'(x)$$

הוכיחו כי T לינארית, ומצאו את $\ker T, \operatorname{Im} T$.

פתרון:
לינאריות מתקבלת מיידית מחוקי גזירה:

$$(p(x)+\lambda q(x))'=p'(x)+\lambda q'(x)$$

עוד חוק מחדו"א שיעזור לנו הוא ש:

$$p'(x)=0 \iff p(x)=c,\quad c\in\mathbb{R}$$

כלומר:

$$\ker T=\{c\in\mathbb{R}_{10}[x] | c\in\mathbb{R}\}=\operatorname{span}(1)$$

שזה מרחב ממימד 1, אז ממשפט המימדים:

$$\dim\operatorname{Im} T=\dim\mathbb{R}_{10}[x]-\dim\ker T=11-1=10$$

אז $\operatorname{Im} T$ תמ"ו של מרחב ממימד 10 ממימד 10, ולכן הוא כל $\mathbb{R}_9[x]$.

תרגיל בית שמיני

19.1 תרגילים להגשה

תרגיל 19.1.1.

תהא $T : V \to W$ העתקה לינארית, הוכיחי או הפריכי:

1. אם T חח"ע, והקבוצה $S = \{v_1, ..., v_n\} \subset V$ בת"ל, אז גם $\{T(v_1), .., T(v_n)\}$ בת"ל.
2. אם T על, והקבוצה $S = \{v_1, ..., v_n\} \subset V$ בת"ל, אז גם $\{T(v_1), .., T(v_n)\}$ בת"ל.
3. אם T חח"ע, והקבוצה $S = \{v_1, ..., v_n\} \subset V$ פורשת את V, אז $\{T(v_1), .., T(v_n)\}$ פורשת את W.

תרגיל 19.1.2.

יהי V מ"ו ותהיי $T : V \to V$ העתקה לינארית שאינה העתקת האפס.
הוכיחי או הפריכי כי:

1. אם $\ker T = \operatorname{Im} T$ אז $T^2 = 0$.
2. אם $\dim V = 2$, $T^2 = 0$ אז $\ker T = \operatorname{Im} T$.
3. אם $\dim V \in \mathbb{N}$, $T^2 = 0$ אז $\operatorname{Im} T \subseteq \ker T$.
4. אם $\dim V \in \mathbb{N}$, $T^2 = 0$ אז $\operatorname{Im} T = \ker T$.

19.2 תרגילים לא להגשה

תרגיל 19.2.1.

תהא $T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ לינארית המוגדרת ע:"י:

$$T\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}ax+y\\2x-y\end{pmatrix}$$

עבור $a\in\mathbb{R}$, כך ש $\ker T=\operatorname{Im} T$, מצאו את a.

<u>פתרון:</u>
מכיוון שתתי המרחבים שווים, יש להם את אותו המימד, לכן ממשפט המימדים:

$$2\dim(\operatorname{Im} T)=2\dim(\ker T)=\dim(\operatorname{Im} T)+\dim(\ker T)=2$$

לכן:

$$\dim(\operatorname{Im} T)=1=\dim(\ker T)$$

נבחין כי כל הוקטורים בגרעין הם מהצורה:

$$=\begin{pmatrix}a&+1\\2&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}ax+y\\2x-y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$

אבל הגרעין ממימד 1, לכן קיים פתרון לא טריוואלי, כלומר הדרגה היא לפחות 1, כלומר:

$$\left\{\begin{pmatrix}a\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}\right\}$$

בת"ל, ולכן כפולה בסקלר אחד של השני, כלומר $a=-2$.

תרגיל 19.2.2.

הוכיחי כי הרכבה של העתקות חח"ע היא חח"ע.

<u>פתרון:</u>
יהיו המרחבים הוקטורים הבאים V_1,V_2,V_3 מעל $\mathbb{R}$, ויהיו ההעתקות הלינאריות הבאות

$$T_1:V_1\to V_2,T_2:V_2\to V_3$$

נניח כי ההעתקות חח"ע. נראה כי גם ההרכבה חח"ע.
נבחין כי ההרכבה היא העתקה לינארית מV_1 לV_3. יהי $x\in\ker(T_2\circ T_1)$, אזי:

$$T_2(T_1(x))=(T_2\circ T_1)(x)=0\Longrightarrow T_1(x)\in\ker(T_2)$$

מכיוון שT_2 היא חח"ע הגרעין שלה טריוואלי, ולכן:

$$T_1(x)=0\Longrightarrow x\in\ker(T_1)$$

לכן מכך שT_1 חח"ע, הגרעין שלה טריוואלי כלומר:

$$x = 0$$

לכן:

$$\ker(T_2 \circ T_1) \subseteq \{0\}$$

מצד שני, תמיד מתקיים להעתקות לינאריות:

$$\ker(T_2 \circ T_1) \supseteq \{0\}$$

ומהכלה דו"כ נובע שיוויון:

$$\ker(T_2 \circ T_1) = \{0\}$$

לכן מתנאי שקול לחד חד ערכיות של העתקות לינאריות, $T_2 \circ T_1$ חח"ע.

תרגיל 19.2.3.

הוכיחו כי $T : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{R}^4$ המוגדרת ע"י:

$$T\begin{pmatrix} a_1 + ib_1 \\ a_2 + ib_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 + a_2 + b_2 \\ a_1 + b_1 + a_2 \\ a_1 + b_1 \\ a_1 \end{pmatrix}$$

היא איזומורפיזם, ומצאו את ההופכית שלה.

<u>פתרון:</u>
נשים לב כי:

$$T\begin{pmatrix} a_1 + ib_1 \\ a_2 + ib_2 \end{pmatrix} = a_1\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + b_1\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + a_2\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + b_2\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

בדיקה מהירה תראה כי $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ בסיס ל$\mathbb{R}^4$, לכן ההעתקה על, ולכן הפיכה.

אנו יודעים כיצד T^{-1} פועל על בסיס זה, למשל:

$$T^{-1}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i \\ 0 \end{pmatrix}$$

ניקח וקטור כללי ב$\mathbb{R}^4$, ונכתוב אותו כצ"ל מעל הבסיס שלנו:

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_4 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \implies \lambda_1 = d \implies \lambda_2 = c - d$$

$$b = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 \implies \lambda_3 = b - d - (c - d) = b - c$$

$$a = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 = d + (c - d) + (b - c) + \lambda_4 = b + \lambda_4 \implies \lambda_4 = a - b$$

אז: T^{-1} ההעתקה:

$$T^{-1}\left(\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}\right) = T^{-1}\left(\lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_4 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$$

$$= \lambda_1 T^{-1}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) + \lambda_2 T^{-1}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) + \lambda_3 T^{-1}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right) + \lambda_4 T^{-1}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$$

$$= \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} i \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_4 \begin{pmatrix} 0 \\ i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d + (c - d)i \\ b - c + (a - b)i \end{pmatrix}$$

כלומר:

$$T^{-1}\left(\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} d + (c - d)i \\ b - c + (a - b)i \end{pmatrix}$$

ואכן, בדיקה מהירה תראה לנו כי:

$$T \circ T^{-1} = \mathsf{Id}_{\mathbb{R}^4}, \qquad T^{-1} \circ T = \mathsf{Id}_{\mathbb{C}^2}$$

תרגיל 19.2.4.

יהא $V = \mathbb{C}^n$, $T : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ המוגדרת על ידי:

$$\begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \overline{z_1} \\ \vdots \\ \overline{z_n} \end{pmatrix}$$

1. הראו כי T לא לינארית עבור V כמ"ו מעל $\mathbb{C}$.
2. הראו כי T לינארית עבור V כמ"ו מעל $\mathbb{R}$.

<u>פתרון:</u>

1. יהא $v = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$, נשים לב כי $T(v) = v$, אז:

$$T(iv) = T\begin{pmatrix} i \\ \vdots \\ i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -i \\ \vdots \\ -i \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} i \\ \vdots \\ i \end{pmatrix} = iv = iT(v)$$

2. יהא $\lambda \in \mathbb{R}$, $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^n$ נזכר כי $\lambda = \overline{\lambda}$, אז:

$$T(\lambda v) = T\begin{pmatrix} \lambda v_1 \\ \vdots \\ \lambda v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \overline{\lambda v_1} \\ \vdots \\ \overline{\lambda v_n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \overline{v_1} \\ \vdots \\ \lambda \overline{v_n} \end{pmatrix} = \lambda T(v)$$

את כך ש $T(v+w) = T(v) + T(w)$ לכל $v, w \in \mathbb{C}^n$ נקבל ישר מכך ש $\overline{z_1} + \overline{z_2} = \overline{z_1 + z_2}$, את הפרטים נשאיר כתרגיל.

תרגול אחת עשרה

20.1 משפט המימדים של העתקות לינאריות מכה שנית

תזכורת

יהיו V,W מרחבים וקטורים נוצרים סופית מעל שדה $\mathbb{F}$, ו$T:V\to W$ העתקה לינארית, אז:

$$\dim(\ker(T))+\dim(\operatorname{Im}(T))=\dim(V)$$

הערה

מקרה פרטי של משפט המימדים, בו נשתמש הרבה הוא במקרה ש:

$$\dim W=\dim V$$

ואז:

$$\operatorname{Im}T=W \iff \ker(T)=\{0\}$$

כלומר, במקרה ש$\dim V=\dim W$, אז: T חח"ע אמ"מ T על אמ"מ T איזומורפיזם.

תרגיל 20.1.1.

עבור העתקות הלינאריות הבאות, בדקו האם הן חח"ע ועל:

1. $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3 \qquad \begin{pmatrix}v_1\\v_2\\v_3\end{pmatrix}\mapsto\begin{pmatrix}1&2&4\\0&2&4\\1&4&8\end{pmatrix}\begin{pmatrix}v_1\\v_2\\v_3\end{pmatrix}$
2. $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3 \qquad \begin{pmatrix}v_1\\v_2\\v_3\end{pmatrix}\mapsto\begin{pmatrix}1&2&4\\0&2&4\\0&0&8\end{pmatrix}\begin{pmatrix}v_1\\v_2\\v_3\end{pmatrix}$
3. $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2 \qquad \begin{pmatrix}v_1\\v_2\\v_3\end{pmatrix}\mapsto\begin{pmatrix}1&2&4\\0&2&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}v_1\\v_2\\v_3\end{pmatrix}$

פתרון:

1. לא. נבחין כי משיקולי מימדים, חח״ע אמ״מ על. מצד שני, הדרגה של המטריצה אינה מלאה, ולכן המימד של המרחב המאפס שונה מאפס, כלומר המרחב המאפס אינו טריוואלי, ולכן ההעתקה אינה חח״ע, שכן הגרעין הוא המרחב המאפס.
2. הדרגה מלאה, ולכן המטריצה הפיכה, כלומר ההעתקה הפיכה ולכן בפרט חח״ע ועל. ניתן להוכיח גם באופן דומה לסעיף הקודם (משיקולי מימדים המימד של המרחב המאפס הוא 0), או להבחין ישירות כי לכל וקטור קיים מקור.
3. כעת לא ניתן להשתמש בשיקולי מימדים ויש לבדוק בנפרד. נבחין כי הדרגה של המטריצה מלאה, אולם המימד של המרחב המאפס הוא 1, כלומר ההעתקה אינה חח״ע. מצד שני, המימד של התמונה הוא 2 ממשפט המימדים ולכן התמונה היא הכל כלומר ההעתקה על. ניתן גם היה לבדוק ישירות שיש לכל איבר מקור, כי לממ״ל המתאימה יש אינסוף פתרונות ולכן בפרט קיים מקור אחד.

תרגיל 20.1.2.

תהא העתקה:

$$T:\mathbb{R}_{10}[x]\to\mathbb{R}_9[x],\qquad T(p(x))=p'(x)$$

הוכיחו כי T לינארית, ומצאו את $\ker T, \operatorname{Im} T$.

פתרון:
לינאריות מתקבלת מיידית מחוקי גזירה:

$$(p(x)+\lambda q(x))'=p'(x)+\lambda q'(x)$$

עוד חוק מחדו״א שיעזור לנו הוא ש:

$$p'(x)=0 \iff p(x)=c,\quad c\in\mathbb{R}$$

כלומר:

$$\ker T=\{c\in\mathbb{R}_{10}[x]|c\in\mathbb{R}\}=\operatorname{span}(1)$$

שזה מרחב ממימד 1, אז ממשפט המימדים:

$$\dim\operatorname{Im} T=\dim\mathbb{R}_{10}[x]-\dim\ker T=11-1=10$$

אז $\operatorname{Im} T$ תמ״ו של מרחב ממימד 10 ממימד 10, ולכן הוא כל $\mathbb{R}_9[x]$.

20.2 ווקטורי קאורדינטות

תזכורת

אם V מ"ו ממימד n מעל שדה $\mathbb{F}$, עם בסיס סדור $B=(v_1,..,v_n)$ כלומר אנו מקבעים את אברי הבסיס, אז קיימת העתקה:

$$T:V\to\mathbb{F}^n,\qquad v=\lambda_1v_1+...+\lambda_nv_n\mapsto\begin{pmatrix}\lambda_1\\ \vdots\\ \lambda_n\end{pmatrix}$$

העתקה הזאת לינארית:

$$v=\lambda_1v_1+...+\lambda_nv_n,\quad w=\eta_1v_1+...+\eta_nv_n,\quad \kappa\in\mathbb{F}$$

אז:

$$T(v+\kappa w)=\begin{pmatrix}\lambda_1+\kappa\eta_1\\ \vdots\\ \lambda_n+\kappa\eta_n\end{pmatrix}=T(v)+\kappa T(w)$$

והיא איזומורפיזם, כלומר $\operatorname{Im}T=\mathbb{F}^n$, $\ker T=\{0\}$, היא תלויה בבסיס הסדור B. ונסמן $[v]_B=T(v)$.
מסקנה מאוד חשובה מהמשפט הזה היא שכל מרחב וקטורי ממימד n מעל שדה $\mathbb{F}$ איזומורפי ל $\mathbb{F}^n$.

תרגיל 20.2.1.

יהי B הבסיס הבא (אין צורך להראות כי הוא בסיס):

$$v_1:=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},\quad v_2:=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\quad v_3:=\begin{pmatrix}1\\0\\3\end{pmatrix}$$

של $\mathbb{R}^3$. מצאי את וקטורי הקורדינטות של הוקטורים הבאים:

1. $u_1:=\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$
2. $u_2:=\begin{pmatrix}4\\6\\8\end{pmatrix}$

פתרון:

1. נבחין כי:

$$u_1 = 1 \cdot v_1 + 1 \cdot v_2 + 0 \cdot v_3$$

לכן מהגדרת וקטור קורדינטות:

$$[u_1]_B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

2. במקרה זה יהיה לנו יותר קשה לנחש. לכן, נרצה להציג את u_2 כצירוף לינארי של איברי הבסיס, בדיוק כמו שעשינו בעבר. כעת, חשוב לנו למצוא את המקדמים של הצירוף (מכיוון שזה בסיס יהיו כאלה, והם יהיו יחידים) ולא לבדוק האם ניתן להציג כצירוף. יהיו $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$ כך ש:

$$\begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 8 \end{pmatrix} = u_2 = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 = \begin{pmatrix} \alpha_1 + \alpha_3 \\ \alpha_1 + \alpha_2 \\ \alpha_1 + \alpha_3 \end{pmatrix}$$

כלומר מהגדרת שיוויון וקטורים איבר איבר נקבל את הממ"ל הבאה:

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_3 & = 4 \\ \alpha_1 + \alpha_2 & = 6 \\ \alpha_1 + \alpha_3 & = 8 \end{cases}$$

נדרג קנונית את מטריצת המקדמים המורחבת! שלה כדי לקבל את המקדמים:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 0 & 6 \\ 1 & 0 & 1 & 8 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

סה"כ, נקבל:

$$\alpha_1 = 2,\ \alpha_2 = 4,\ \alpha_3 = 2$$

ולכן וקטור הקורדינטות יהיה:

$$[u_2]_B = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

תרגיל 20.2.2.

יהיו זוג בסיסים סדורים (אין צורך לבדוק כי אכן מדובר בבסיסים) של מרחב הפולינומים עד מעלה 2:

$$B_1 = \left(1, 1 + x, 1 + x^2\right), \qquad B_2 = \left(2, 4x, 8x^2\right)$$

יהא $p(x) = 1 + x + x^2$, מצאו את $[p(x)]_{B_1}, [p(x)]_{B_2}$.

פתרון:
עבור כל בסיס ננסה לכתוב את $p(x)$ בתור צ"ל של אברי הבסיס, כמובן שמשום שמדובר בבסיס יש דרך יחידה לכך.

$$p(x) = 1 + x + x^2 = 1 + x^2 + (1+x) - 1 \implies [p(x)]_{B_1} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$p(x) = 1 + x + x^2 = \frac{1}{2} \cdot 2 + \frac{1}{4} \cdot 4x + \frac{1}{8} \cdot 8x^2 \implies [p(x)]_{B_2} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} \\ \frac{1}{8} \end{pmatrix}$$

20.3 מטריצה מייצגת של העתקה לינארית

תזכורת

יהיו $B = (v_1, ..., v_n), C = (w_1, ..., w_m)$ בסיסים סדורים של המ"ו V, W בהתאמה.
להעתקה הלינארית $T : V \to W$ יש מטריצה מתאימה, הנקראת המטריצה המייצגת שלה ומוגדרת באופן הבא:

$$[T]_C^B = \begin{pmatrix} | & & | \\ [T(v_1)]_C & \cdots & [T(v_n)]_C \\ | & & | \end{pmatrix} \qquad \& \qquad [T]_C^B \in \mathbb{F}^{m \times n}$$

המקיימת:

$$[T(v)]_C = [T]_C^B [v]_B$$

לכל $v \in V$.

הערה

מהתכונה החשובה של מטריצה מייצגת, אנו מקבלות כי יש קשר בין מרחב העמודות, המרחב המאפס של המטריצה המייצגת לבין התמונה והגרעין של ההעתקה. בדומה לתת נושא מהתרגול הקודם.

תזכורת

תהיי $T : V \to W$ העתקה לינארית, B בסיס של V וC בסיס של W. אזי:

1. עבור $\ker(T)$:

$$\ker(T) = \{v | T(v) = 0\} = \{v | [T(v)]_C = 0\} = \{v | [T]_B^C [v]_b = 0\} = \{v | [v]_b \in N([T]_B^C)\}$$

כלומר $v \in \ker(T)$ אם ורק אם $[v]_B \in N([T]_C^B)$.

2. עבור $\text{Im}(T)$:

$$\text{Im}(T) = \{w|\exists v, T(v) = w\} = \{w|\exists v, [w]_C = [T]_C^B[v]_B\} = \{w|[w]_C \in \text{Col}([T]_C^B)\}$$

כלומר $w \in \text{Im}(T)$ אם ורק אם $[w]_C \in \text{Col}\left([T]_C^B\right)$

תרגיל 20.3.1.

יהא $B = \left(\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right)$ בסיס ל $\mathbb{R}^3$ (אין צורך לבדוק שמדובר בבסיס).

יהא $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ העתקה לינארית:

$$T\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x+y+z\\5z+x\\x+z\end{pmatrix}$$

מצאו את $[T]_B$ והשתמשו בו למצוא את $T\begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix}$.

<u>פתרון:</u>

נחשב ישירות:

$$T\left(\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}3\\6\\2\end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} + 4\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \implies [T(v_1)]_B = \begin{pmatrix}2\\4\\-3\end{pmatrix}$$

$$T\left(\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix} = 1\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} + 0\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} + 1\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \implies [T(v_2)]_B = \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$$

$$T\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}21\\1\\1\end{pmatrix} = 1\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} + 0\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} + 0\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \implies [T(v_3)]_B = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$$

כלומר:

$$[T]_B = \begin{pmatrix}2&1&1\\4&0&0\\-3&1&0\end{pmatrix}$$

נשים לב כי:

$$\begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = \left[\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}\right]_B = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$$

אז:

$$\left[T\left(\begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix}\right)\right]_B=\begin{pmatrix}2&1&1\\4&0&0\\-3&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\4\\-2\end{pmatrix}$$

אז:

$$T\left(\begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix}\right)=4\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}+4\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}-2\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6\\8\\4\end{pmatrix}$$

תרגיל 20.3.2.

מצאו את $[T]_E$ עבור:

$$T:\mathbb{R}_3[x]\to\mathbb{R}_3[x],\qquad T(p(x))=p'(x)$$

עם $E=(1,x,x^2,x^3)$ הבסיס הסטנדרטי ובעזרתו חשבו את $(x^2+3x+1)'$.

<u>פתרון:</u>
עלפי הגדרה:

$$[T]_E=\begin{pmatrix}|&|&|&|\\ [T(1)]_E&[T(x)]_E&[T(x^2)]_E&[T(x^3)]_E\\ |&|&|&|\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}|&|&|&|\\ [0]_E&[1]_E&[2x]_E&[3x^2]_E\\ |&|&|&|\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&2&0\\0&0&0&3\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

אז:

$$[T\left(x^2+3x+1\right)]_E=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&2&0\\0&0&0&3\\0&0&0&0\end{pmatrix}[x^2+3x+1]_E=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&2&0\\0&0&0&3\\0&0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\3\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\2\\0\\0\end{pmatrix}$$

כלומר:

$$T\left(x^2+3x+1\right)=3(1)+2(x)+0(x^2)+0(x^3)=2x+3$$

הערה

טענה חשובה נוספת שקושרת בין הרכבה לבין כפל מטריצות היא הטענה הבאה.

תזכורת

יהי V_1, V_2, V_3 עם בסיסים B_1, B_2, B_3 ויהיו 2 ה"ל $T : V_1 \to V_2, S : V_2 \to V_3$. אז מתקיים:

1. אם $v \in V_1$, אז:
$$[S \circ T(v)]_{B_3} = [S]_{B_3}^{B_2}[T(v)]_{B_2} = [S]_{B_3}^{B_2}[T]_{B_2}^{B_1}[v]_{B_1}$$
מצד שני,
$$[S \circ T(v)]_{B_3} = [S \circ T]_{B_3}^{B_1}[v]_{B_1}$$
ולכן:
$$[S \circ T]_{B_3}^{B_1} = [S]_{B_3}^{B_2}[T]_{B_2}^{B_1}$$

2. מסיבה דומה לסעיף הראשון, $\forall n \in \mathbb{N},\ [T^n]_B = [T]_B^n$

תרגיל 20.3.3.

תהיי העתקה לינארית $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, T(x, y) = (x + y, x)$. חשבו את T^4.

<u>פתרון:</u>
נחשב את המטריצה המייצגת של T לפי הבסיס הסטנדרטי של R^2, ואז נשתמש בטענה שהוזכרה למעלה כדי לקבל את המטריצה המייצגת של T^4, משם נסיק את T^4.
נזכר כי הבסיס הסטנדרטי הוא:
$$E := \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$
מתקיים:
$$T(1, 0) = (1 + 0, 1) = (1, 1) = (1, 0) + (0, 1) \quad ; \quad T(0, 1) = (0 + 1, 0) = (1, 0)$$
מהגדרה:
$$[T(e_1)]_E = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad ; \quad [T(e_2)]_E = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$
לכן, המטריצה המייצגת הינה:
$$[T]_E = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$
ולכן:
$$[T^4]_E = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^4 = ... = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$
לכל $v \in \mathbb{R}^2$ מתקיים:
$$[T^4(v)]_E = [T^4]_E[v]_E = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5x + 3y \\ 3x + 2y \end{pmatrix}$$
ומכך שזהו הבסיס הסטנדרטי:
$$T^4 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5x + 3y \\ 3x + 2y \end{pmatrix}$$

20.4 מטריצות מעבר בסיס

תזכורת

יהא V מ"ו מעל שדה $\mathbb{F}$ ממימד n, ויהיו $B = \{v_1, ...v_n\}, C = \{w_1, ..., w_n\}$ שני בסיסים סדורים, נגדיר את המטריצה:

$$P_{C\to B} = [Id]_C^B = \begin{pmatrix} | & ... & | \\ [Id(v_1)]_C & ... & [Id(v_n)]_C \\ | & ... & | \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} | & ... & | \\ [v_1]_C & ... & [v_n]_C \\ | & ... & | \end{pmatrix}$$

מטריצת מעבר בסיס מבסיס B לבסיס C.

טענה (ללא הוכחה) 20.4.1.

2 תכונות חשובות של מטריצה זאת הן:

1. לכל $v \in V$ מתקיים:
$$[v]_C = (P_{C\to B})[v]_B$$

2. $P_{C\to B}$ הפיכה ומתקיים:
$$P_{C\to B}^{-1} = P_{B\to C}$$

כל העתקה לינארית $T : V \to V$ מקיימת:

$$[T]_C = P_{C\to B}[T]_B P_{B\to C} = P_{B\to C}^{-1}[T]_B P_{B\to C}$$

תרגיל 20.4.2.

יהיו $B_1 := (2+3x, 1+x), B_2 = (1+x, 1+3x)$ שני בסיסים של $\mathbb{R}_1[x]$ (אין צורך להוכיח שהם בסיסים). חשבו את מטריצת המעבר מהבסיס הראשון לשני $P_{B_2\to B_1}$.

פתרון:

נחשב את הקורדינטות של איברי הבסיס B_1 לפי הבסיס B_2 כלומר נמצא את:

$$[2+3x]_{B_2}, [1+x]_{B_2}$$

נרצה לפתור את המשוואה (ולמצוא את המקדמים של הצירוף הלינארי):

$$2+3x = \kappa_1(1+x) + \kappa_2(1+3x) = (3\kappa_2+\kappa_1)x + (\kappa_1+\kappa_2)$$

וזה מתאים לממ"ל:

$$\begin{cases} 3\kappa_2 + \kappa_1 = 3 \\ \kappa_2 + \kappa_1 = 2 \end{cases}$$

ולה יש פתרון עבור $\kappa_1 = \frac{3}{2}, \kappa_2 = \frac{1}{2}$. כלומר:

$$[2+3x]_{B_2} = \begin{pmatrix} \kappa_1 \\ \kappa_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

עבור האיבר השני בבסיס מתקיים:

$$1 + x = 1(1+x) + 0(1+3x)$$

לכן:

$$[1+x]_{B_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

כלומר מטריצת המעבר היא:

$$P_{B_2 \to B_1} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & 1 \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

תרגיל תשיעי

21.1 תרגילים להגשה

תרגיל 21.1.1.

יהי $B_1 := \{1, i\}$ בסיס של $V := \mathbb{C}$ כמ"ו מעל $\mathbb{R}$.

1. הוכיחי כי $B_2 := \{1+i, 2-3i\}$ בסיס של V.
2. חשבי את $[id]_{B_2}^{B_1}$ ואת $[id]_{B_1}^{B_2}$.
3. חשבי את $[4+5i]_{B_2}$.

תרגיל 21.1.2.

תהיי הקבוצה:

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$$

1. הוכיחי כי היא בסיס של $\mathbb{R}^3$.
2. תהיי המטריצה $M := \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$. מצאו 2 בסיסים של $\mathbb{R}^3$ כך ש:

   (א) בסיס D_1 כך ש $M = [id]_B^{D_1}$.

   (ב) בסיס D_2 כך ש $M = [id]_{D_2}^B$.

   רמז לסעיף ב: מה היא המטריצה ההופכית של מטריצת מעבר? אולי מטריצת מעבר שדומה לשאלה בסעיף א...

תרגיל 21.1.3.

יהי $\mathbb{R}_2[x]$ מ"ו מעל $\mathbb{R}$. בכל סעיף תנתן קבוצה עם פרמטרים. מצאי עבור אילו ערכי פרמטרים (a, b, c בסעיף ב' d בסעיף א') הקבוצה היא בסיס של המרחב:

1.
$$C_2 := \{1+3x+2x^2, 1+4x+3x^2, d+2x-x^2\}$$

2.
$$C_1 := \{1+x+x^2, a+bx+cx^2, a^2+b^2x+c^2x^2\}$$

21.2 תרגילים לא להגשה

תרגיל 21.2.1.

תהא $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ העתקה לינארית, ויהא:

$$B = \left(\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\3\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\10\\100\end{pmatrix} \right)$$

בסיס סדור של $\mathbb{R}^3$, כך ש:

$$[T]_B = \begin{pmatrix}3&0&0\\1&1&1\\4&1&1\end{pmatrix}$$

מצאו את $\operatorname{Im} T, \ker T$.

<u>פתרון:</u>

נתחיל מהרגעין, אם $Tv=0$, אז $[Tv]_B=0$ ולכן $[T]_B[v]_B=0$, כלומר $[v]_B$ פתרון של $[T]_Bx=0$, כלומר:

$$\begin{pmatrix}3&0&0\\1&1&1\\4&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda_1\\\lambda_2\\\lambda_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\lambda_1\\\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3\\4\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

כלומר:

$$\lambda_1=0,\quad \lambda_2=t,\quad \lambda_3=-t$$

כלומר:

$$\ker T = \left\{ t\begin{pmatrix}1\\3\\2\end{pmatrix} - t\begin{pmatrix}1\\10\\100\end{pmatrix} \middle| t\in\mathbb{R} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix}0\\-7t\\-98t\end{pmatrix} \middle| t\in\mathbb{R} \right\} = \operatorname{span}\begin{pmatrix}0\\-7\\-98\end{pmatrix}$$

על מנת למצוא את $\operatorname{Im} T$, נזכר שראינו בהרצאה כי $w\in \operatorname{Col}(A) \iff w=Av$, כלומר התמונה של

T היא העמודות של $[T]_B$:

$$\text{Im}\, T = \text{span}\left\{\left[\begin{pmatrix}3\\1\\4\end{pmatrix}\right]_B, \left[\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}\right]_B, \left[\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}\right]_B\right\} = \text{span}\left\{\left[\begin{pmatrix}3\\1\\4\end{pmatrix}\right]_B, \left[\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}\right]_B\right\}$$

$$= \text{span}\left\{3\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1\\3\\2\end{pmatrix} + 4\begin{pmatrix}1\\10\\100\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\3\\2\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1\\10\\100\end{pmatrix}\right\} = \text{span}\left\{\begin{pmatrix}8\\49\\411\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\13\\102\end{pmatrix}\right\}$$

תרגיל 21.2.2.

מצאי טרנספורמציה לינארית $S : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}_2[x]$ כך ש:

$$\ker S = \left\{\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid a - b + c = 0\right\} \quad \& \quad \text{Im}\, S = Span\{1 - x^2\}$$

<u>פתרון:</u>

נבחין כי ניתן לכתוב את הגרעין באופן הבא:

$$\ker S = \left\{\begin{pmatrix}a\\a+c\\c\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid a, c \in \mathbb{R}\right\} = \left\{\begin{pmatrix}a\\a\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\c\\c\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid a, c \in \mathbb{R}\right\} =$$

$$= Span\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}\right\}$$

כלומר מצאנו קבוצה פורשת לגרעין. נבחין כי הוקטורים אינם כפולה בסקלר אחד של השני, ולכן הם בת"ל, כלומר זה בסיס לגרעין.

נסמן את הוקטורים בשמות הבאים:

$$v_1 := \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \quad v_2 := \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$$

נשלים אותו לבסיס עם הוקטור $v_3 := \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$. ממשפט מההרצאה, קיימת ויחידה ה"ל כך ש:

$$T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}_2[x] \quad ; \quad T(v_1) = T(v_2) = 0,\ T(v_3) = 1 - x^2$$

נרצה להוכיח שההעתקה מקיימת את הדרוש:

$$\text{Im}(S) = Span\{T(v_1), T(v_2), T(v_3)\} = Span\{0, 0, 1 - x^2\} = Span\{1 - x^2\}$$

כרצוי. מכך ש v_1, v_2 נשלחים ל0, הם בגרעין. מכך שהגרעין הוא תת מרחב לינארי, גם צירופים לינארים שלהם נשלחים ל0 כלומר בגרעין, לכן:

$$\ker S \supseteq Span\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}\right\}$$

נרצה להראות הכלה בכיוון השני. יהי $x \in \ker S$. מכך ש v_1, v_2, v_3 בסיס, ניתן לכתוב את x:

$$x = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3$$

ונרצה להראות ש x צ"ל של איברי v_1, v_2, כלומר ש $\lambda_3 = 0$. אכן:

$$0 = T(x) = T(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3) = \lambda_1 T(v_1) + \lambda_2 T(v_2) + \lambda_3 T(v_3) = \lambda_3 T(v_3)$$

שכן T העתקה לינארית וכן $x \in \ker(S)$. אבל $T(v_3) = 1 - x^2 \neq 0$ ולכן $\lambda_3 = 0$. כלומר:

$$\ker S \subseteq Span\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}\right\}$$

ומהכלה דו"כ נובע שיוויון, ו T אכן מקיימת את הדרוש.

תרגיל 21.2.3.

תהיי העתקה לינארית $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ כך ש $T^3=0\ \ \&\ \ T^2\neq 0$. הוכיחי כי קיים בסיס B של $\mathbb{R}^3$ כך ש:

$$[T]_B^B := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

פתרון:
אינטואיציה:
נרצה להשתמש ב"הנדסה לאחור" כדי להבין מה הבסיס המתאים. בשביל זה, נרצה לקחת "בסיס כלשהו" ולהפעיל עליו את T, ומשם להסיק מה הוא היה צריך להיות מלכתחילה. נבחין גם שהמטריצה "מזיזה" כל איבר בסיס לאחד הבא בתור, כאשר את האחרון היא מעבירה ל0.

פתרון:
נבחין כי $T\neq 0$ מכך ש $T^2\neq 0$. לכן, קיים u עבורו $T^2(u),T(u)\neq 0$ כי T ה"ל.
נתבונן בקבוצה:

$$B:=\{u,T(u),T^2(u)\}$$

נבחין כי:

$$T(u)=0\cdot u+1\cdot T(u)+0\cdot T^2(u)$$
$$T(T(u))=T^2(u)=0\cdot u+0\cdot T(u)+1\cdot T^2(u)$$
$$T(T^2(u))=T^3(u)=0=0\cdot u+0\cdot T(u)+0\cdot T^2(u)$$

ולכן וקטורי הקורדינטות המתאימים הם:

$$[T(u)]_B=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\ ;\ [T(T(u))]_B=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\ ;\ [T(T^2(u))]_B=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

כלומר המטריצה המייצגת לפי B (אם היה B בסיס):

$$[T]_B^B := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

כרצוי. לכן, נרצה להוכיח כי זה אכן בסיס. משיקולי מימדים, מספיק להוכיח שהקבוצה בת"ל.
נתבונן בצירוף לינארי של איברי B:

$$(\star)\quad \lambda_1 u+\lambda_2 T(u)+\lambda_3 T^2(u)=0$$

נפעיל על השיוויון $(\star)$ את ההעתקה T ונשתמש בלינאריות שלה:

$$(\star\star)\quad 0=\lambda_1 T(u)+\lambda_2 T^2(u)+\lambda_3 T^3(u)=\lambda_1 T(u)+\lambda_2 T^2(u)$$

כאשר השיוויון האחרון נובע מתכונות של T.

נפעיל שוב את ההעתקה על $(\star\star)$:

$$0=\lambda_1 T^2(u)+\lambda_2 T^3(u)=\lambda_1 T^2(u)$$

כלומר, נקבל ש $\lambda_1=0$ משום ש $T^2(u)\neq 0$. נציב זאת ב $(\star\star)$ ונקבל ש:

$$0=\lambda_1 T(u)+\lambda_2 T^2(u)=\lambda_2 T^2(u)$$

כלומר $\lambda_2=0$ משום ש $T^2(u)\neq 0$. נציב ב $(\star)$ ונקבל:

$$0=\lambda_1 u+\lambda_2 T(u)+\lambda_3 T^2(u)=\lambda_1 u$$

כלומר $\lambda_1=0$ כי $u\neq 0$. סה"כ:

$$\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=0$$

והקבוצה B היא בת"ל ולכן בסיס כדרוש.

תרגיל 21.2.4.

השלימי את הקבוצה הבאה לבסיס של $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$:

$$C=(v_1,v_2):=\left(\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\right)$$

<u>פתרון:</u>

אינטואיציה:

יהיה לנו יותר קל לעבוד עם השלמה לבסיס של המרחב $\mathbb{R}^4$, ולכן נגדיר העתקה המעבירה אותנו מהמרחב המצוי למרחב הרצוי, נשלים שם לבסיס ואז נחזור חזרה למרחב המטריצות בסוף התהליך.
דרך אחרת לחשוב על זה, היא שנעבוד במרחב של וקטורי הקורדינטות, ואז נחזיר בחזרה עם הזיהוי בין וקטור הקורדינטות לאיברים במרחב.

פתרון:

נרצה להשתמש בהעתקת הקורדינטות הפשוטה ביותר עבורנו, לכן נעבוד עם הבסיס הסטנדרטי של המטריצות:

$$E=\left(\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\right)=(e_1,e_2,e_3,e_4)$$

נתבונן בוקטור הקורדינטות של v_1,v_2:

$$[v_1]_E=\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}\quad;\quad[v_2]_E=\begin{pmatrix}0\\1\\1\\0\end{pmatrix}$$

נשלים את הקבוצה הזו לבסיס. ראשית, נרשום את הוקטורים כשורות של מטריצה (למה? כי נרצה לדרג את המטריצה כדי שיהיה לנו קל להשלים, ודירוג שורות לא שומר על מרחב העמודות אבל כן

על מרחב השורות) לכן:

$$\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 1 & 0\end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1 & 0\end{pmatrix}$$

נשלים את המטריצה עם הוקטורים:

$$\tilde{v_3}^t := \begin{pmatrix}0 & 0 & 1 & 0\end{pmatrix} \quad \& \quad \tilde{v_4}^t := \begin{pmatrix}0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

כלומר הקבוצה הבאה היא בסיס ל $\mathbb{R}^4$:

$$\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}\right\}$$

נתרגם את הוקטורים הללו למטריצות המתאימות (מטריצות שזה וקטורי הקורדינטות שלהם לפי הבסיס הסטנדרטי):

$$v_3 := \begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix} \quad \& \quad v_4 := \begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

ונקבל שהקבוצה הבאה היא השלמה של C לבסיס של $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$:

$$\left\{\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right\}$$

כרצוי.

תרגול שתיים עשרה

22.1 מטריצות מייצגות - תרגול עצמי נוסף

תרגיל 22.1.1.

תהיינה $T, S : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ שתי העתקות לינאריות כך ש:

$$T(x,y) := (3x+2y, 2x+y) \quad ; \quad S(x,y) := (x+y, x)$$

הוכיחו כי העתקות מתחלפות, כלומר: $TS = ST$.

פתרון:
ראשית, נראה כי המטריצות המייצגות שלהן לפי הבסיס הסטנדרטי מתחלפות.
מתקיים:

$$[T]_E = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad ; \quad [S]_E = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

ועבורן:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

לכן, מתקיים:

$$[TS]_E = [T]_E[S]_E = [S]_E[T]_E = [ST]_E$$

ומכך שהמטריצות המייצגות לפי אותו הבסיס שוות זו לזו, מתקיים:

$$TS = ST$$

כרצוי.

תרגיל 22.1.2.

יהי $\mathbb{R}^n$ עבור n כלשהו, ותהיי העתקה הבאה:

$$T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \quad ; \quad T\begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ v_1 \\ \vdots \\ v_n - 1 \end{pmatrix}$$

מצאי את המטריצה המייצגת של ההעתקה לפי בסיס כלשהו, את הגרעין ואת התמונה.

פתרון:
נבחר לעבוד עם הבסיס הסטנדרטי B:

$$e_1 := \begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}, ..., e_n := \begin{pmatrix}0\\0\\\vdots\\1\end{pmatrix}$$

ונבדוק כיצד T פועלת על איברי הבסיס הסטנדרטי:

$$\forall 1 \leq i \leq n \quad T(e_i) = e_{i+1}$$

ולכן:

$$[T]_B = \begin{pmatrix}0 & 1 & 0 & ... & 0 & 0\\0 & 0 & 1 & ... & 0 & 0\\0 & 0 & 0 & \vdots & 0 & 0\\0 & 0 & 0 & ... & 1 & 0\\0 & 0 & 0 & ... & 0 & 1\end{pmatrix}$$

נבחין כי T אינה הפיכה ולכן הגרעין שלה אינו טריוואלי. למעשה, מכיוון שבחרנו את הבסיס הסטנדרטי, הגרעין שלה יהיה המרחב המאפס של המטריצה המייצגת, והתמונה תהיה מרחב העמודות של המטריצה המייצגת. אכן מהטענות שראינו:

$$v \in \ker(T) \iff v = [v]_B \in N([T]_B) = \left\{ \begin{pmatrix}t\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix} \middle| t \in \mathbb{R} \right\} = \text{span}\left\{ \begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix} \right\} = \text{span}\, e_1$$

ובאופן דומה:

$$w \in \text{Im}(T) \iff w \in \text{Col}([T]_B) = \text{span}(e_2, e_3, ..., e_n)$$

לכן:

$$\ker T = \text{span}(e_1) \qquad \& \qquad \text{Im}(T) = \text{span}(e_2, e_3, ..., e_n$$

כמבוקש.

22.2 מטריצות מעבר בסיס

תזכורת

יהא V מ"ו מעל שדה $\mathbb{F}$ ממימד n, ויהיו $B=\{v_1,...v_n\},C=\{w_1,...,w_n\}$ שני בסיסים סדורים, למרחב V. תהא העתקת הזהות $T=Id$, כלומר $T(v)=v$, אז מתקיים:

$$[v]_C=[T(v)]_C=[T]_C^B[v]_B=[Id]_C^B[v]_B$$

כאשר

$$[Id]_C^B=\begin{pmatrix} | & \dots & | \\ [Id(v_1)]_C & \dots & [Id(v_n)]_C \\ | & \dots & | \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} | & \dots & | \\ [v_1]_C & \dots & [v_n]_C \\ | & \dots & | \end{pmatrix}$$

נסמן את המטריצה הזאת $P_{C\to B}=[Id]_C^B$ ונקרא לה <u>מטריצת מעבר בסיס מבסיס B לבסיס C.</u>

טענה (ללא הוכחה) 22.2.1.

2 תכונות חשובות של מטריצה זאת הן:

1. לכל $v\in V$ מתקיים:
$$[v]_C=(P_{C\to B})[v]_B$$
2. $P_{C\to B}$ הפיכה ומתקיים:
$$P^{-1}_{C\to B}=P_{B\to C}$$

כל העתקה לינארית $T:V\to V$ מקיימת:

$$[T]_C=P_{C\to B}[T]_BP_{B\to C}=P^{-1}_{B\to C}[T]_BP_{B\to C}$$

תרגיל 22.2.2.

יהיו $B_1:=(2+3x,1+x),B_2=(1+x,1+3x)$ שני בסיסים של $\mathbb{R}_1[x]$ (אין צורך להוכיח שהם בסיסים). חשבו את מטריצת המעבר מהבסיס הראשון לשני $P_{B_2\to B_1}$.

<u>פתרון:</u>
נחשב את ההקורדינטות של איברי הבסיס B_1 לפי הבסיס B_2 כלומר נמצא את:

$$[2+3x]_{B_2},[1+x]_{B_2}$$

נרצה לפתור את המשוואה (ולמצוא את המקדמים של הצירוף הלינארי):

$$2+3x=\kappa_1(1+x)+\kappa_2(1+3x)=(3\kappa_2+\kappa_1)x+(\kappa_1+\kappa_2)$$

וזה מתאים לממ"ל:

$$\begin{cases} 3\kappa_2 + \kappa_1 = 3 \\ \kappa_2 + \kappa_1 = 2 \end{cases}$$

ולה יש פתרון עבור $\kappa_1 = \frac{3}{2}, \kappa_2 = \frac{1}{2}$. כלומר:

$$[2+3x]_{B_2} = \begin{pmatrix} \kappa_1 \\ \kappa_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

עבור האיבר השני בבסיס מתקיים:

$$1 + x = 1(1+x) + 0(1+3x)$$

לכן:

$$[1+x]_{B_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

כלומר מטריצת המעבר היא:

$$P_{B_2 \to B_1} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & 1 \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

22.3 ערכים ווקטורים עצמיים

תזכורת

תהא $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ מטריצה ריבועית, הזוג $\lambda \in \mathbb{F}$, $0 \neq v_\lambda \in \mathbb{F}^n$ נקראים <u>ווקטור וערך עצמי</u> (ו"ע וע"ע) אם מתקיים:

$$Av_\lambda = \lambda v_\lambda$$

או באופן שקול:

$$(A - \lambda I)v_\lambda = 0$$

לכל ע"ע נגדיר את <u>המרחב העצמי</u>:

$$V_\lambda := \ker(A - \lambda v) = \{v \in V | Av = \lambda v\}$$

נקרא ל $\dim V_\lambda$ <u>הריבוי הגיאומטרי של λ</u>.
נסמן ב$p_A(\lambda)$ את <u>הפולינום האופייני של A</u>:

$$p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I)$$

זהו פולינום במשתנה λ. η ע"ע של A אמ"מ $p_A(\eta) = 0$, כלומר η שורש של $p_A(\lambda)$, לריבוי של η כשורש של $p_A(\lambda)$ נקרא <u>הריבוי האלגברי של η</u>.
ראינו בכיתה כי לכל ע"ע מתקיים:

$$\text{ר"ג} \leq \text{ר"א}$$

דוגמא 22.3.1.

תהא $A=\begin{pmatrix}2&0&0&0\\1&2&0&0\\-2&-1&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$, נחשב את הפולינום האופייני של A:

$$A-\lambda I=\begin{pmatrix}2-\lambda&0&0&0\\1&2-\lambda&0&0\\-2&-1&1-\lambda&0\\0&0&0&1-\lambda\end{pmatrix}$$

זוהי מטריצה משולשת עליונה אז:

$$\text{det}(A-\lambda I)=(2-\lambda)^2(1-\lambda)^2$$

כלומר $\lambda=1$ ע"ע מר"א 2, ו$\lambda=2$ ע"ע מר"א 2.

נבדוק ר"ג של $\lambda=1$:

$$A-1I=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\1&1&0&0\\-2&-1&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

אז הוקטורים העצמיים הם הוקטורים המקיימים:

$$\begin{pmatrix}1&0&0&0\\1&1&0&0\\-2&-1&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\\w\end{pmatrix}=0\Rightarrow\begin{cases}x=0\\x+y=0\\-2x-y=0\end{cases}$$

כלומר $x=y=0, z=s, w=t$, אז:

$$V_1=\text{span}\left\{\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$$

נבדוק ר"ג של $\lambda=2$:

$$A-2I=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\1&0&0&0\\-2&-1&-1&0\\0&0&0&-1\end{pmatrix}$$

אז:

$$\begin{pmatrix}0&0&0&0\\1&0&0&0\\-2&-1&-1&0\\0&0&0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\\w\end{pmatrix}=0\Rightarrow\begin{cases}x=0\\-2x-y-z=0\\w=0\end{cases}$$

כלומר, $x=w=0, y=s, z=-s$, אז:

$$V_2=\text{span}\left\{\begin{pmatrix}0\\1\\-1\\0\end{pmatrix}\right\}$$

22.4 לכסון מטריצות

תזכורת

תהא $A\in\mathbb{F}^{n\times n}$, אז לא יכולה להיות תלות לינארית בין וקטורים עצמיים של ערכים עצמיים שונים, כלומר באופן פורמלי, אם לA ע"ע $\{\lambda_1,...,\lambda_m\}$, ולכל λ_j נבחר קבוצה בת"ל B_j, אז הקבוצה

$$B=\bigcup_{j=1}^{m}B_j$$

קבוצה בת"ל. בפרט אם בקבוצה הזאת n וקטורים אז היא בסיס ל$\mathbb{F}^n$, שנכנה בסיס מלכסן, תכף נחזור לשם הזה, אבל קודם מתי בקבוצה זאת יהיו n וקטורים?

הפ"א הוא פולינום מדרגה n, אז מהמשפט היסודי של האלגברה יש לו לכל היותר n שורשים, כלומר סכום כל הר"א הוא לכל היותר n, ראינו בהרצאה כי לכל ע"ע הר"ג $\leq$ מהר"א, אז כל הדיון הזה מביא אותנו לעובדה הבאה: למטריצה A קיים בסיס מלכסן אמ"מ לפ"א קיימים n שורשים - כולל ריבויים, ולכל ע"ע מתקיים ר"ג $=$ ר"א.

באופן כללי, בסיס מלכסן של A (שלא תמיד קיים!) $\widehat{B}=(v_1,...,v_n)$, הוא בסיס שמאוד נוח לעבוד איתו כאשר מסתכלים על A כאופרטור, כי כל איבר בבסיס הוא ו"ע, כלומר קיים לו ע"ע כך ש $Av_j=\lambda_j v_j$, כלומר להפעיל עליו את A שקול להכפלה בסקלר.
במילים מדויקות יותר, המטריצה: $[T]_{\widehat{B}}$ אלכסונית!
אם נסמן ב$\lambda_1,...,\lambda_n$ את הע"ע של $v_1,...,v_n$ בהתאמה, אז

$$[T]_{\widehat{B}}=\begin{pmatrix} | & & | \\ [T(v_1)]_{\widehat{B}} & ... & [T(v_n)]_{\widehat{B}} \\ | & & | \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & \lambda_2 & ... & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & ... & \lambda_n \end{pmatrix}:=D$$

אם $B=(e_1,...,e_n)$ הבסיס הסטנדרטי, אז, מטריצת המעבר $P=P_{B\to\widehat{B}}$ מקיימת:

$$[T]_{\widehat{B}}=P^{-1}[T]_BP\Rightarrow D=P^{-1}AP$$

כאשר:

$$P=\begin{pmatrix} | & ... & | \\ [v_1]_B & ... & [v_n]_B \\ | & ... & | \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} | & ... & | \\ v_1 & ... & v_n \\ | & ... & | \end{pmatrix}$$

תזכורת

הנה מיני סיכום.
אם A לכסינה אז היא דומה למטריצה אלכסונית D, כאשר, אם $v_1,...,v_n$ בסיס מלכסן עם ע"ע $\lambda_1,...,\lambda_n$ בהתאמה, אז:

$$D = P^{-1}AP$$

כאשר:

$$D = \text{diag}(\lambda_1,...,\lambda_n) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}, \qquad P = \begin{pmatrix} | & \dots & | \\ v_1 & \dots & v_n \\ | & \dots & | \end{pmatrix}$$

תזכורת

הנה מיני בדיקת שפיות לגבי הכיוון של P, או במילים אחרות, איך לזכור ש $D = P^{-1}AP$ ולא $D = PAP^{-1}$.

נזכר כי בגלל ש $P = \begin{pmatrix} | & \dots & | \\ v_1 & \dots & v_n \\ | & \dots & | \end{pmatrix}$ אז $Pe_k = v_k$, אז:

$$D = P^{-1}AP \Rightarrow PD = AP \Rightarrow PDe_k = APe_k$$

מצד אחד:

$$PDe_k = P(\lambda_k e_k) = \lambda Pe_k = \lambda_k v_k$$

ומצד שני:

$$APe_k = Av_k = \lambda_k v_k$$

כאשר λ_k ע"ע של v_k.

תרגיל 22.4.1.

תהא:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

מצאו את הצורה האלכסונית D של A, ואת P כך ש:

$$D = P^{-1}AP$$

ולאחר מכן חשבו את A^{2025}.

<u>פתרון:</u>
ראשית נמצא את הפ"א:

$$\det(A-\lambda I)=\det\begin{pmatrix}1-\lambda & 2 & 0 & 0\\ 0 & 3-\lambda & 0 & 0\\ 0 & -2 & 1-\lambda & 0\\ 0 & 1 & 1 & 2-\lambda\end{pmatrix}$$
$$=(1-\lambda)\det\begin{pmatrix}3-\lambda & 0 & 0\\ -2 & 1-\lambda & 0\\ 1 & 1 & 2-\lambda\end{pmatrix}=(1-\lambda)(3-\lambda)\begin{pmatrix}1-\lambda & 0\\ 1 & 2-\lambda\end{pmatrix}$$
$$=(1-\lambda)^2(2-\lambda)(3-\lambda)$$

אז 1 ע"ע מר"א 2 ו $2,3$ ע"ע מר"א 1.
נמצא ו"ע:

1. עבור $\lambda=1$:

$$A-I=\begin{pmatrix}0 & 2 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0 & 0\\ 0 & -2 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 1\end{pmatrix}$$

ישר נראה כי:

$$v_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}$$

פתרון של הממ"ל $(A-I)x=0$, ולכן ו"ע של $\lambda=1$, והתבוננות נוספת תראה כי:

$$v_2=\begin{pmatrix}0\\0\\1\\-1\end{pmatrix}$$

גם ו"ע של $\lambda=1$, אז הר"ג של 1 הוא 2, אז אנו כבר יודעים כי A הפיכה.

2. עבור $\lambda=2$:

$$A-2I=\begin{pmatrix}-1 & 2 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & -2 & -1 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 0\end{pmatrix}$$

ישר נראה כי $v_3=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}$ ו"ע של $\lambda=2$.

בגלל שהר"א של $\lambda=2$ הוא 1, אנו יודעים כי זהו הו"ע היחיד של $\lambda=2$.

.3

$$A-3I=\begin{pmatrix}-2 & 2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -2 & -2 & 0\\ 0 & 1 & 1 & -1\end{pmatrix}$$

פה קצת קשה (אבל לא לא אפשרי) לראות ישר את הפתרון, אז נציב:

$$\begin{pmatrix}-2 & 2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -2 & -2 & 0\\ 0 & 1 & 1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\ b\\ c\\ d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2a+2b\\ 0\\ -2b-2c\\ b+c-d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}$$

מכיוון שאני יודעים שהר"ג הוא 1, אז מרחב הפתרונות נפרש ע"י וקטור יחיד, אז מספיק למצוא פתרון כלשהו שהוא לא פתרון האפס, ואכן:

$$a=1,b=1,c=-1,d=0,\qquad v_4=\begin{pmatrix}1\\ 1\\ -1\\ 0\end{pmatrix}$$

אז סה"כ:

$$P=\begin{pmatrix}| & | & | & |\\ v_1 & v_2 & v_3 & v_4\\ | & | & | & |\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0 & -1\\ 0 & -1 & 1 & 0\end{pmatrix}$$

והמטריצה האלכסונית היא:

$$D=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 3\end{pmatrix}$$

כלומר:

$$\underbrace{\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 3\end{pmatrix}}_{D}=\underbrace{\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0 & -1\\ 0 & -1 & 1 & 0\end{pmatrix}^{-1}}_{P^{-1}}\underbrace{\begin{pmatrix}1 & 2 & 0 & 0\\ 0 & 3 & 0 & 0\\ 0 & -2 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 2\end{pmatrix}}_{A}\underbrace{\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0 & -1\\ 0 & -1 & 1 & 0\end{pmatrix}}_{P}$$

ולבסוף, מתקיים:

$$D^{2025}=(P^{-1}AP)^{2025}=P^{-1}A^{2025}P\Rightarrow A^{2025}=PD^{2025}P^{-1}$$

כאשר המעבר השני הוא הטענה שראינו:

$$(P^{-1}XP)^n=P^{-1}X^nP$$

בנוסף, קל לחשב חזקה של מטריצה אלכסונית:

$$D^{2025}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&2^{2025}&0\\0&0&0&3^{2025}\end{pmatrix}\Rightarrow A^{2025}=P\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&2^{2025}&0\\0&0&0&3^{2025}\end{pmatrix}P^{-1}$$

תרגיל 22.4.2.

תהא $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$ מטריצה ריבועית כך שלפולינום האופייני שה n שורשים שונים, הוכיחו כי A לכסינה.

פתרון:
התרגיל הזה יחסית קצר, כי ראינו את כל הטענות הרלוונטיות בהרצאה, ראשית, ראינו כי לכל ע"ע ריבוי גיאומטרי גדול שווה 1.
ההסבר לכך הינו שאם λ ע"ע, אז המטריצה $A-\lambda I$ לא הפיכה, אז קיימת למערכת $(A-\lambda I)x=0$ פתרון לא טריוויאלי, והיא יהיה ו"ע.
למטריצה A יש n ע"ע שונים, וכל אחד מקיים:

$$1\leq \text{ר"ג} \leq \text{ר"א} = 1$$

כלומר, לכל ע"ע מתקיים ר"ג $=$ ר"א, ולכן ולכן A לכסינה.

תרגיל 22.4.3.

תרגיל ממבחן:
יהיו $A,B\in\mathbb{R}^{n\times n}$, כך ש:

$$AB=BA$$

נתון כי ל A יש n ע"ע שונים, הוכיחו כי אם $v\in\mathbb{R}^n$ ו"ע של A הוא גם ו"ע של B.

פתרון:
יהא $\mathbb{R}^n \ni v_\lambda \neq 0$ ו"ע עם ע"ע λ של A, אז:

$$ABv_\lambda=BAv_\lambda=B(\lambda v_\lambda)=\lambda Bv_\lambda$$

כלומר, $A(Bv_\lambda)=\lambda(Bv_\lambda)$, כלומר, $w=Bv_\lambda$ ו"ע של ע"ע λ, אבל, עפ"י הנתון הר"א של λ הוא 1, ולכן גם הר"ג, כלומר:

$$\dim V_\lambda=1$$

ולכן:

$$V_\lambda=\text{span}(v_\lambda)$$

אבל, w ו"ע של A של ע"ע λ, כלומר $w\in V_\lambda$ ולכן קיים $\alpha_\lambda\in\mathbb{R}$ כך ש:

$$w=\alpha_\lambda v_\lambda\Rightarrow Bv_\lambda=\alpha_\lambda v_\lambda$$

כלומר, v_λ ו"ע של B.

תרגיל 22.4.4.

תהא $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ מטריצה ריבועית בעלת n ע"ע, כאשר סופרים ריבוי אלגברי $\lambda_1, ..., \lambda_n \in \mathbb{R}$, הוכיחו כי:

$$\text{det}(A) = \lambda_1 \cdot ... \cdot \lambda_n, \qquad \text{trace}(A) = \lambda_1 + ... + \lambda_n$$

<u>פתרון:</u>

ראשית, אם A לכסינה, אז ההוכחה כמעט מיידית, כי אז $A = PDP^{-1}$ ומתכונות של דטרמיננטה ועקבה:

$$\text{det}(AB) = \text{det}(A)\,\text{det}(B), \qquad \text{trace}(AB) = \text{trace}(BA)$$

מתקיים:

$$\text{det}(A) = \text{det}(D), \qquad \text{trace}(A) = \text{trace}(D)$$

וברור כי $\text{det}(D) = \lambda_1 \cdot ... \cdot \lambda_n$ ו-$\text{trace}(D) = \lambda_1 + ... + \lambda_n$.

במקרה הכללי נצטרך לעבוד קצת יותר קשה. נשים לב כי:

$$p_A(x) = \text{det}(A - xI) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0 = a_n(x-\lambda_1)\cdot ... \cdot (x-\lambda_n)$$

ראינו בהרצאה כי $a_n = (-1)^n$, $a_{n-1} = -\text{trace}(A)$ וכי $a_0 = (-1)^n \text{det}(A)$, אז לפי משפטי ויאטה:

$$\lambda_1 + ... + \lambda_n = -\frac{a_{n-1}}{a_n} = \text{trace}(A), \qquad \lambda_1 \cdot ... \cdot \lambda_n = (-1)^n \frac{a_0}{a_n} = \text{det}(A)$$

22.5 דמיון מטריצות

תזכורת

מטריצות $A, B \in \mathbb{F}^{n\times n}$ נקראות <u>דומות</u> אם קיימת מטריצה $P \in \mathbb{F}^{n\times n}$ כך ש:

$$A = P^{-1}BP$$

אם A, B דומות מתקיים:

1. $$\text{det}(A) = \text{det}(B)$$

2. $$\text{trace}(A) = \text{trace}(B)$$

3. $$\text{rank}(A) = \text{rank}(B)$$

תרגיל 22.5.1.

יהיו $A,B\in\mathbb{F}^{n\times n}$ מטריצות הוכיחו או הפריכו:

1. אם A,B דומות אז לכל $n\in\mathbb{N}$ המטריצות A^n,B^n דומות.
2. אם קיים $n\in\mathbb{N}$ כך שהמטריצות A^n,B^n אז המטריצות A,B דומות.

פתרון:

1. נוכיח את 1. מהגדרה, קיימת מטריצה P כך ש:

$$B=P^{-1}AP$$

נשים לב כי מתקיים לכל $n\in\mathbb{N}$:

$$B^n=(P^{-1}AP)^n=(P^{-1}AP)\cdot\ldots\cdot(P^{-1}AP)=$$

$$=P^{-1}A(P\cdot P^{-1})AP\cdot\ldots\cdot P^{-1}A(P\cdot P^{-1})AP=P^{-1}AIAI\cdot\ldots\cdot IAP=P^{-1}A^nP$$

ולכן לפי ההגדרה הן דומות.

2. נפריך את 2.

$$A=\begin{pmatrix}-1&0\\0&-1\end{pmatrix}=-I_2\quad;\quad B=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}=I_2$$

מתקיים כי:

$$A^2=I_2=B^2$$

ובפרט הן דומות (כל מטריצה דומה לעצמה), אבל הן לא דומות, למשל כי $\text{trace}(A)=-2\neq 2\,\text{trace}(B)$. יותר מכך אף מטריצה שאינה I דומה ל-I, כי לכל Q הפיכה:

$$Q^{-1}IQ=Q^{-1}Q=I$$

תזכורת

אם $A,B\in\mathbb{F}^{n\times n}$ אז:

1. יש להן אותו פ"א:

$$p_A(\lambda)=p_B(\lambda)$$

2. יש להן אותו אותן ע"ע, עם אותם ר"א ור"ג בהתאמה.
3. לא בהכרח יש להם את אותם ו"ע.

תרגיל 22.5.2.

יהיו $A,B\in\mathbb{R}^{n\times n}$ <u>לכסינות</u> בעלות אותו פ"א, הוכיחו כי A,B דומות.

<u>פתרון:</u>
ל2 המטריצות אותו פ"א, בפרט יש להן את אותם ע"ע, נסמן אותם כולל ריבוי ע"י $\lambda_1,...,\lambda_n$, ונסמן $D=\text{diag}(\lambda_1,...,\lambda_n)$, אז אנו יודעים כי קיימות $P_A,P_B\in\mathbb{R}^{n\times n}$ כך ש:

$$P_A^{-1}AP_A=D=P_B^{-1}BP_B\Rightarrow P_A^{-1}AP_A=P_B^{-1}BP_B$$

ולכן:

$$P_BP_A^{-1}AP_AP_B^{-1}=B\Rightarrow\left(P_AP_B^{-1}\right)^{-1}A\left(P_AP_B^{-1}\right)=B$$

תרגיל 22.5.3.

הוכיחו או הפריכו, אם A,B בעלות אותו פ"א אז הן דומות.

<u>פתרון:</u>
לא נכון, נסתכל על המטריצות:

$$A=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix},\qquad B=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}$$

לשנים פ"א $(1-x)^2$, אבל, מטיעון שראינו קודם, אף מטריצה שאינה מטריצת היחידה לא דומה למטריצת היחידה.
מהתרגיל הקודם, נסיק כי לא יכול להיות כי גם A וגם B לכסינות, אבל ברור כי A לכסינה, ולכן B לא לכסינה.

תזכורת

אם A דומה לB וגם A לכסינה, אז גם B לכסינה.
בפרט, אם $T:V\to V$ אופרטור, וקיים לו בסיס B כך ש $[T]_B$, אז עבור כל בסיס אחר, C, גם $[T]_C$ לכסין.
במקרה זה, נומר כי T אופרטור <u>לכסין</u>.

תרגיל 22.5.4.

יהא $V=\mathbb{R}_{2025}[x]$ אוסף הפולינומים ממעלה קטנה או שווה ל2025, ותהא $T:V\to V$ אופרטור כך ש: $T(p(x))=p'(x)$.
הוכיחו כי T לא לכסין.

<u>פתרון:</u>
נעבוד עם הבסיס הסטנדרטי $B = (1, x, x^2, ..., x^{2025})$, ונסמן $A = [T]_B$.
נניח כי λ ע"ע של $p_\lambda(x) \neq 0$, אז:

$$p'_\lambda(x) = \lambda p_\lambda(x)$$

אם $\deg(p_\lambda) > 0$ אז יש לנו בעיה, כי אז $\deg(p'_\lambda) = \deg(p_\lambda) - 1$, וזו סתירה.
כלומר, $\deg(p_\lambda) = 0$, כלומר, $p_\lambda = c \in \mathbb{R}$ כאשר $c \neq 0$ (כי ו"ע אינו אפס). כלומר:

$$0 = p'_\lambda(x) = \lambda p_\lambda(x) = \lambda c \Rightarrow \lambda = 0$$

אז קיים ע"ע יחיד, והוא $\lambda = 0$, כלומר, הר"א של 0 הוא 1, כי בעצם ראינו כי המרחב העצמי הוא $V_{\lambda=0} = \text{span}(1)$ שהוא ממימד 1, ולכן T לא לכסין.

תרגיל 22.5.5.

הוכיחו כי:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 40 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 5 & -3 & -1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 4 & -4 & 1 \end{pmatrix}$$

דומות.

<u>פתרון:</u>
נתחיל בA, משום שהיא משולשת:

$$p_A(\lambda) = (3-\lambda)(2-\lambda)(1-\lambda)$$

ומשום שיש לה $n = 3$ ע"ע שונים היא לכסינה.
עבור B, ראשית נמצא את הפ"א:

$$B - \lambda I = \begin{pmatrix} 5-\lambda & -3 & -1 \\ 2 & 0-\lambda & -1 \\ 4 & -4 & 1-\lambda \end{pmatrix}$$

אז:

$$\det(B - \lambda I) = ... = -\lambda^3 + 6\lambda^2 - 11\lambda + 6 = p_B(\lambda)$$

נראה 3 דרכים שונות להראות כי $p_A(\lambda) = p_B(\lambda)$:

1. נפשט את $p_A(\lambda)$:

$$\begin{aligned} p_A(\lambda) &= (3-\lambda)(2-\lambda)(1-\lambda) = (3-\lambda)(2-2\lambda-\lambda+\lambda^2) \\ &= (3-\lambda)(2-3\lambda+\lambda^2) = 6 - 9\lambda + 3\lambda^2 - 2\lambda + 3\lambda^2 - \lambda^3 \\ &= -\lambda^3 + 6\lambda^2 - 11\lambda + 6 = p_B(\lambda) \end{aligned}$$

2. נראה ע"י הצבה כי $\lambda = 1$ שורש של $p_B(\lambda)$, אז ממשפט חלוקה בשארית קיים $q(\lambda) = a\lambda^2 + b\lambda + c$ כך ש:

$$(\lambda-1)q(\lambda) = -\lambda^3 + 6\lambda^2 - 11\lambda + 6 = p_B(\lambda)$$

אפשר להמשיך ב2 דרכים, אפשר להשתמש במשפט חלוקה בשארית, אבל אפשר גם להציב ולפתור ממ"ל, נפתור עם ההצבה:

$$(\lambda-1)q(\lambda) = (\lambda-1)(a\lambda^2+b\lambda+c) = a\lambda^3+b\lambda^2+c\lambda-a\lambda^2-b\lambda-c = \lambda^3(a)+\lambda^2(b-a)+\lambda(c-b)+1(-c)$$

אז:

$$\lambda^3(a) + \lambda^2(b-a) + \lambda(c-b) + 1(-c) = -\lambda^3 + 6\lambda^2 - 11\lambda + 6$$

$$\begin{cases} a = -1 \\ b - a = 6 \\ c - b = -11 \\ -c = 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = 5 \\ c = -6 \end{cases}$$

כלומר:

$$p_B(\lambda) = (\lambda-1)(-\lambda^2+5\lambda-6) = -(\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-3) = (1-\lambda)(2-\lambda)(3-\lambda) = p_A(\lambda)$$

3. משום ש$\deg p_A = \deg p_B$, ושורשי p_A הם $1, 2, 3$, אם הם גם שורשי p_B, והמקדם המוביל שלהם שווה, אז $p_A = p_B$, ואכן בדיקה ישירה תראה לנו כי:

$$p_B(1) = p_B(2) = p_B(3) = 0$$

והמקדמם של λ^3 הוא -1 ב2 הפולינומים, ולכן:

$$p_A(\lambda) = p_B(\lambda)$$

אז B לכסינה כי יש לה 3 ע"ע שונים, ונשים לב כי $p_A(\lambda) = p_B(\lambda)$, ולכן A, B דומות.

תרגיל עשירי

23.1 תרגילים להגשה

1. בתרגיל זה נוכיח כי העתקה $T:\mathbb{R}^{4\times4}\to\mathbb{R}^{4\times4}$ המוגדרת ע"י $T(A)=A^t$ לכסינה.
   (א) חשבו את מימד המרחב העצמי של הע"ע $\lambda=1$ רמז - זה מרחב שאנו מכירים.
   (ב) חשבו את מימד המרחב העצמי של הע"ע $\lambda=-1$ רמז - זה גם מרחב שאנו מכירים.
   (ג) הסיקו מהם הר"ג של $\lambda=1,\lambda=-1$.
   (ד) הסיקו כי T לכסינה, ונמקו מהם הערכים על האלכסון הראשי של הצורה האלכסונית שלה.
2. הוכיחו או הפריכו את הסעיפים הבאים.
   (א) יהיו $A,B\in\mathbb{R}^{n\times n}$ מטריצות, נסמן ב V את המרחב העצמי של ע"ע $\lambda=0$ של A, ובW את המרחב העצמי של ע"ע $\lambda=0$ של BA, אז $V\subseteq W$.
   (ב) יהיו $A,B\in\mathbb{R}^{n\times n}$ מטריצות, נסמן ב V את המרחב העצמי של ע"ע $\lambda=1$ של A, ובW את המרחב העצמי של ע"ע $\lambda=1$ של BA, אז $V\subseteq W$.
3. לכסנו את המטריצה הבאה מעל $\mathbb{C}$.

$$\begin{pmatrix} 3-3i & 6-6i & 0 \\ -1+i & -2+2i & 0 \\ -1+3i & -3+5i & 1+i \end{pmatrix}$$

23.2 תרגילים לא להגשה

תרגיל 23.2.1.

יהא $k\in\mathbb{R}$, ותהא $T:\mathbb{R}^{2\times2}\to\mathbb{R}^{2\times2}$ העתקה לינארית המוגדרת ע"י:

$$A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},\qquad T(A)=\begin{pmatrix} \text{trace}(A) & 0 \\ ka & \text{trace}(A) \end{pmatrix}$$

1. חשבו את $A=[T]_E$ עבור E הבסיס הסטנדרטי.
2. חשבו את $P_A(\lambda)$ הפולינום האופייני.
3. עבור כל $k\in\mathbb{R}$, לכל ע"ע של A מצאו את המ"ע שלו.
4. האם קיימים ערכי k עבורם A לכסינה? אם כן מצאו P הפיכה וD אלכסונית כך ש $A=P^{-1}DP$ ובסיס מלכסן לכל k המאפשר זאת.

פתרון:

1. נסמן את הבסיס הסטנדרטי:

$$E = \left\{ \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{e_1}, \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{e_2}, \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{e_3}, \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{e_4} \right\}$$

אז:

$$T(e_1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ k & 1 \end{pmatrix} = e_1 + ke_3 + e_4$$
$$T(e_2) = 0$$
$$T(e_3) = 0$$
$$T(e_4) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = e_1 + e_4$$

ולכן:

$$A = [T]_E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ k & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2. נחשב את הפ"א עלפי הגדרה:

$$\begin{aligned} \text{det}(A - \lambda I) &= \text{det} \begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -\lambda & 0 & 0 \\ k & 0 & -\lambda & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1-\lambda \end{pmatrix} = (-\lambda)\, \text{det} \begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & 1 \\ k & -\lambda & 0 \\ 1 & 0 & 1-\lambda \end{pmatrix} \\ &= (-\lambda) \left[(1-\lambda)\, \text{det} \begin{pmatrix} -\lambda & 0 \\ 0 & 1-\lambda \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} k & -\lambda \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right] \\ &= (-\lambda)\left[(1-\lambda)^2(-\lambda) + \lambda\right] = (-\lambda)^2[(1-\lambda)^2 - 1] = (-\lambda)^2[1 + 2\lambda - \lambda^2 - 1] \\ &= \lambda^3(2-\lambda) \end{aligned}$$

כאשר פיתחנו בהתחלה עפ"י עמודה 2.

3. יש לנו 2 ע"ע.

(א) עבור ע"ע 2 מר"א 1:

$$(A - 2I)v = 0 \implies 0 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ k & 0 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a+d \\ -2b \\ ka - 2c \\ a - d \end{pmatrix}$$

$$\implies \begin{cases} b = 0 \\ a = d = s \\ ks - 2c = 0 \implies c = \frac{k}{2}s \end{cases}$$

אז:

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{k}{2} \\ 1 \end{pmatrix} \implies V_{\lambda=2} = \text{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{k}{2} & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

(ב) עבור $\lambda = 0$ ע"ע מר"א 3:

$$0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ k & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+d \\ 0 \\ kc \\ a+d \end{pmatrix}$$

ראשית, אם $k \neq 0$, נקבל $c = 0, b = s, a = t, d = -t$, כלומר ר"ג 2 שנפרש ע"י:

$$v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

עם המ"ע:

$$V_{\lambda=0} = \text{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

אם $k = 0$ נקבל את הממ"ל:

$$\begin{pmatrix} a+d \\ 0 \\ kc \\ a+d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

כלומר, $a = t, b = s, c = u, d = -t$, ר"ג 3:

$$v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, v_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

אז:

$$V_{\lambda=0} = \text{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

4. עפ"י הסעיף הקודם, A לכסימה אמ"מ $k = 0$, והצורה האלכסונית היא:

$$D = \text{diag}(2, 0, 0, 0), \qquad P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

עם הבסיס:

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

תרגיל 23.2.2.

<u>תרגיל ממבחן:</u>

תהא $A = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 1 & 8 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ מצאו $B \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ כך ש $B^2 = A$.

<u>פתרון:</u>

נלכסן את A:

$$p_a(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \begin{pmatrix} 5-\lambda & 4 \\ 1 & 8-\lambda \end{pmatrix} = (5-\lambda)(8-\lambda) - 4 = ... = \lambda^2 - 13\lambda + 36$$
$$= ... = (\lambda - 4)(\lambda - 9)$$

כלומר A, לכסינה עם ע"ע $4, 9$ נמצא ו"ע:

$$(A - 4I)v = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} v = 0 \Rightarrow v = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$(A - 9I)v = \begin{pmatrix} -4 & 4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} v = 0 \Rightarrow v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

אז:

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix} = P^{-1}AP$$

כאשר $P = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, ונשים לב כי:

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}^2$$

כלומר אם נסמן:

$$X = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

אז:

$$X^2 = D = P^{-1}AP \Rightarrow A = PX^2P^{-1} = PXP^{-1}PXP^{-1} = (PXP^{-1})^2$$

כלומר:

$$B = PXP^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = ... = \begin{pmatrix} \frac{11}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{14}{5} \end{pmatrix}$$

תרגול שלוש עשרה

24.1 נורמה ומכפלה פנימית

תזכורת

יהי V מרחב וקטורי מעל שדה $\mathbb{F}$ שהוא $\mathbb{R}$ או $\mathbb{C}$. הפונקציה $\langle , \rangle : V \times V \to \mathbb{F}$ נקראת מכפלה פנימית ב V אם מתקיים:

1.
$$\forall u, v_1, v_2 \in V, \qquad \langle u, v_1 + v_2 \rangle = \langle u, v_1 \rangle + \langle u, v_2 \rangle$$

2.
$$\forall u, v \in V, \lambda \in \mathbb{F}, \qquad \langle u, \lambda v \rangle = \lambda \langle u, v \rangle$$

3.
$$\forall u, v \in V, \qquad \langle u, v \rangle = \overline{\langle v, u \rangle}$$

4.
$$\forall v \in V, \quad \langle v, v \rangle \geq 0$$
שימו לב, אם אנו מעל $\mathbb{C}$ הכוונה ל:
$$\forall z \in V, \langle z, z \rangle \in \mathbb{R} \text{ וגם } \langle z, z \rangle \geq 0$$

5. $\langle v, v \rangle = 0 \iff v = 0_V$.

הערה

1. אם אנו מעל $\mathbb{R}$, אז (3) מתורגם לסימטריה:
$$\langle v, u \rangle = \overline{\langle u, v \rangle} = \langle u, v \rangle$$

2. שימוש אינדוקטיבי ב(1)+(2) ייתן לנו את חוק הפילוג, שלכל $\lambda_1, ...\lambda_n, \eta_1, ..., \eta_m \in \mathbb{F}$ ולכל $v_1, ..., v_n, u_1, ..., u_m \in V$ מתקיים:
$$\left\langle \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i, \sum_{j=1}^{m} \eta_j u_j \right\rangle = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \bar{\lambda}_i \eta_j \langle v_i, u_j \rangle$$

תזכורת

יש לנו מספר דוגמאות "סטנדרטיות" לממ"פ:

1. ב-$\mathbb{R}^n$:

$$\left\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \right\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_n y_n$$

2. ב-$\mathbb{C}^n$:

$$\left\langle \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix} \right\rangle = \sum_{i=1}^{n} \overline{z_i} w_i = \overline{z_1} w_1 + \overline{z_2} w_2 + \cdots + \overline{z_n} w_n$$

3. במרחב הפולינומים, $\mathbb{R}_n[x]$:

$$\langle p(x), q(x) \rangle = \int_0^1 p(x) q(x)\, dx$$

4. ב-$\mathbb{R}^{n\times n}$:

$$\langle A, B \rangle = \text{trace}(A^t B)$$

תרגיל 24.1.1.

תהא $\langle .,. \rangle$ הממ"פ הסטנדרטית ב-$\mathbb{R}^n$, הראו כי לכל $v, w \in \mathbb{R}^n$, $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ מתקיים:

$$\langle Av, w \rangle = \langle v, A^t w \rangle$$

<u>פתרון:</u>
נשים לב כי:

$$\langle x, y \rangle = x^t y$$

אז:

$$\langle Ax, y \rangle = (Ax)^t y = x^t A^t y = x^t (A^t y) = \langle x, A^t y \rangle$$

תרגיל 24.1.2.

יהא V מ"ו מעל $\mathbb{R}$, כך ש $V = \text{span}\{v_1, ..., v_n\}$, ויהיו $u, w \in V$ כך ש:

$$\forall 1 \le i \le n, \qquad \langle v_i, u \rangle = \langle v_i, w \rangle$$

הראו כי $u = w$.
הסיקו כי אם $\forall x \in V, \langle x, y \rangle = 0$ אז $y = 0$.

פתרון:

נסמן $v = u - w$, היות ו $\{v_1, ..., v_n\}$ פורשת את V, קיימים (לא בהרכח ביחידות!) $\rho_1, ..., \rho_n, \in \mathbb{R}$ כך ש:

$$v = u - w = \rho_1 v_1 + ... + \rho_n v_n$$

אז:

$$\begin{aligned}\langle v, v\rangle &= \langle v, u - w\rangle = \langle v, u\rangle - \langle v, w\rangle = \langle \rho_1 v_1 + ... + \rho_n v_n, u\rangle - \langle \rho_1 v_1 + ... + \rho_n v_n, w\rangle \\ &= \sum_{i=1}^{n} \rho_i \langle v_i, u\rangle - \sum_{i=1}^{n} \rho_i \langle v_i, w\rangle = \sum_{i=1}^{n} \rho_i (\underbrace{\langle v_i, u\rangle - \langle v_i, w\rangle}_{=0}) = 0\end{aligned}$$

אז $\langle v, v\rangle = 0$, אז בהכרח $v = 0$, ולכן $u = w \implies u - w = 0$.

ההסקה בסוף התרגיל מיידית, מהתרגיל, פשוט נציב $w = 0$, $u = y$.

תרגיל 24.1.3.

תהא $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ מטריצה שמקיימת $\forall v \in \mathbb{R}^n, \langle Av, v\rangle = 0$.

1. הוכיחו כי אם n אי-זוגית אז A לא הפיכה.
2. מצאו דוגמא לn זוגי וA הפיכה שמקיימת את הנתון.

פתרון:

1. יהיו $v, w \in \mathbb{R}^n$, אז מתקיים:

$$\begin{aligned}0 &= \langle A(v + w), v + w\rangle = \langle Av, v + w\rangle + \langle Aw, v + w\rangle \\ &= \cancelto{0}{\langle Av, v\rangle} + \langle Aw, v\rangle + \langle Av, w\rangle + \cancelto{0}{\langle Aw, w\rangle} \\ &= \langle Aw, v\rangle + \langle Av, w\rangle = \langle Aw, v\rangle + \langle v, A^t w\rangle = \langle Aw, v\rangle + \langle A^t w, v\rangle = \langle (A + A^t)w, v\rangle\end{aligned}$$

כלומר, לכל w, מתקיים כי לכל v, $\langle (A + A^t)w, v\rangle = 0$, ולכן $(A + A^t)w = 0$, אבל זה נכון לכל w, אז $A + A^t = 0$.

מתקיים:

$$A = -A^t \Rightarrow \det(A) = \det(-A^t) = \det(-A) = (-1)^n \det(A) = -\det(A) \Rightarrow \det(A) = 0$$

2. עבור $n = 2$, המטריצה $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0\end{pmatrix}$ מקיימת:

$$\left\langle A\begin{pmatrix} x \\ y\end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y\end{pmatrix}\right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y\end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y\end{pmatrix}\right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} y \\ -x\end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y\end{pmatrix}\right\rangle = yx - xy = 0$$

תזכורת

בהנתן מ"מפ $\langle .,. \rangle$, נסמן את הנרומה של $v \in V$ להיות:

$$\|v\| = \sqrt{\langle v, v \rangle}$$

הנורמה מקיימת 3 תכונות חשובות:

1. אי-שליליות:
לכל $v \in V$, הנרומה של v אי-שלילת, והיא אפס אמ"מ $v = 0$, כלומר:
$$\forall v \in V, \|v\| \geq 0, \qquad \|v\| = 0 \iff v = 0$$

2. הומוגיניות:
$$\forall \lambda \in \mathbb{F}, v \in V, \qquad \|\lambda v\| = |\lambda| \|v\|$$

3. אי-שוויון המשולש:
$$\forall u, v \in V, \quad \|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$$

א"ש חשוב המשלב נורמה וממ"פ הוא אי-שוויון קושי-שוורץ:

$$\forall u, v \in V, \qquad |\langle v, u \rangle| \leq \|v\| \cdot \|u\|$$

תרגיל 24.1.4.

תהא $\|.\|$ נורמה המגיעה ממ"פ, הוכיחו את כלל המקבילית:

$$\forall z, w \in V, \|z + w\|^2 + \|z - w\|^2 = 2(\|z\|^2 + \|w\|^2)$$

פתרון:

$$\begin{aligned}
\|z + w\|^2 + \|z - w\|^2 &= \langle z + w, z + w \rangle + \langle z - w, z - w \rangle \\
&= \langle z + w, z \rangle + \langle z + w, w \rangle + \langle z - w, z \rangle + \langle z - w, -w \rangle \\
&= \langle z, z \rangle + \langle w, z \rangle + \langle z, w \rangle + \langle w, w \rangle + \langle z, z \rangle + \langle -w, z \rangle + \langle z, -w \rangle + \langle -w, -w \rangle \\
&= 2\|z\|^2 + 2\|w\|^2 + \langle w, z \rangle + \langle z, w \rangle + \langle -w, z \rangle + \langle z, -w \rangle \\
&= 2\|z\|^2 + 2\|w\|^2 + \langle w, z \rangle + \langle z, w \rangle - \langle w, z \rangle - \langle z, -w \rangle \\
&= 2\|z\|^2 + 2\|w\|^2
\end{aligned}$$

תרגיל 24.1.5.

יהא $V = \mathbb{R}_n[x]$ אוסף הפולינומים עד מעלה n, עבור $p(x) \in \mathbb{R}_n[x]$ נגדיר:

$$N(p(x)) = \max_{x\in[0,1]} |p(x)|$$

הוכיחו כי N מקיימת אי-שליליות, אי-שוויון המשולש והומוגניות, אך לא נורמה שמגיעה ממכ"פ.

<u>פתרון:</u>
זה שN מקיימת את 3 התכונות זה פחות בחומר הקורס, ולכן נשאיר זאת כתרגיל.
אם N הייתה מגיעה ממכ"פ היא הייתה מקיימת את כלל המקבילית, כלומר עבור $p_1(x) = x$, $p_2(x) = 1$ היה מתקיים:

$$N(p_1(x) + p_2(x))^2 + N(p_1(x) - p_2(x))^2 = 2(N(p_1(x))^2 + N(p_2(x))^2)$$

נחשב:

$$N(p_1(x) + p_2(x)) = \max_{x\in[0,1]} |x+1| = 2, \qquad N(p_1(x) - p_2(x)) = \max_{x\in[0,1]} |x-1| = 1$$

$$N(p_1(x)) = \max_{x\in[0,1]} |x| = 1, \qquad N(p_2(x)) = \max_{x\in[0,1]} |1| = 1$$

כלומר:

$$2^2 + 1^2 = 2(1^2 + 1^2) \Rightarrow 5 = 4$$

שזאת סתירה.

24.2 אורתוגונליות, אורתונורמליות וגראם שמידט

24.2.1 אורתוגונליות ואורתונורמליות

תזכורת

יהא V מ"ו ו $\langle .,. \rangle$ מ"פ עליו. קבוצה $S = \{v_1, ..., v_n\}$ נקראת <u>אורתוגונלית</u> אם:

$$i \neq j, \qquad \langle v_i, v_j \rangle = 0$$

והיא נקראת <u>אורתונורמלית</u> אם היא אורתוגונלית וכל איבר בה מנורמל, כלומר

$$\forall i, \qquad \|v_i\| = 1$$

נשים לב כי אם $B = \{v_1, ..., v_n\}$ קבוצה א"ג אז, $C = \left\{\frac{v_1}{\|v_1\|}, ..., \frac{v_n}{\|v_n\|}\right\}$ קבוצה א"נ.

תזכורת

מאוד נוח לנו לעבוד עם בסיס שהוא גם קבוצה א"ג.
יהא $B=(v_1,...,v_n)$ בסיס שהוא א"ג. אנו יודעים כי לכל $v\in V$ קיימים סקלרים $\lambda_1,...,\lambda_n\in\mathbb{F}$ כך ש $v=\lambda_1v_1+...+\lambda_nv_n$, אז כל j מקיים:

$$\langle v_j,v\rangle=\langle v_j,\lambda_1v_1+...+\lambda_nv_n\rangle=\lambda_j\|v_j\|^2\Rightarrow\lambda_j=\frac{\langle v_j,v\rangle}{\|v_j\|^2}=\frac{\langle v_j,v\rangle}{\langle v_j,v_j\rangle}$$

כלומר:

$$v=\sum_{i=1}^n\lambda_iv_i=\sum_{i=1}^n\frac{\langle v_i,v\rangle}{\|v_i\|^2}v_i=\sum_{i=1}^n\frac{\langle v_i,v\rangle}{\langle v_i,v_i\rangle}v_i$$

בפרט אם B א"נ:

$$v=\sum_{i=1}^n\lambda_iv_i=\sum_{i=1}^n\langle v_i,v\rangle v_i$$

תרגיל 24.2.1.

הוכיחו כי $B=\left(\begin{pmatrix}3\\1\\3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\-6\\1\end{pmatrix}\right)$ בסיס א"ג, ונרמלו אותו.

<u>פתרון:</u>
נסמן את הוקטורים v_1,v_2,v_3 בהתאמה אז:

$$\langle v_1,v_2\rangle=3\cdot1+0\cdot1-3\cdot1=0,\qquad\langle v_1,v_3\rangle=3\cdot1-6\cdot1-3\cdot1=0,\qquad\langle v_2,v_3\rangle=1+0-1=0$$

ולכן היא א"ג, נחשב:

$$\|v_1\|=\sqrt{\langle v_1,v_1\rangle}=\sqrt{9+1+9}=\sqrt{19},\ \|v_2\|=\sqrt{1^2+(-1)^2}=\sqrt{2},\ \|v_3\|=\sqrt{1+1+36}=\sqrt{38}$$

אז הבסיס שלנו הוא:

$$C=\left(\frac{1}{\sqrt{19}}v_1,\frac{1}{\sqrt{2}}v_2,\frac{1}{\sqrt{38}}v_3\right)=\left(\begin{pmatrix}\frac{3}{\sqrt{19}}\\\frac{1}{\sqrt{19}}\\\frac{3}{\sqrt{19}}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\0\\-\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{38}}\\-\frac{6}{\sqrt{38}}\\\frac{1}{\sqrt{38}}\end{pmatrix}\right)$$

תרגיל 24.2.2.

יהי $S=(v_1,...,v_n)$ קבוצה כך ש:

$$\forall1\le i\le n-1,\qquad\langle v_i,v_{i+1}\rangle=\langle v_1,v_n\rangle=0$$

הוכיחו או הפריכו, S א"ג.

פתרון:
זה לא נכון, למשל:

$$S = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right)$$

דוגמא נגדית.

24.2.2 תהליך גראם שמידט

תזכורת

בהנתן מ"פ $(V, \langle , \rangle)$ וקבוצה בת"ל $W = \{v_1, ..., v_n\}$, תהליך גרם-שמידט הוא תהליך של בניית קבוצה א"נ חדשה U, כך ש:

$$\text{span}(U) = \text{span}(V)$$

נבנה את U באינדוקציה ע"י:

$$u_1 = \frac{v_1}{\|v_1\|}$$

$$\tilde{u}_k = v_k - \langle u_1, v_k \rangle u_1 - ... - \langle u_{k-1}, v_k \rangle u_{k-1}, \qquad u_k = \frac{\tilde{u}_k}{\|\tilde{u}_k\|}$$

נדגים את השיטה.

דוגמא 24.2.3.

יהיו $v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, v_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, וקטורים ב$\mathbb{R}^4$ עם המ"פ הסטנדרטית. נבצע את תהליך גרם-שמידט.

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{u}_2 = v_2 - \langle u_1, v_2 \rangle u_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{u}_3 = v_3 - \langle u_1, v_3\rangle u_1 - \langle u_2, v_3\rangle u_2 = \begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix} - \left\langle \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix} \right\rangle \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix} - \left\langle \begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix} \right\rangle \begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}0\\0\\1\\1\end{pmatrix} \Rightarrow u_3 = \begin{pmatrix}0\\0\\\frac{1}{\sqrt{2}}\\\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$$

תרגיל 24.2.4.

יהיו:

$$v_1 = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}a\\a\\1\end{pmatrix}$$

1. מצאו a כך ש v_1, v_2 אורתוגונליים.
2. עבור $a=-1$, מצאו u_1, u_2 אורתונורמליים כך שפורשים את התמ"ו שנפרש ע"י v_1, v_2.
3. השלמיו את u_1, u_2 לבסיס א"נ של $\mathbb{R}^3$, ניתן להשאיר את הווקטור האחרון בצורה $\tilde{u}_3$ כאשר $u_3 = \frac{1}{\|\tilde{u}_3\|}u_3$.

<u>פתרון:</u>

1. ראשית נחשב את $\langle v_1, v_2\rangle$:

$$\left\langle \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}a\\a\\1\end{pmatrix} \right\rangle = a + 2a + 3 = 3a + 3$$

אז v_1, v_2 א"ג אמ"מ $a=-1 \iff 3a+3=0$.

2. עבור $a=-1$, הוקטורים כבר א"ג, לכן נותר רק לבצע נרמול:

$$u_1 = \frac{1}{\|v_1\|}v_1 = \frac{1}{\sqrt{1^2+2^2+3^2}}\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{14}}\\\frac{2}{\sqrt{14}}\\\frac{3}{\sqrt{14}}\end{pmatrix}$$

$$u_2 = \frac{1}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}}\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt{3}}\\-\frac{1}{\sqrt{3}}\\\frac{1}{\sqrt{3}}\end{pmatrix}$$

3. ראשית, נשלים את u_1, u_2 לבסיס ע"י הוספת v_3, וכמובן שעשינו זאת כבר פעמים רבות, ומומעד פשוט הינו:

$$v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

רק ניתן לבצע עליו גרם שמידט על v_3:

$$\begin{aligned}
\tilde{u}_3 &= v_3 - \langle u_1, v_3 \rangle u_1 - \langle u_2, v_3 \rangle u_2 \\
&= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \left\langle \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{14}} \\ \frac{2}{\sqrt{14}} \\ \frac{3}{\sqrt{14}} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{14}} \\ \frac{2}{\sqrt{14}} \\ \frac{3}{\sqrt{14}} \end{pmatrix} - \left\langle \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{\sqrt{14}} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{14}} \\ \frac{2}{\sqrt{14}} \\ \frac{3}{\sqrt{14}} \end{pmatrix} + \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{1}{14} \\ \frac{2}{14} \\ \frac{3}{14} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 - \frac{1}{14} - \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{14} - \frac{1}{3} \\ -\frac{3}{14} + \frac{1}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{25}{42} \\ -\frac{20}{42} \\ \frac{5}{42} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

24.2.3 הטלה ומשלים אורתוגונלי

תזכורת

יהא V מ"ו עם מ"פ $\langle .,. \rangle$, אם W תמ"ו של V, נסמן:

1. המשלים הא"ג של W:
$$W^{\perp} = \{ v \in V | \forall w \in W, \langle v, w \rangle = 0 \}$$
והוא מ"ו.

2. אם $B_W = (v_1, ..., v_n)$ בסיס א"נ של W, נסמן:
$$P : V \to W, \qquad P(v) = \sum_{i=1}^{n} \langle v, v_i \rangle v_i$$
העתקה זאת נקראת <u>ההיטל של V על W</u>.

תרגיל 24.2.5.

יהא V מ"ו ממימד n. יהא W תמ"ו של V.

1. הוכיחו כי אם $w \in W$, אז $P(w) = w$.
2. הוכיחו כי $P_W^2 = P_W$.
3. הוכיחו כי $\dim(W^\perp) = n - \dim(W)$.
4. הוכיחו כי $V = W \oplus W^\perp$.
5. הסיקו כי P_W אופרטור לכסין, ואת הצורה האלכסונית שלו.

<u>פתרון:</u>
נבחר בסיס א"נ $(w_1, ..., w_k)$ ל W.

1. אם $w \in W \subset V$, אז:
$$w = \sum_{j=1}^{k} \langle w, w_i \rangle w_i$$
ולכן:
$$P_W(w) = P_W\left(\sum_{j=1}^{k} \langle w, w_j \rangle w_j\right) = \sum_{j=1}^{k} \langle w, w_j \rangle P_W(w_j) = \sum_{j=1}^{k} \langle w, w_j \rangle \left(\sum_{i=1}^{k} \langle w_i, w_j \rangle w_i\right)$$
$$= \sum_{j=1}^{k} \langle w, w_j \rangle w_j = w$$
2. יהא $v \in V$, לפי הגדרה $P_W(v) \in W$, אז לפי הסעיף הקודם, $P_W^2(v) = P_W(P_W(v))$ אז $P_W(P_W(v)) = P_W(v)$.
3. נשים לב כי $\ker(P_w) = W^\perp$, ועפ"י הסעיף הקודם P_w על, לכן לפי משפט המימדים:
$$n = \dim V = \dim(\ker(P_w)) + \mathrm{Im}(P_w) = \dim(W^\perp) + \dim(W)$$
כלומר:
$$\dim(W^\perp) = n - \dim(W)$$
4. אנו יודעים כי $\dim(W) + \dim(W^\perp) = \dim(V)$, בנסוף, אם $v \in W \cap W^\perp$ אז $\langle v, v \rangle = 0$ ולכן $v = 0$, כלומר $\dim(W \cap W^\perp) = 0$, אז ממשפט המימדים $\dim(W + W^\perp) = \dim(V)$, ולכן $W + W^\perp = V$, כלומר $V = W \oplus W^\perp$.
5. נשים לב כי $W^\perp$ מקיים $W^\perp = \ker P_W = V_{\lambda=0}$ הוא המרחב העצמי של הע"ע $\lambda = 0$, נשים לב כי המרחב העצמי של ע"ע $\lambda = 1$ הוא:
$$\begin{aligned} V_{\lambda=1} &= \{v \in V | P_W(v) = v\} = \{w + u | w \in W, u \in W^\perp, P_W(w+u) = w + u\} \\ &= \{w + u | w \in W, u \in W^\perp, w = w + u\} = \{w + u | w \in W, u \in W^\perp, u = 0\} \\ &= W \end{aligned}$$

כלומר, $V = V_{\lambda=1} \oplus V_{\lambda=0}$, ולכן A לכסינה והצורה האלכסונית שלה הינה עם $\dim(V_{\lambda=1}) = \dim(W)$ 1 על האלכסון ו $\dim(V_{\lambda=0}) = \dim(W^{\perp}) = n - \dim(W)$ 0 על האלכסון.

תרגיל 24.2.6.

יהא V מ"ו ממימד n. יהא W תמ"ו של V, הוכיחו כי $W = (W^{\perp})^{\perp}$.

פתרון:

ראשית נראה כי $W \subset (W^{\perp})^{\perp}$.

יהא $w \in W$, נסמן $U = W^{\perp}$, אנו רוצים להראות כי לכל $u \in U$ מתקיים $\langle w, u \rangle = 0$, אבל משום ש $U = W^{\perp}$ אז $\langle v, u \rangle = 0$.

עפ"י התרגיל הקודם:

$$\dim((W^{\perp})^{\perp}) = n - \dim(W^{\perp}) = n - (n - \dim(W)) = \dim(W)$$

ולכן, משיקולי מימד $W \subset (W^{\perp})^{\perp}$.

תרגיל 24.2.7.

מעל $\mathbb{C}^3$, חשבו את המשלים הא"ג של

$$W = \text{span}_{\mathbb{C}} \left\{ \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 1 \end{pmatrix}}_{v_1}, \underbrace{\begin{pmatrix} i+1 \\ i-1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{v_2} \right\}$$

פתרון:

נשים לב כי $v \in W^{\perp}$ אמ"מ $\langle v, v_1 \rangle = \langle v, v_2 \rangle = 0$. נסמן $v = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix}$ אז:

$$0 = \langle v, v_1 \rangle = \overline{z_1} + \overline{z_2} i + \overline{z_3}$$

$$0 = \langle v, v_2 \rangle = \overline{z_1}(i+1) + \overline{z_2}(i-1) + \overline{z_3}$$

אז יש לנו ממ"ל הומוגנית:

$$\begin{cases} \overline{z_1} + \overline{z_2} i + \overline{z_3} = 0 \\ \overline{z_1}(i+1) + \overline{z_2}(i-1) + \overline{z_3} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & i & 1 \\ i+1 & i-1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overline{z_1} \\ \overline{z_2} \\ \overline{z_3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

דירוג יראה לנו כי:

$$\begin{pmatrix} \overline{z_1} \\ \overline{z_2} \\ \overline{z_3} \end{pmatrix} = \text{span}_{\mathbb{C}} \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 0 \end{pmatrix}$$

כלומר:

$$\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} = \text{span}_{\mathbb{C}} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \\ 0 \end{pmatrix}$$

כלומר:

$$W^{\perp} = \text{span}_{\mathbb{C}} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \\ 0 \end{pmatrix}$$

24.3 תרגיל אחת עשרה (לא להגשה)

24.3.1 תרגילים לא להגשה

תרגיל 24.3.1.

(תרגיל ממבחן - מועד א' תשפ"ד)
נתבונן ב $\mathbb{R}^n$ כמרחב מכפלה פנימית מעל שדה $\mathbb{R}$ עם המכפלה הפנימית הסטנדרטית.
יהיו $\mathbb{R}^n \ni u = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}, \; v = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$ שני וקטורים כך ש $u \neq \vec{0}$ וגם $v \neq \vec{0}$.
תהי $A = uv^t \in \mathbb{R}^{n\times n}$ מטריצה המתקבלת ע"י הכפלת וקטור עמודה u בוקטור שורה v^t.

1. רשמו את רכיבי המטריצה A והראו ש A אינה מטריצת האפס.
2. הוכיחו כי $\text{rank}(A) = 1$.
3. הוכיחו כי A לכסינה אם ורק אם הוקטורים u, v אינם אורתוגונליים.

<u>פתרון:</u>

1. רכיבי המטריצה נתונים ע"י $A_{ij} = u_i v_j$. נתון כי $u \neq \vec{0}$. לכן לפחות אחד הרכיבים שלו שונה מ 0: $u_i \neq 0$.
   נתון גם ש $v \neq \vec{0}$. לכן קיים $1 \leq j \leq n$ כך ש $v_j \neq 0$.
   לכן מתקיים: $A_{ij} = u_i v_j \neq 0$. נסיק שהמטריצה A איננה מטריצת האפס.
2. נציג שתי דרכי פתרון:
   <u>דרך א</u> נשים לב שהעמודה ה- j של A נתונה ע"י
   $$(u_1 v_j, u_2 v_j, \dots, u_n v_j) = v_j \cdot u$$
   כלומר, כל העמודות של A הן כפולות של הוקטור u.

נסיק שמרחב העמודות של A הינו

$$C(A) = Span(u) \neq \{\vec{0}\}$$

ולכן $\text{rank}(A) = \dim(C(A)) = 1$.

<u>דרך ב</u> לפי משפט שלמדנו, $\text{rank}(XY) \leq \min(\text{rank}\, X, \text{rank}\, Y)$.
לכן $\text{rank}(A) \leq \min(\text{rank}\, u, \text{rank}\, v^t)$.
כיוון ש $u \neq \vec{0}$, $v \neq \vec{0}$, מתקיים: $\text{rank}\, u = \text{rank}\, v^t = 1$.
לכן $\text{rank}(A) \leq 1$.
כיוון ש A אינה מטריצת האפס, מתקיים: $\text{rank}(A) \geq 1$.
לכן $\text{rank}(A) = 1$.

3. תחילה, נשים לב שממשפט הדרגה מתקיים

$$\dim(\mathcal{N}(A)) = n - \text{rank}(A) = n - 1$$

לכן $\lambda_1 = 0$ הינו ע"ע עם ריבוי גיאומטרי $n-1$. מכך נסיק ש A לכסינה אם"ם קיים לה ע"ע אחד נוסף λ_2 ששונה מאפס מריבוי אלגברי (וריבוי גיאומטרי) 1.

אפשר להמשיך את הפתרון באחת מהדרכים הבאות:

<u>דרך א</u> המטריצה A לכסינה אם"ם קיים $w \neq \vec{0}$ וגם $\lambda_2 \neq 0$ כך שמתקיים $Aw = \lambda_2 w$.
מכאן

$$uv^t w = \langle v, w\rangle u = \lambda_2 w \iff \langle v, w\rangle \neq 0$$

מצד שני, מתקיים

$$w = \frac{\langle v, w\rangle}{\lambda_2} u$$

כלומר w כפולה של u ולכן לפי מה שקיבלנו

$$\langle v, w\rangle \neq 0 \iff \langle v, u\rangle \neq 0$$

כנדרש.

<u>דרך ב</u> כידוע, סכום כל הע"ע של A שווה ל $traceA$.
לכן

$$\underbrace{(n-1)\lambda_1}_{0} + \lambda_2 = trace(A) = u_1 v_1 + \cdots + u_n v_n = \langle u, v\rangle$$

מכאן $\lambda_2 = \langle u, v\rangle$.
לכן A לכסינה אם"ם $\lambda_2 \neq 0$ אם"ם u, v אינם אורתוגונליים.

תרגיל 24.3.2.

יהא $\mathbb{R}^n$ עם המכפלה הפנימית הסטדנרטית, וA מטריצה $n \times n$ הוכיחו כי

$$\forall v \in \mathbb{R}^n, \|Av\| = \|v\| \iff \forall u, v \in \mathbb{R}^n, \langle Av, Au \rangle = \langle v, u \rangle$$

<u>פתרון:</u>
הכיוון $\Leftarrow$ ברור.
נניח כי מתקיים צד שמאל של הטענה, יהיו $u, v \in \mathbb{R}^n$

$$\begin{aligned}\|A(u+v)\|^2 &= \langle Au + Av, Au + Av \rangle = ... = \langle Au, Au \rangle + \langle Av, Av \rangle + 2\langle Au, Av \rangle \\ &= \|Av\|^2 + \|Au\|^2 + 2\langle Au, Av \rangle \\ &= \|v\|^2 + \|u\|^2 + 2\langle Au, Av \rangle\end{aligned}$$

מצד שני:

$$\begin{aligned}\|A(u+v)\|^2 &= \|u+v\|^2 = \langle u+v, u+v \rangle \\ &= ... = \|u\|^2 + \|v\|^2 + 2\langle u, v \rangle\end{aligned}$$

כלומר:

$$\|v\|^2 + \|u\|^2 + 2\langle Au, Av \rangle = \|u\|^2 + \|v\|^2 + 2\langle u, v \rangle \Rightarrow \langle Au, Av \rangle = \langle u, v \rangle$$