רשימות תרגול לקורס אלגברה לינארית להנדסה מכנית

נכתב על ידי גאיה סטון ובן פוירשטיין

רשימות תרגול אילו נכתבו בצמוד לקורס כפי שלימדו ד"ר לודה מרקוס-אפשטיין ומר איתן רוזן
באוניברסיטת תל אביב בסמסטר א' תשפ"ד.
רשימות אילו עלולות להכיל טעויות, חוסרים או אי דיוקים, תיקונים יתקבלו בברכה.
bf1@mail.tau.ac.il
gaiastone@mail.tau.ac.il

תוכן העניינים

תרגול ראשון

1.1 פולינומים

1.1.1 הגדרת פולינומים ושורשיהם

תזכורת.

פולינום הוא פונקציה $p(x)$ שמקבלת מספר ממשי ומחזירה מספר ממשי, מהצורה:

$$p(x) = a_nx^n + x_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1x + a_0$$

כאשר $a_n, ..., a_0$ מספרים ממשיים.
נקרא לa_m המקדם של x^m.
בהנתן פולינום $p(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1x + a_0$, כך ש $a_n \neq 0$,
נקרא לa_0 האיבר החופשי, לa_n האיבר המוביל , ולn הדרגה, או המעלה של $p(x)$ שנסמן $\deg(p)$.
לפולינום $p(x) = 0$ נקרא פולינום האפס, ונגדיר $\deg(p) = -\infty$ (נראה מדוע זו הגדרה הגיונית בהמשך). פולינום מהצורה $p(x) = a_nx^n$ נקרא מונום.

הערה.

בהמשך הקורס נגדיר מהו "מספר ממשי" בצורה ברורה יותר, כרגע נחשוב על המספרים הממשיים בתור המספרים שאנו מכירים, לדוגמא,

$$3, 1, -5, \frac{1}{2}, \pi, \sqrt{5}, \frac{3\pi}{4}, 0$$

הסימון של קבוצת הממשיים הוא $\mathbb{R}$, על שמן באנגלית, Real Numbers.
אם x_0 מספר ממשי, נסמן $x_0 \in \mathbb{R}$.
נסמן:

$$p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

כפונקציה שמקבלת מספר ב$\mathbb{R}$ ומחזירה מספר ב$\mathbb{R}$.

תרגיל 1.1.1.

קבעו האם הפונקציות הבאות הן פולינומים, אם כן מצאו את הדרגה, האיבר החופשי והמקדם המוביל שלהם.

1.
$$p_1(x) = 5x + 3$$

2.
$$p_2(x) = 5$$

3.
$$p_3(x) = 10x^5$$

4.
$$p_4(x) = \frac{x^2}{x+1}$$

5.
$$p_5(x) = 0$$

6.
$$p_6(y) = y^3 + 2y^2 - 1$$

7.
$$p_7(x) = x^{\frac{1}{2}}$$

8.
$$p_8(a) = \pi a^3 - 7a$$

9.
$$p_9(x) = x^3 + x + 3^x$$

פתרון:

	deg(p)	האיבר המוביל	האיבר החופשי
$p_1(x)$	1	5	3
$p_2(x)$	0	5	5
$p_3(x)$	5	10	0
$p_4(x)$	לא פולינום		
$p_5(x)$	$-\infty$	0	0
$p_6(x)$	3	1	-1
$p_7(x)$	לא פולינום		
$p_8(x)$	3	π	0
$p_9(x)$	לא פולינום		

תזכורת.

שורש של פולינום $p(x)$ הוא מספר ממשי $x_0 \in \mathbb{R}$ המקיים,

$$p(x_0) = 0$$

דוגמא 1.1.2.

1.
$$p(x) = 3x - 6,\ x_0 = 2$$

2.
$$p(y) = y^2 - 1,\ y_0 = 1$$

3.
$$p(x) = x^2 - 6x + 9,\ x_0 = 3$$

4.
$$p(x) = 0,\ x_0 \in \mathbb{R}$$

5.
$$p(z) = z^4 + 3z^2 - 4,\ z_0 = 1$$

תרגיל 1.1.3.

הוכיחו כי אם סכום המקדמים של $p(x)$ שווה לאפס, אז $x_0 = 1$ שורש של $p(x)$.

<u>פתרון:</u>

יהא $p(x) = a_n x^n + ... + a_1 x + a_0$ פולינום כאשר סכום מקדמיו אפס, נציב $x_0 = 1$ ונקבל:

$$p(x_0) = p(1) = a_n \cdot 1^n + ... + a_1 \cdot 1 + a_0 = a_n + ... + a_1 + a_0 = 0$$

ולכן $x_0 = 1$ שורש של $p(x)$.

טענה 1.1.4 (ללא הוכחה).

1. לפולינום ממעלה $n = \deg(p)$ יש לכל היותר n שורשים.
2. אם לפולינום $p(x)$ מדרגה n יש $\xi_1, ..., \xi_n$ שורשים (לא בהכרח שונים), אז קיים $c \in \mathbb{R}$ כך ש:

$$p(x) = c(x - \xi_1) \cdot (x - \xi_2) \cdot ... \cdot (x - \xi_n)$$

ונשים לב כי c יהיה האיבר המוביל של $p(x)$.

טענה 1.1.5.

אם $\deg(p)=2$, יש לנו נוסחא מפורשת למציאת שורשי הפולינום, הנקראת נוסחאת השורשים.

$$ax^2+bx+c=0 \Leftrightarrow x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

הוכחה:

$$(x+a)^2=x^2+2ax+a^2$$

אז:

$$\begin{aligned} ax^2+bx+c=0 &\Rightarrow x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0 \Rightarrow x^2+2\frac{b}{2a}x+\left(\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{c}{a}=0 \\ &\Rightarrow \left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\left(\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{c}{a}=\frac{b^2-4ac}{4a^2} \\ &\Rightarrow x=\pm\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}-\frac{b}{2a}=\frac{\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}-\frac{b}{2a}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \end{aligned}$$

נשים לב כי אם נסמן $\Delta=b^2-4ac$, אז יש לנו 3 מקרים:

1. אם $\Delta>0$ אז יש לפולינום 2 שורשים.
2. אם $\Delta=0$ אז יש לנו 2 פתרונות שהן אותו מספר, כלומר $p(x)=c(x-a)^2$.
3. אם $\Delta<0$ אז אין פתרון.

תרגיל 1.1.6.

פתרו את המשוואת הבאות, כלומר מצאו את כל ה$x\in\mathbb{R}$ המקיימים אותן.

1. $$x^2-7x+12=0$$
2. $$2x^2-12x+18=0$$
3. $$x^2=-1$$

פתרון:

1.

$$x_{1,2}=\frac{7\pm\overbrace{\sqrt{7^2-4\cdot 12}}^{1}}{2}\Rightarrow x_1=3,x_2=4$$

2.

$$x_{1,2}=\frac{12\pm\cancelto{0}{\sqrt{12^2-4\cdot 2\cdot 18}}}{4}=3$$

כלומר, $x=3$ הפתרון היחיד.

3. המשוואה היא $x^2+1=0$, אז, $\sqrt{b^2-4ac}=\sqrt{-4}$ שאינו מוגדר, ולכן אין פתרון.

הערה.

גם לפולינומים ממעלה $3,4$ יש נוסחאות, אבל הן נורא נורא ארוכות, לדוגמא:

$$\begin{aligned} x &= \sqrt[3]{\left(\frac{-b^3}{27a^3}+\frac{bc}{6a^2}-\frac{d}{2a}\right)+\sqrt{\left(\frac{-b^3}{27a^3}+\frac{bc}{6a^2}-\frac{d}{2a}\right)^2+\left(\frac{c}{3a}-\frac{b^2}{9a^2}\right)^3}} \\ &+ \sqrt[3]{\left(\frac{-b^3}{27a^3}+\frac{bc}{6a^2}-\frac{d}{2a}\right)-\sqrt{\left(\frac{-b^3}{27a^3}+\frac{bc}{6a^2}-\frac{d}{2a}\right)^2+\left(\frac{c}{3a}-\frac{b^2}{9a^2}\right)^3}} \quad - \quad \frac{b}{3a}. \end{aligned}$$

עבור $ax^3+bx^2+cx+d=0$.
מסתבר שאין נוסחא לפולינומים מדרגה 5 ומעלה! זאת עובדה מאוד מפתיעה מתחום במתמטיקה הנקרא תורת גלואה.

1.1.2 מכפלה וסכום של פולינומים

תזכורת.

יהיו $p(x),q(x)$ פולינומים. אנחנו יכולים לחבר פולינומים איבר איבר.

דוגמא 1.1.7.

נתבונן בדוגמאות הבאות:

1. $(x^2+5x)+(x^3+2x+4)=x^3+x^2+(5+2)x+4=x^3+x^2+7x+4$
2. $(z^4+4z^3+2)+(4z^4+z^3+3z)=5z^4+5z^3+3z+2$

3. $(x^{100}+x^4-3x)+(-x^{100}+3x+3)=x^4+3$

תרגיל 1.1.8.

יהיו $p(x),q(x)$ פולינומים הוכיחו כי: $p(x)+q(x)$ הוא פולינום ממעלה לכל היותר המקסימום של המעלות.

פתרון:
ראשית נסמן את הפולינומים באופן הבא: $p(x)=a_nx^n+...+a_0$, $q(x)=b_mx^m+...+b_0$.
נחלק למקרים:

1. אם $p(x)=0$, אז:
$$p(x)+q(x)=0+q(x)=q(x)$$
והטענה ברורה.
2. אם $q(x)=0$, אז המקרה זהה לחלוטין.
3. אם $n=\text{deg}(p)=\text{deg}(q)=m$, אז:
$$\begin{aligned}p(x)+q(x)&=(a_nx^n+...+a_0)+(b_mx^m+...+b_0)=a_nx^n+...+a_0+b_nx^n+...+b_0\\&=(a_n+b_n)x^n+...+(a_0+b_0)\end{aligned}$$
הוא פולינום, ודרגתו היא לכל היותר n (יכול להיות כי $a_n+b_n=0$ ואז הדרגה קטנה מn, אבל לא ייתכן כי דרגתו גדולה מn).
4. אם $n=\text{deg}(p)>\text{deg}(q)=m$, וגם $p(x)\neq 0, q(x)\neq 0$.
$$\begin{aligned}p(x)+q(x)&=(a_nx^n+...+a_{m+1}x^{m+1}+a_mx^m+...+a_0)+(b_mx^m+...+b_0)\\&=a_nx^n+...+a_{m+1}x^{m+1}+(a_m+b_m)x^m+...+(a_0+b_0)\\&=a_nx^n+...+(a_0+b_0)\end{aligned}$$
הוא פולינום, ומתקיים $\text{deg}(p+q)=\text{deg}(p)$ שכן $a_n\neq 0$.
5. המקרה האחרון שנשאר לנו הוא $\text{deg}(q)>\text{deg}(q)$, אבל ההוכחה הזאת זהה למקרה הקודם.

הערה.

במקרים כאלה, שיש לנו 2 טענות להוכיח, אבל אנו יודעים מראש שההוכחות יהיו כמעט זהות, יש ביטוי בו משתמשים, הביטוי הוא "בלי הגבלת הכללית" או בראשי תיבות בה"כ, כאשר הניסוח הוא: בה"כ נניח כי $\text{deg}(p)>\text{deg}(q)$, השימוש בכלי הזה עלול להחביא טעויות, ויש להיזהר כאשר משתמשים בו.

תזכורת.

יהיו $p(x), q(x)$ פולינומים. אנחנו יכולים להכפיל פולינומים ע"י פתיחת סוגריים וכינוס איברים.

דוגמא 1.1.9.

נתבונן בדוגמא הבאה:

$$(x^2+5x)\cdot(2x+4) = 2x^3+10x^2+4x^2+20x = 2x^3+14x^2+20x$$

תרגיל 1.1.10.

יהיו $p(x), q(x)$ פולינומים הוכיחו כי:
$p(x)\cdot q(x)$ הוא פולינום ממעלה $\deg(p)+\deg(q)$, כאשר נגדיר $-\infty = -\infty + a$ לכל a.

<u>פתרון:</u>
נחלק למקרים שוב,

1. בה"כ, $p(x)=0$, אז $p(x)\cdot q(x)=0$, ולכן

$$\deg(p(x)\cdot q(x)) = \deg(0) = -\infty$$

והוכחנו את הטענה.

2. נניח כי $p(x), q(x) \neq 0$,
נסמן את הפולינומים באופן הבא: $p(x) = a_n x^n + ... + a_0$, $q(x) = b_m x^m + ... + b_0$.
מתקיים:

$$(a_n x^n + ... + a_0)(b_m x^m + ... + b_0) = a_n b_m x^n x^m + ... + a_0 b_0 = a_n b_m x^{n+m} + ... + a_0 b_0$$

ראשית, נשים לב שאכן מדובר בפולינום, כאשר המקדם המוביל שלו הוא:

$$a_n b_m x^n x^m = a_n b_m x^{n+m}$$

ומשום ש $a_n \neq 0, b_m \neq 0$, אז גם $a_n b_m \neq 0$, ולכן:

$$n+m = \deg(p(x)q(x)) = \deg(p)+\deg(q) = n+m$$

1.1.3 חלוקה של פולינומים

תזכורת.

יהיו $p(x), q(x)$ פולינומים שאינם פולינום האפס, אז קיימים פולינומים $r(x), s(x)$ כך ש $\deg(r) < \deg(p)$ המקיימים:

$$q(x) = s(x)p(x) + r(x)$$

וזה נותן לנו לכתוב:

$$\frac{q(x)}{p(x)} = s(x) + \frac{r(x)}{p(x)}$$

אם $r(x) = 0$ נאמר כי $p(x)$ מחלק את $q(x)$ ללא שארית.

טענה (ללא הוכחה) .1.1.11

בהינתן $p(x), q(x)$ יש לנו אלגוריתם למציאת $r(x), s(x)$ שנקרא חלוקה לשארית של פולינומים.

דוגמא .1.1.12

נניח ואנו רוצים לחלק את $\frac{x^4+x^3+5x^2+3x-10}{x^2-2x+1}$, כלומר $q(x) = x^4 + x^3 + 5x^2 + 3x - 10, p(x) = x^2 - 2x + 1$.

ניקח את המונום ממעלה הכי גבוה של $q(x)$ונחלק במונום ממעלה הגבוה ביותר של $p(x)$, במקרה שלנו נקבל

$\frac{x^4}{x^2} = x^2$, נכתוב את התוצאה מעל (ראו את הכתיב המלא מטה), נכפיל ב$p(x)$ ונחסיר מ$q(x)$ את מה שקיבלנו, כלומר:

$$(x^4 + x^3 + 5x^2 + 3x - 10) - x^2(x^2 - 2x + 1) = 3x^3 + 4x^2 + 3x - 10$$

נמשיך כך עד שישאר לנו פולינום ממעלה נמוכה יותר מ$p(x)$, לאחר שנסיים, מה שנשאר לנו מטה הוא $r(x)$, והפולינום שקיבלנו למעלה הוא $s(x)$.

$$\begin{array}{r|rrrrr}
 & & & x^2 & +3x & +10 \\
\hline
x^2-2x+1 & x^4 & +x^3 & +5x^2 & +3x & -10 \\
 & x^4 & -2x^3 & +x^2 & & \\
\cline{2-6}
 & & 3x^3 & +4x^2 & +3x & -10 \\
 & & 3x^3 & -6x^2 & +3x & \\
\cline{3-6}
 & & & 10x^2 & & -10 \\
 & & & 10x^2 & -20x & +10 \\
\cline{4-6}
 & & & & -20x & -20
\end{array}$$

כלומר בדוגמא שלנו:

$$\frac{x^4+x^3+5x^2+3x-10}{x^2-2x+1} = x^2+3x+10+\frac{-20x-20}{x^2-2x+1}$$

תזכורת.

אם x_0 שורש של $p(x)$, אז $(x-x_0)$ מחלק את $p(x)$ ללא שארית.

תרגיל 1.1.13.

פתרו את המשוואה:

$$x^3-6x^2+11x-6=0$$

פתרון:

נשים לב כי סכום מקדמי הפולינום הוא:

$$1-6+11-6=0$$

ולכן $x_0=1$ שורש של הפולינום, נחלק ב$(x-1)$:

$$\begin{array}{r|llll}
 & & x^2 & -5x & +6 \\ \hline
x-1 & x^3 & -6x^2 & +11x & -6 \\
 & x^3 & -x^2 & & \\ \hline
 & & -5x^2 & +11x & -6 \\
 & & -5x^2 & +5x & \\ \hline
 & & & 6x & -6 \\ \hline
 & & & 0 &
\end{array}$$

כלומר:

$$\frac{x^3-6x^2+11x-6}{x-1}=x^2-5x+6$$

שזהו פולינום שאנו יודעים לפתור עם נוסחאת השורשים!

$$x_{1,2}=\frac{5\pm\sqrt{5^2-4\cdot 6}}{2}=\frac{5\pm 1}{2}$$

כלומר, השורשים שלנו הם $1,2,3$ או:

$$x^3-6x^2+11x-6=(x-1)(x-2)(x-3)$$

1.1.4 משפטי ויאטה

תזכורת.

יהא $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$ פולינום עם שורשים $r_1, ..., r_n$, אז מתקיים:

1.
$$r_1 + ... + r_n = -\frac{a_{n-1}}{a_n}$$

2.
$$r_1 r_2 \cdot ... \cdot r_n = (-1)^n \frac{a_0}{a_n}$$

תרגיל 1.1.14.

יהא $p(x) = x^4 - 5x^2 + 4$ פולינום עם 4 שורשים ממשיים (נתון), נסמנם r_1, r_2, r_3, r_4, חשבו את:

$$s = (r_1 + r_2 + r_3)^4 \cdot (r_1 + r_3 + r_4)^4 \cdot (r_1 + r_2 + r_4)^4 \cdot (r_2 + r_3 + r_4)^4$$

פתרון:
נשים לב כי $r_1 + r_2 + r_3 + r_4 = 0$, אז:

$$\begin{aligned} s &= (r_1 + r_2 + r_3)^4 \cdot (r_1 + r_3 + r_4)^4 \cdot (r_1 + r_2 + r_4)^4 \cdot (r_2 + r_3 + r_4)^4 \\ &= (-r_1)^4 (-r_2)^4 (-r_3)^4 (-r_4)^4 \\ &= (r_1 r_2 r_3 r_4)^4 = \left(\frac{a_0}{a_n}\right)^4 = (4)^4 \end{aligned}$$

תרגול שני

2.1 מספרים מרוכבים

2.1.1 מבוא למספרים מרוכבים

תזכורת.

מספר מרוכב הינו מהצורה $a+ib$ כאשר $a,b\in\mathbb{R}$.
נסמן את אוסף המספרים המרוכבים ע"י $\mathbb{C}$, כלומר $a+ib\in\mathbb{C}$. נגדיר את פעולות הכפל והחיבור ב$\mathbb{C}$ ע"י:

$$(a+ib)+(c+id):=(a+c)+i(b+d)$$

$$(a+ib)\cdot(c+id):=(ac-bd)+i(ad+bc)$$

נבחין כי הגדרה זו עקבית עם $i^2=-1$, כלומר:

$$(a+ib)(c+id)=ac+iad+ibc+i^2bd=ac+iad+ibc-bd=(ac-bd)+i(ad+bc)$$

עבור $z=a+ib$, נקרא ל a החלק הממשי של z, ולו b החלק המדומה. ונסמן:

$$a=\text{Re}(z),\ b=\text{Im}(z)$$

כלומר:

$$z=\text{Re}(z)+i\,\text{Im}(z)$$

תרגיל 2.1.1.

מצאו את החלק המדומה והחלק הממשי של המספרים הבאים:

1.
$$z=3i+19i^2+14i^3+5$$

2.
$$z=(3+i)\alpha+i,\quad \alpha\in\mathbb{R}$$

3.
$$z=(3+i)\beta+i,\quad \beta\in\mathbb{C}$$

פתרון:

1.

$$z = 3i + 19i^2 + 14i^3 + 5 = 3i - 19 - 14i + 5 = (5-19) + i(3-14) = -14 - 11i$$

כלומר:

$$\text{Re}(z) = -14$$
$$\text{Im}(z) = -11$$

2.

$$z = (3+i)\alpha + i = 3\alpha + i\alpha + i = 3\alpha + i(\alpha+1)$$

כלומר:

$$\text{Re}(z) = 3\alpha$$
$$\text{Im}(z) = \alpha + 1$$

3. אם $\beta \in \mathbb{C}$, אז $\beta = \text{Re}(\beta) + i\,\text{Im}(\beta)$, אז:

$$\begin{aligned} z &= (3+i)(\text{Re}(\beta) + i\,\text{Im}(\beta)) + i = (3\,\text{Re}(\beta) + 3i\,\text{Im}(\beta) + i\,\text{Re}(\beta) - \text{Im}(\beta)) + i \\ &= (3\,\text{Re}(\beta) - \text{Im}(\beta)) + i(3\,\text{Im}(\beta) + \text{Re}(\beta) + 1) \end{aligned}$$

אז:

$$\text{Re}(z) = 3\,\text{Re}(\beta) - \text{Im}(\beta)$$
$$\text{Im}(z) = 3\,\text{Im}(\beta) + \text{Re}(\beta) + 1$$

תרגיל 2.1.2.

חשבו את i^{2023}.

פתרון:

נשים לב כי:

$$i^1 = i$$
$$i^2 = -1$$
$$i^3 = -i$$
$$i^4 = 1$$
$$i^5 = i$$

כלומר, באופן כללי:

$$i^{k+4j} = i^k$$

כאשר k, j מספרים שלמים, נשים לב כי $2023 = 2020 + 3 = 505 \cdot 4 + 3$, אז:

$$i^{2023} = i^3 = -i$$

תזכורת.

כל מספר מרוכב $z = a + ib$ אפשר להציג גם בצורה שנקראת <u>הצגה טריגונומטרית</u> המזהה בין:

$$z = a + ib \iff re^{i\theta} := r(\cos\theta + i\sin\theta)$$

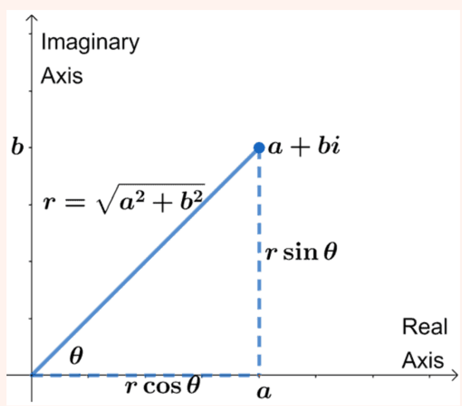
את הביטוי $\cos(\theta) + i\sin(\theta)$ אפשר לסמן ע"י $\text{cis}(\theta)$, אבל גם ע"י $e^{i\theta}$ שהוא רק סימון, אבל יש לו גם משמעות מתמטית מדויקת שאותה נראה בהמשך.
כלומר:

$$r(\cos(\theta) + i\sin(\theta)) = r\,\text{cis}(\theta) = re^{i\theta}$$

המעבר בין הצורות הוא:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \geq 0, \qquad \theta = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$$

$$x = r\sin(\theta), \qquad y = r\sin(\theta)$$



נשים לב כי <u>לכל</u> $re^{i\theta}$ קיימים a, b <u>יחידים</u> כך ש $re^{i\theta} = a + ib$ וזה גם (כמעט) נכון להפך, לכל משום שבהצגה טריגונומטרית, הזווית אדישה לחיבור כפולות של 2π, כי הרי לכל k שלם מתקיים:

$$\forall k \in \mathbb{Z}, \quad \cos(\theta + 2\pi k) = \cos(\theta)$$
$$\forall k \in \mathbb{Z}, \quad \sin(\theta + 2\pi k) = \sin(\theta)$$

כלומר:

$$re^{i(\theta+2\pi)} = re^{i\theta}$$

למשל:

$$1 = e^{i0} = e^{2\pi i} = e^{4\pi i} = \ldots$$

אז אפשר למשל להגיד, שלכל $a+ib$ יש r,θ יחידיים כך ש $re^{i\theta}=a+ib$ וגם $0\le\theta<2\pi$.
הייתרון העיקרי של ההצגה הטריגונומטרית הוא בהכפלת מספרים מרוכבים:

$$r_1e^{i\theta_1}\cdot r_2e^{i\theta_2}=(r_1r_2)e^{i(\theta_1+\theta_2)}=(r_1r_2)(\cos(\theta_1+\theta_2)+i\sin(\theta_1+\theta_2))$$

לעומת זאת, לחבר מספרים בצורה טריגונומטרית זה פחות אלגנטי, ובד"כ הדרך הקלה לעשות זאת היא להמיר לצורה אלגברית, לחבר ואז להמיר חזרה.

תרגיל 2.1.3.

מצאו מספר z כאשר $z^5=1$, אבל $z\neq1$.

פתרון:
נשים לב כי בהצגה טריגומומטרית, $z=re^{i\theta}$, אז:

$$z^5=(r^5)e^{i5\theta}=1=e^{2i\pi}$$

אז למשל $r=1$, $\theta=\frac{2\pi}{5}$ יעבוד, והוא בהחלט אינו שווה ל1.

הערה.

למעשה, יש 5 מספרים מרוכבים שמקיימים את המשוואה:

$$z^5=1$$

כי יש 5 שורשים של הפולינום z^5-1 מהמשפט היסודי של האלגברה, והם יהיו:

$$e^{\frac{2\pi}{5}i},e^{\frac{4\pi}{5}i},e^{\frac{6\pi}{5}i},e^{\frac{8\pi}{5}i},e^{\frac{10\pi}{5}i}=e^{2\pi i}=1$$

2.1.2 ערך מוחלט והצמדה

תזכורת.

למספר $z = a + ib = re^{i\theta} \in \mathbb{C}$ נסמן:

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2} = r \in \mathbb{R}$$

$$\overline{z} = a - ib = re^{-i\theta} \in \mathbb{C}$$

כאשר נקרא ל-$|z|$ <u>הערך המוחלט של z</u> ול-$\overline{z}$ <u>הצמוד של z.</u>

זהות חשובה היא:

$$z\overline{z} = |z|^2$$

תרגיל 2.1.4.

חשבו את החלק הממשי והמדומה של:

$$z = \frac{i+1}{4+3i}$$

<u>פתרון:</u>

נשתמש בטריק הכפלה בצמוד, כלומר:

$$\frac{i+1}{4+3i} = \frac{(i+1)(\overline{4+3i})}{(4+3i)\overline{4+3i}} = \frac{(i+1)(4-3i)}{|4+3i|^2} = \frac{4i+4-3i^2-3i}{25} = \frac{7+i}{25} = \frac{7}{25} + \frac{1}{25}i$$

כלומר:

$$\text{Re}(z) = \frac{7}{25}, \qquad \text{Im}(z) = \frac{1}{25}$$

תרגיל 2.1.5.

פתרו את המשוואה:

$$\overline{z} = z^3$$

<u>פתרון:</u>

נסמן $z = re^{i\theta}$, אז:

$$re^{-i\theta} = r^3 e^{i3\theta}$$

כלומר:

$$r = r^3 \Rightarrow r - r^3 = 0 \Rightarrow r(1-r^2) = 0 \Rightarrow r = 0 \text{ או } r = 1$$

וגם:

$$-\theta = 3\theta + 2\pi k \Rightarrow -4\theta = 2\pi k \Rightarrow \theta = -\frac{\pi}{2}k$$

נזכר שאנו מתעניינים בזוויות בין 0 ל2π, אז:

$$z_1 = 0,\ z_2 = e^0 = 1,\ z_3 = e^{i\frac{\pi}{2}} = i,\ z_4 = e^{i\pi} = -1,\ z_5 = e^{i\frac{3\pi}{2}} = -i$$

2.1.3 שורשי יחידה ופולינומים מרוכבים

תזכורת.

עבור מספר מרוכב $w = re^{i\theta}$, ישנם n מספרים z המקיימים $z^n = w$, מהצורה:

$$z = \sqrt[n]{r}e^{i\frac{\theta+2\pi k}{n}}$$

עבור $k = 0, ..., n-1$.
המונח "שורשים" יופיע מעט כאשר אנו מדברים על מספרים מרוכבים בקורס, פרט למקרה המיוחד שורשי היחידה
כלומר כאשר $w = 1$, ואז שורשי היחידה הם:

$$z = e^{i\frac{2\pi k}{n}}$$

עבור $k = 0, ..., n-1$.
נשים לב כי כל המספרים הללו נמצאים על מעגל היחידה, ויש בניהם אותה זווית, כלומר אם נשרטט אותם נקבל מצולע משוכלל.

תרגיל 2.1.6.

יהיו $z_1 = 4\sqrt{2} - i4\sqrt{2},\ z_2 = e^{i\frac{3\pi}{4}}$. פתרו את המשוואה: $w^3 = \frac{z_1}{z_2}$.

פתרון:
על מנצת לחחשב את $\frac{z_1}{z_2}$, נמיר את z_1 לצורה הטריגונומטרית:

$$r = \sqrt{(4\sqrt{2})^2 + (4\sqrt{2})^2} = \sqrt{64} = 8$$

$$\theta = \text{arctan}\left(\frac{-1}{1}\right) = \text{arctan}(-1) = \frac{7\pi}{4}$$

אז:

$$w^3 = \frac{z_1}{z_2} = \frac{8e^{i\frac{7\pi}{4}}}{e^{i\frac{3\pi}{4}}} = 8e^{i\pi} = -8$$

כלומר:

$$w^3 = -8$$

אז:

$$w_0 = \sqrt[3]{8}e^{i\frac{\pi+2\pi k}{3}}$$

עבור $k=0,1,2$, כלומר:

$$w_0=2e^{i\frac{\pi}{3}},\quad w_1=2e^{i\frac{\pi+2\pi}{3}}=-2,\quad w_2=2e^{i\frac{5}{3}}$$

תרגיל 2.1.7.

הראו כי לכל n, סכום שורשי היחידה הוא אפס.

פתרון:
נשים לב כי הסכום שלנו הוא סכום של סדרה הנדסית:

$$1+e^{i\frac{2\pi}{n}}+e^{i\frac{2\pi 2}{n}}+...+e^{i\frac{2\pi(n-1)}{n}}=1+\left(e^{i\frac{2\pi}{n}}\right)+\left(e^{i\frac{2\pi}{n}}\right)^2+...+\left(e^{i\frac{2\pi}{n}}\right)^{n-1}$$

ואנו זוכרים מהתיכון כי:

$$1+q+q^2+...+q^n=\frac{q^{n+1}-1}{q-1}$$

אז סכום הסדרה שלנו היא:

$$\frac{\left(e^{i\frac{2\pi}{n}}\right)^n-1}{e^{i\frac{2\pi}{n}}-1}=\frac{1-1}{e^{i\frac{2\pi}{n}}-1}=0$$

פתרון נוסף (באמצעות נוסחאות ויטה):
נתרגם את השאלה לשאלה על פולינומים. נזכר כי שורשי היחידה מכל סדר n הם שורשים לפולינום:

$$q(z):=z^n-1$$

עבורו:

$$\deg(q)=n,\quad a_n=1,\quad a_{n-1}=0,\quad a_0=1$$

נזכר בנוסחאת ויטה עבור סכום מקדמים:

$$r_1+...+r_n=-\frac{b_{n-1}}{b_n}$$

כאשר $r_1,...,r_n$ הם שורשי הפולינום $b_nx^n+b_{n-1}x^{n-1}+...+b_0$.
לכן, במקרה שלנו, סכום שורשי היחידה מסדר n (כלומר סכום שורשי הפולינום q) יהיה $0=\frac{a_{n-1}}{a_n}$.

תזכורת.

פולינום $p(x) = a_n x^n + ... + a_1 x + a_0$ כאשר אנו מרשים לa_k להיות מרוכבים נקרא <u>פולינום מרוכב.</u>
עובדה חשובה שלא נוכיח היא שלפולינום מרוכב ממעלה n יש בדיוק n שורשים, כלומר קיימת צורה:

$$p(x) = a_n (x - w_1) \cdot ... \cdot (x - w_n)$$

עבור $w_j \in \mathbb{C}$, כאשר יכולים להיות כפילויות, בשורשים - כלומר הם לא בהכרך שונים.
שימו ♡ שזה לא נכון בהכרח לפולינומים ממשיים!

הערה.

אין טעות בלקרוא לפולינום ממשי פולינום מרוכב משום שכל $r \in \mathbb{R}$ הוא גם $r \in \mathbb{C}$, אבל כאשר נאמר פולינום מרוכב נתכוון לפולינום אשר מקדמיו הם לא ממשיים.

הערה.

בד"כ נסמן פולינום מרוכב עם המשתנה z במקום x, כמו בתרגיל הבא.

תרגיל 2.1.8.

מצאו את שורשי הפולינום:
$$p(z) = z^2 - 2z + 2$$

<u>פתרון:</u>
נשתמש בנוסחאת השורשים:

$$z_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4-8}}{2} = \frac{2 \pm 2i}{2} = 1 \pm i$$

תרגיל 2.1.9.

אם $w \in \mathbb{C}$ שורש של פולינום עם מקדמים ממשיים $p(x)$ אז גם $\overline{w}$.

<u>פתרון:</u>
יהא $p(x) = a_n x^n + ... a_1 x + a_0$ פולינום ממשי, ונניח כי w שורש שלו, נזכר ב3 תכונות חשובות של הצמדה:

1. $\overline{zw} = \overline{z} \cdot \overline{w}$.
2. $\overline{z + w} = \overline{z} + \overline{w}$.

3. $z \in \mathbb{R} \iff z = \overline{z}$.

אז:

$$0 = p(w) = a_n w^n + ...a_1 w + a_0$$

אז:

$$0 = \overline{0} = \overline{p(w)} = \overline{a_n w^n + ...a_1 w + a_0} = \overline{a_n}\overline{w^n} + ... + \overline{a_1 w} + \overline{a_0} = a_n \overline{w}^n + ...a_1 \overline{w} + a_0 = p\left(\overline{w}\right)$$

כלומר, גם $p\left(\overline{w}\right) = 0$, כלומר $\overline{w}$ שורש של p.

תרגיל 2.1.10.

יהא $p(x)$ פולינום ממשי ממעלה אי-זוגית, אז קיים לו שורש ממשי אחד לפחות.

פתרון:
את שורשי $p(x)$ אפשר לחלק לזוגות, $(w_j, \overline{w_j})$, אבל יש לנו מספר אי-זוגי של שורשים, אז חייב להיות לנו שורש ששווה לצמוד של עצמו, שראינו שזה שקול להיותו ממשי.

תרגיל 2.1.11.

יהיו w_1, w_2, w_3 שלושת שורשי היחידה מסדר 3 חשבו את $s = w_1^{3001} + w_2^{3001} + w_3^{3001}$.

פתרון:
נשים לב כי, לכל k:

$$w_k^{3001} = w_k^{3 \cdot 1000 + 1} = (w_k^{1000})^3 w_k = w_k$$

כלומר:

$$s = w_1 + w_2 + w_3$$

אז מהתרגיל הקודם על שורשי היחידה, מתקיים:

$$s = 0$$

תרגול שלישי

3.1 מטריצות

3.1.1 חיבור מטריצות וכפל בסקלר

תזכורת.

מטריצות מסדר $m \times n$ מעל $\mathbb{R}$ היא רשימה m שורות וn עמודות.
למשל:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & \pi & 5 \end{pmatrix}$$

היא מטריצה 2×3, נסמן $A \in \mathbb{R}^{2\times 3}$ או $A \in M_{2\times 3}(\mathbb{R})$, ונסמן את אבריה $a_{i,j}$ כאשר i הוא השורה וj העמודה, למשל במקרה שלנו:

$$a_{1,1} = 1, a_{1,2} = 2, a_{2,2} = \pi, a_{2,3} = 5$$

לפעמים נסמן $A = (a_{i,j})$, או לפעמים אפילו $A_{i,j} = a_{i,j}$, אז $A = (A)_{i,j}$.

תזכורת.

יש לנו 2 פעולות חשובות עם מטריצות:

1. חיבור המטריצות, עבור מטריצות $A = (a_{i,j}), B = (b_{i,j}) \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $A + B$ היא מטריצה עם איברים $(a_{i,j} + b_{i,j})$.
2. כפל בסקלר, עבור $\lambda \in \mathbb{R}$, לו נקרא סקלר, ומטריצה $A = (a_{i,j})$, המטריצה λA היא מטריצה עם איברים $(\lambda a_{i,j})$.

מטריצה חשובה היא מטריצת האפס, שנסמן $O_{m\times n} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ (או לפעמים פשוט 0), שהיא מטריצה שכל איברה אפסים, ומקיימת:

$$O_{m\times n} + A = A$$

לכל $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, ולכל $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$\lambda O_{m\times n} = O_{m\times n}$$

דוגמא 3.1.1.

1. דוגמה לחיבור מטריצות:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 10 & 12 \end{pmatrix}$$

2. דוגמה לכפל בסקלר:

$$3\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 9 & 12 \end{pmatrix}$$

הערה.

אנו יכולים לחבר רק זוג מטריצות מאותו סדר, כלומר אם $A \in \mathbb{R}^{2\times 3}, B \in \mathbb{R}^{5\times 6}$ אז אין משמעות לביטוי $A+B$.

תרגיל 3.1.2.

יהא מצאו מטריצה $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ כך ש:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} + 2A = 3\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

פתרון:
נשים לב כי:

$$2A = 3\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

כלומר:

$$A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

3.1.2 כפל מטריצות

תזכורת.

אם יש לנו סדרת מספרים $a_1, ..., a_n$ סימון לסכום:

$$a_1 + a_2 + ... + a_n$$

הוא:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i$$

כאשר $i = 1$ אומר שאנו מתחילים מהאיבר a_1 ו n אומר שמסיימים ב$i = n$.

תזכורת.

בהינתן זוג מטריצות, $A \in \mathbb{R}^{m\times k}, B \in \mathbb{R}^{k\times n}$, המכפלה של A ו B היא מטריצה אותה נסמן AB מסדר m על n, כלומר $AB \in \mathbb{R}^{m\times n}$, כאשר:

$$(AB)_{i,j} = \sum_{t=1}^{k} A_{i,t}B_{t,j}$$

נשים לב כי אם $A \in \mathbb{R}^{m\times k}, B \in \mathbb{R}^{l\times n}$ ו $k \neq l$ אז אין משמעות לביטוי AB.

דוגמא 3.1.3.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot 1 + 2\cdot 3 + 3\cdot 5 & 1\cdot 2 + 2\cdot 4 + 3\cdot 6 \\ 4\cdot 1 + 5\cdot 3 + 6\cdot 5 & 4\cdot 2 + 5\cdot 4 + 6\cdot 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 22 & 28 \\ 49 & 64 \end{pmatrix}$$

טענה 3.1.4.

3 תכונות חשובות שכפל מטריצות לא בהכרח מקיים, אבל כפל מספרים כן :

1. AB לא בהכרח שווה ל BA.
2. $AB = 0$ לא בהכרח גורר $A = 0$ או $B = 0$.
3. אם $A \neq 0$, וגם $AB = AC$, אז לא בהכרח $B = C$.

הוכחה:
נוכיח בעזרת דוגמאות.

1. אז בשביל אפילו לדבר עם AB,BA, כלומר בשביל שנוכל להכפיל את A בB ואת B בA, דרוש

(מדוע?) שA וB יהיו ריבועיות מאותו סדר, כלומר $A,B\in\mathbb{R}^{n\times n}$, ונראה דוגמא לכך:

$$\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1\\3&3\end{pmatrix}$$

אבל:

$$\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4&6\\0&0\end{pmatrix}$$

.2

$$\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$$

.3

$$\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\\star&\star\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$$

תזכורת.

אם $AB=BA$ נומר כי A וB מטריצות מתחלפות.

הערה.

צורת ההוכחה שלנו נקראת "הוכחה ע"י דוגמה נגדית", שכן אנו סותרים את הטענה בעזרת דוגמה שאינה מקיימת אותה.
לדוגמה, במקרה הראשון אנו סותרים את הטענה "כל זוג מטריצות מתחלפות" או בניסוח מתמטי:

$$\forall A,B\in\mathbb{R}^{n\times n}\quad AB=BA$$

על ידי דוגמה נגדית (זוג מטריצות שאינן מתחלפות), ולכן הטענה אינה נכונה באופן כללי.

תזכורת.

נסמן ב$I_n\in\mathbb{R}^{n\times n}$ את המטריציה הבאה:

$$I_n=\begin{pmatrix}1&0&\dots&0\\0&1&\dots&0\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\0&\dots&0&1\end{pmatrix}$$

כלומר, 1 על האלכסון הראשי ואפס אחרת. לכל $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$ מתקיים:

$$AI_n=I_nA=A$$

תזכורת.

מטריצה A ריבועית נקראת <u>אלכסונית</u> אם היא מהצורה:

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & \lambda_2 & ... & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & ... & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$$

כלומר מטריצה עם אפס בכל מקום פרט לאלכסון הראשי, לפעמים נסמן גם $A = \text{diag}(\lambda_1, ..., \lambda_n)$.
מטריצה אלכסונית עם איבר זהה על האלכסון, כלומר:

$$\text{diag}(\lambda, ..., \lambda) = \lambda I_n$$

נקראת <u>מטריצה סקלרית</u>.

תרגיל 3.1.5.

הוכיחו כי:

$$\text{diag}(\lambda_1, ..., \lambda_n) \cdot \text{diag}(\eta_1, ..., \eta_n) = \text{diag}(\lambda_1\eta_1, ..., \lambda_n\eta_n)$$

<u>פתרון:</u>
נסמן $A = \text{diag}(\lambda_1, ..., \lambda_n), B = \text{diag}(\eta_1, ..., \eta_n)$, אז:

$$(AB)_{i,i} = \sum_{k=1}^{n} A_{i,k}B_{k,i} = A_{i,i}B_{i,i} = \lambda_i\eta_i$$

ועבור $i \neq j$:

$$(AB)_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} A_{i,k}B_{k,j} = 0$$

תרגיל 3.1.6.

חשבו את:

$$\begin{pmatrix} \pi & 0 & 0 \\ 0 & e & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}^{2024}$$

<u>פתרון:</u>

בעזרת התרגיל הקודם:

$$\begin{pmatrix} \pi & 0 & 0 \\ 0 & e & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}^{2024}$$

תרגיל 3.1.7.

הוכיחו כי מטריצה סקלרית עם מתחלפת עם כל מטריצה אחרת.

<u>פתרון:</u>

תהא $A = \lambda I_n$, ו$B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ כללית, אז:

$$(AB)_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} A_{i,k}B_{k,j} = \cancelto{0}{\sum_{k=1}^{i-1} A_{i,k}B_{k,j}} + A_{i,i}B_{i,j} + \cancelto{0}{\sum_{k=i+1}^{n} A_{i,k}B_{k,j}} = A_{i,i}B_{i,j} = \lambda B_{i,j}$$

מצד שני:

$$(BA)_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} B_{i,k}A_{k,j} = B_{i,j}A_{j,j} = \lambda B_{i,j}$$

תרגיל 3.1.8.

הוכיחו כי אם A ריבועית מתחלפת עם כל מטריצה אחרת B אז A סקלרית.

<u>פתרון:</u>

תהא A כזאת.

נסמן את המטריצה $E^{i,j}$ להיות המטריצה עם 1 במקום הi,j ואפס אחרת, כלומר $E^{i,j}_{i,j} = 1$ ו$E^{i,j}_{l,k} = 0$

עבור $\substack{i\neq l \\ j\neq k}$.

יהא $i \neq j$,

$$(AE^{i,j})_{i,i} = \sum_{k=1}^{n} A_{i,k}E^{i,j}_{k,i} = 0$$

אבל A מתחלפת עם $E^{i,j}$, כלומר $AE^{i,j} = E^{i,j}A$ (נשים לב שיש פה <u>שוויון מטריצות</u>) בפרט:

$$(AE^{i,j})_{i,i} = (E^{i,j}A)_{i,i} = \sum_{k=1}^{n} E^{i,j}_{i,k}A_{k,i} = A_{j,i}$$

כלומר, לכל $i \neq j$ מתקיים $A_{j,i} = 0$, כלומר A אלכסונית.

מצד שני:

$$(AE^{i,j})_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} A_{i,k}E^{i,j}_{k,j} = A_{i,i}$$

$$(E^{i,j}A)_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} E^{i,j}_{i,k}A_{k,j} = A_{j,j}$$

כלומר $A_{j,j} = A_{i,i}$ לכל $i \neq j$, אז A סקלרית.

הערה.

נשים לב כי הוכחנו פה שאם A סקלרית היא מתחלפת עם כל מטריצה אחרת, ואם מטריצה A מתחלפת עם כל מטריצה אחרת אז היא סקלרית, כלומר בדיוק הוכחנו את הטענה:
A מתחלפת עם כל B אמ"מ A סקלרית.

דוגמא 3.1.9.

נשים לב כי אם כופלים מטריצה $m \times n$ בווקטור מסדר m, שהוא בעצם מטריצה $1 \times m$, נקבל וקטור מסדר n שהוא צירוף ליניארי של עמודות המטרציה:

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+4y+7z \\ 2x+5y+8z \\ 3x+6y+9z \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix}$$

3.1.3 מטריצות משולשות, שחלוף, ומטריצה סימטריות ואנטי-סימטריות

תזכורת.

תהא $A = (a_{i,j}) \in \mathbb{R}^{n\times m}$ אז $A^t \in \mathbb{R}^{m\times n}$ היא המטריצה עם רכיבים:

$$(A^t)_{i,j} = a_{j,i}$$

דוגמא 3.1.10.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$$

טענה (ללא הוכחה) 3.1.11.

מספר תכונות חשובות של שחלוף הן:

1. $(A^t)^t = A$.

2. $(A+B)^t = A^t + B^t$.
3. $(\alpha A)^t = \alpha A^t$.
4. $(AB)^t = B^t A^t$.

תזכורת.

תהא $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ מטריצה ריבועית, נקרא לA סימטרית אם $A = A^t$, ואנטי-סימטרית אם $A^t = -A^t$.
המטריצה היחידה שהיא גם סימטרית וגם אנטי-סימטרית היא מטריצת האפס.

תרגיל 3.1.12.

תהא A מטריצה ריבועית, הוכיחו כי $B = A + A^t$ סימטרית, וכי $C = A - A^t$ אנטי-סימטרית.

פתרון:
נחשב ישירות:

$$B^t = (A + A^t)^t = A^t + (A^t)^t = A^t + A = A + A^t = B$$

$$C^t = (A - A^t)^t = A^t - A = -(A - A^t) = -C$$

תרגיל 3.1.13.

תהא A מטריצה ריבועית, הוכיחו כי קיימת דרך יחידה לכתוב את A כסכום של מט' סימטרית ואנטי-סימטרית.

פתרון:
ראשית, נשים לב כי:

$$A = \underbrace{\frac{1}{2}(A + A^t)}_{\text{סימטרית}} + \underbrace{\frac{1}{2}(A - A^t)}_{\text{אנטי-סימטרית}}$$

כעת נוכיח יחידות, נניח כי $A = B + C$ כאשר B סימטרית וC אנטי-סימטרית, אז:

$$A^t = B^t + C^t = B - C$$

אז:

$$\frac{1}{2}A^t + \frac{1}{2}A = \frac{1}{2}(B - C) + \frac{1}{2}(B + C) = B$$

ובאופן דומה:

$$\frac{1}{2}A - \frac{1}{2}A^t = \frac{1}{2}(B - C) - \frac{1}{2}(B + C) = C$$

תזכורת.

מטריצה $A=(a_{i,j})$ נקראת <u>משולשת עליונה</u> אם כל האיברים <u>מתחת לאלכסון הראשי שלה</u> הם אפס, כלומר:

$$i>j\Rightarrow a_{i,j}=0$$

<u>ומשולשת תחתונה</u> אם כל האיברים <u>מעל לאלכסון הראשי שלה</u> הם אפס, כלומר:

$$i<j\Rightarrow a_{i,j}=0$$

משולשת עליונה ומשולשת תחתונה, נשים לב כי אם A משולשת עליונה אז A^t משולשת תחתונה ולהפך.

דוגמא 3.1.14.

המטריצות

$$\begin{pmatrix}1&2&3\\0&4&5\\0&0&6\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0&0\\2&3&0\\4&5&6\end{pmatrix}$$

משולשת עליונה ותחתונה בהתאמה.

תרגיל 3.1.15.

אם A,B משולשת עליונה, אז גם $AB, A+B$.

<u>פתרון:</u>
יהיו $A.B\in\mathbb{R}^{n\times n}$, משולשות עליונות, את ההוכחה כי $A+B$ משולשת עליונה נשאיר כתרגיל. תהא $C=AB$, נרצה להוכיח כי C משולשת עליונה, כלומר לכל $i>j$ מתקיים:

$$C_{i,j}=0$$

כלומר:

$$C_{i,j}=\sum_{k=1}^{n}A_{i,k}B_{k,j}=0$$

משום שA,B משולשות עליונות מתקיים:

$$\forall l>k,\qquad A_{l.k}=B_{l,k}=0$$

נחשב ישירות את $C_{i,j}$: לכן:

$$(C)_{ij}=\sum_{k=1}^{n}A_{i,k}B_{k,j}=\sum_{k=1}^{i}\overbrace{A_{i,k}B_{k,j}}^{0}+\sum_{k=i+1}^{n}\overbrace{A_{i,k}B_{k,j}}^{0}=0$$

תרגיל 3.1.16.

אם A, B משולשת תחתונה, אז גם $AB, A+B$.

<u>פתרון:</u>
יהיו A, B משולשת תחתונה, אז:

$$A+B=((A+B)^t)^t=(A^t+B^t)^t$$

שהיא שחלוף של מט' משולשת עליונה ולכן משולשת תחתונה.
הוכחה עבור AB זהה.

תרגול חזרה

4.1 פולינומים

4.1.1 הגדרת פולינומים ושורשיהם

תזכורת.

פולינום הוא פונקציה $p(x)$ שמקבלת מספר ממשי ומחזירה מספר ממשי, מהצורה:

$$p(x) = a_n x^n + x_{n-1} x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$$

כאשר $a_n, ..., a_0$ מספרים ממשיים.

בהינתן פולינום $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$, כך ש $a_n \neq 0$,
נקרא לa_m המקדם של x^m ל a_0 האיבר החופשי, לa_n האיבר המוביל, ולn הדרגה, או המעלה של $p(x)$ שנסמן $\deg(p)$.
לפולינום $p(x) = 0$ נקרא פולינום האפס, ונגדיר $\deg(p) = -\infty$.

פולינום מהצורה $p(x) = a_n x^n$ נקרא מונום.
שורש של פולינום $p(x)$ הוא מספר ממשי $x_0 \in \mathbb{R}$ המקיים:

$$p(x_0) = 0$$

תזכורת.

יהיו $p(x), q(x)$ פולינומים. אנחנו יכולים לעשות פעולות אריתמטיות עימם. חיבור מוגדר איבר איבר, כפל מוגדר ע"י פתיחת סוגריים וכינוס איברים וחילוק מוגדר עם משפט חלוקה לשארית.

דוגמא 4.1.1.

נתבונן בדוגמאות הבאות:

1. $(x^2 + 5x) + (x^3 + 2x + 4) = x^3 + x^2 + (5 + 2)x + 4 = x^3 + x^2 + 7x + 4$
2. $(x^2 + 5x) \cdot (x + 4) = x^3 + 4x^2 + 5x^2 + 20x = x^3 + 9x^2 + 20x$
3. $x^3 + 8x^2 + 10x + 1 = (x + 3)(x^2 + 5x) + (2x + 1)$

טענה (ללא הוכחה) 4.1.2.

1. לפולינום ממעלה $n = \text{deg}(p)$ יש לכל היותר n שורשים.
2. אם x_0 שורש של $p(x)$, וקיים $q(x)$ פולינום כך ש $p(x) = (x - x_0)q(x)$.
3. אם לפולינום $p(x)$ מדרגה n יש $\xi_1, ..., \xi_n$ שורשים (לא בהכרח שונים), אז קיים $c \in \mathbb{R}$ כך ש:

$$p(x) = c(x - \xi_1) \cdot (x - \xi_2) \cdot ... \cdot (x - \xi_n)$$

ונשים לב כי c יהיה האיבר המוביל של $p(x)$.

4. אם $\text{deg}(p) = 2$, יש לנו נוסחא מפורשת למציאת שורשי הפולינום, הנקראת נוסחאת השורשים.

$$ax^2 + bx + c = 0 \Rightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

תרגיל 4.1.3.

יהא $p(x) = a_n x^n + ... + a_1 x + a_0$, כאשר $a_0 = 0$, הוכיחו כי $x_0 = 0$ שורש של $p(x)$.

פתרון:
נציב ישירות:

$$p(0) = a_n 0^n + ... + a_1 0 + a_0 = a_0 = 0$$

כלומר 0 שורש של $p(x)$.

תרגיל 4.1.4.

יהא $\alpha > 0$, מצאו את שורש הפולימום הבא (כביטוי של α)

$$x^4 - 5a^2x^2 + 4a^4 = 0$$

פתרון:
נסמן $x = t^2$ ונקבל את הפולינום:

$$t^2 - 5a^2t + 4a^4 = 0$$

זהו פולינוום ממעלה 2 שנוכל לפתור בעזרת נוסחאת השורשים:

$$t_{1,2} = \frac{5a^2 \pm \sqrt{25a^2 - 16a^4}}{2} = \frac{5a^2 \pm 3a^2}{2}$$

כלומר קיבלנו 2 פתרונות:

$$t = 4a^2 \Rightarrow x_0 = 2a, \quad x_1 = -2a$$

וגם:

$$t = a^2 \Rightarrow x_2 = a, \quad x_3 = -a$$

אז יש ל$p(x)$ ארבעה שורשים:

$$x_0 = 2a, \quad x_1 = -2a, \quad x_2 = a, \quad x_3 = -a$$

תרגיל 4.1.5.

יהא $p(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$ פולינום עם 3 שורשים, כלומר r_1, r_2, r_3, הוכיחו את נוסחאות וייטה:

$$r_1r_2r_3 = -\frac{a_0}{a_3}$$

$$r_1 + r_2 + r_3 = -\frac{a_2}{a_3}$$

<u>פתרון:</u>

יש לנו את השוויון:

$$a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = a_3(x - r_1)(x - r_2)(x - r_3)$$

נציב $x = 0$, ונקבל:

$$a_30^3 + a_20^2 + a_10 + a_0 = a_3(0 - r_1)(0 - r_2)(0 - r_3) \Rightarrow a_0 = -a_3r_1r_2r_3 \Rightarrow r_1r_2r_3 = -\frac{a_0}{a_3}$$

עבור השוויון השני, נתבונן בביטוי:

$$a_3(x - r_1)(x - r_2)(x - r_3)$$

נחלץ את כל האיברים שיהיו מהצורה x^2 כפול משהו ונקבל:

$$-a_3r_1x^2 - a_3r_2x^2 - a_3r_3x^2 = -a_3(r_1 + r_2 + r_3)x^2$$

משום ש:

$$a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = a_3(x - r_1)(x - r_2)(x - r_3)$$

בפרט, יש שוויון בין מקדמי המונומים, כלומר:

$$-a_3(r_1 + r_2 + r_3) = a_2 \Rightarrow r_1 + r_2 + r_3 = -\frac{a_2}{a_3}$$

4.2 מספרים מרוכבים

4.2.1 מבוא למספרים מרוכבים

תזכורת.

מספר מרוכב הינו מהצורה $a+ib$ כאשר $a,b\in\mathbb{R}$. זו נקראת ההצגה האלגברית שלו.
נסמן את אוסף המספרים המרוכבים ע"י $\mathbb{C}$, כלומר $a+ib\in\mathbb{C}$. נגדיר את פעולות הכפל והחיבור ב$\mathbb{C}$ ע"י:

$$(a+ib)+(c+id):=(a+c)+i(b+d)$$

$$(a+ib)\cdot(c+id):=(ac-bd)+i(ad+bc)$$

נבחין כי הגדרה זו עקבית עם $i^2=-1$.

עבור $z=a+ib$, נקרא ל a החלק הממשי של z, ולb החלק המדומה. ונסמן:

$$a=\mathrm{Re}(z),\ b=\mathrm{Im}(z)$$

כלומר:

$$z=\mathrm{Re}(z)+i\,\mathrm{Im}(z)$$

הצגה נוספת של מספר מרוכב תקרא ההצגה הטריגונומטרית שלו והיא מזהה בין:

$$z=a+ib\iff re^{i\theta}:=r(\cos\theta+i\sin\theta)=r\,\mathrm{cis}(\theta)$$

המעבר בין הצורות הוא:

$$r=\sqrt{x^2+y^2}\geq 0,\qquad \theta=\arctan\left(\frac{y}{x}\right)$$

$$x=r\sin(\theta),\qquad y=r\sin(\theta)$$

לכל $re^{i\theta}$ קיימים a,b יחידים כך ש $re^{i\theta}=a+ib$. להיפך יש יחידות במודול ויחידות בזווית עד כדי $2\pi k$ לכל k שלם, כלומר:

$$re^{i(\theta+2\pi)}=re^{i\theta}$$

לכן, בקורס נדרוש ש $0\leq\theta<2\pi$.

הייתרון העיקרי של ההצגה הטריגונומטרית הוא בהכפלת מספרים מרוכבים:

$$r_1e^{i\theta_1}\cdot r_2e^{i\theta_2}=(r_1r_2)e^{i(\theta_1+\theta_2)}=(r_1r_2)(\cos(\theta_1+\theta_2)+i\sin(\theta_1+\theta_2))$$

תזכורת.

למספר $z = a + ib = re^{i\theta} \in \mathbb{C}$ נסמן:

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2} = r \in \mathbb{R}$$

$$\overline{z} = a - ib = re^{-i\theta} \in \mathbb{C}$$

כאשר נקרא ל-$|z|$ הערך המוחלט של z ול-$\overline{z}$ הצמוד של z.

זהות חשובה היא:

$$z\overline{z} = |z|^2$$

תרגיל 4.2.1.

חשבו את i^{10}.

פתרון:
נשים לב כי:

$$i^1 = i, \qquad i^2 = -1, \qquad i^3 = -i, \qquad i^4 = 1, \qquad i^5 = i$$

כלומר, באופן כללי:

$$i^{k+4j} = i^k$$

אז:

$$i^{10} = i^8 i^2 = -1$$

הערה.

לקבוצת התרגול של גאיה, חשבו את i^{1707}, כי 1707 זו שנת הלידה של אוילר, לקבוצה של בן, 10 זה מספר מספיק טוב.

תרגיל 4.2.2.

פתרו את המשוואה:

$$2z - 3\overline{z} = \frac{-27 + 23i}{1 + i}$$

פתרון:
נתחיל בלפשט את הביטוי $\frac{-27+23i}{1+i}$:

$$\frac{-27 + 23i}{1 + i} = \frac{(-27 + 23i)(1 - i)}{2} = \frac{-27 + 23i + 27i + 23}{2} = \frac{-4 + 50i}{2} = 25i - 2$$

נסמן $z=a+ib$, אז:

$$2z-3\overline{z}=2(a+ib)-3(a-ib)=2a+2ib-3a+3ib=-a+5ib$$

כלומר:

$$-a+5ib=25i-2\Rightarrow\begin{cases}a=2\\b=5\end{cases}\quad\Rightarrow z=2+5i$$

תרגיל 4.2.3.

הוכיחו כי:

$$z-i\overline{z}=\overline{\overline{z}+iz}$$

<u>פתרון:</u>
נחשב את $\overline{\overline{z}+iz}$:

$$\overline{\overline{z}+iz}=\overline{\overline{z}}+\overline{i}\overline{z}=z-i\overline{z}$$

תרגיל 4.2.4.

הוכיחו כי $z\in\mathbb{C}$, הביטוי:

$$s=(z+1-2i)^{2024}+(\overline{z}+1+2i)^{2024}$$

ממשי.

<u>פתרון:</u>
נחשב ישירות:

$$\begin{aligned}\overline{s}&=\overline{(z+1-2i)^{2024}+(\overline{z}+1+2i)^{2024}}=\overline{(z+1-2i)^{2024}}+\overline{(\overline{z}+1+2i)^{2024}}\\&=(\overline{z+1-2i})^{2024}+(\overline{\overline{z}+1+2i})^{2024}=(\overline{z}+1+2i)^{2024}+(x+1-2i)^{2024}=s\end{aligned}$$

כלומר $\overline{s}=s$ אז $s\in\mathbb{R}$.

תרגיל 4.2.5.

מצאו את כל הערכים של $t\in\mathbb{R}$ כך ש:

$$\text{Im}\left(\frac{t+4i}{1+ti}\right)=0$$

<u>פתרון:</u>
נראה 2 פתרונות שקולים:

1. מספר הוא ממשי אמ"מ הוא שווה לצמוד שלו, ולכן:

$$\frac{t+4i}{1+ti} = \overline{\frac{t+4i}{1+ti}} = \frac{\overline{t+4i}}{\overline{1+ti}} = \frac{t-4i}{1-ti}$$

ולכן:

$$(t+4i)(1-ti) = (t-4i)(1+ti)$$

או:

$$-it^2+5t+4i = it^2+5t-4i \Rightarrow 2it^2-8i=0 \Rightarrow 2t^2-8 \Rightarrow t^2=4 \Rightarrow t=\pm 2$$

2. נסדר את הביטוי $\frac{t+4i}{1+ti}$ ע"י כפל בצמוד:

$$\frac{t+4i}{1+ti} = \frac{(t+4i)(1-ti)}{(1+ti)(1-ti)} = \frac{t-it^2+4i+4it}{1+t^2} = \frac{5t+4i-it^2}{1+t^2} = \frac{5t}{1+t^2} + i\frac{4-t^2}{1+t^2}$$

כלומר אם החלק המדומה הוא אפס אז:

$$4-t^2=0 \Rightarrow t=\pm 2$$

4.2.2 שורשי יחידה ופולינומים מרוכבים

תזכורת.

עבור מספר מרוכב $w = re^{i\theta}$, ישנם n מספרים z המקיימים $z^n = w$, מהצורה:

$$z = \sqrt[n]{r}e^{i\frac{\theta+2\pi k}{n}}$$

עבור $k = 0, ..., n-1$.
המונח "שורשים" יופיע מעט כאשר אנו מדברים על מספרים מרוכבים בקורס, פרט למקרה המיוחד שורשי היחידה, כלומר כאשר $w = 1$, ואז שורשי היחידה הם:

$$z = e^{i\frac{2\pi k}{n}}$$

עבור $k = 0, ..., n-1$.

פולינום מרוכב הוא פונקציה מהמרוכבים אל עצמם, $p : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, מהצורה:

$$p(x) = a_n x^n + ... + a_1 x + a_0$$

כאשר $a_1, .., a_n \in \mathbb{C}$ וגם $x, p(x) \in \mathbb{C}$. עובדה חשובה (שנקראת המשפט היסודי של האלגברה) היא שלכל פולינום מרוכב ממעלה n יש בדיוק n שורשים (לא בהכרח שונים), כלומר קיימת הצורה:

$$p(x) = a_n(x - w_1) \cdot ... \cdot (x - w_n), \qquad w_1, ..., w_n \in \mathbb{C}$$

שימו ♡ שזה לא נכון בהכרח לפולינומים ממשיים!

הערה.

כמו כן, כל הנוסחאות שראינו עבור פולינומים ממשיים (נוסחת השורשים, נוסחאות ויטה וכו') נכונות גם עבור פולינומים מרוכבים.

תרגיל 4.2.6.

יהא $p(z) = z^3 - 4z^2 + 6z - 4$ ונתון כי $w = 1 + i$ שורש שלו, מצאו את שאר השורשים.

פתרון:
מתרגיל שראינו בתרגול 2 משום שמקדמי הפולינום ממשיים, אז גם $\overline{w} = 1 - i$.
עפ"י משפטי וויטה:

$$r_1 + r_2 + r_3 = -\frac{a_2}{a_3} = -\frac{-4}{1} = 4$$

כלומר:

$$1 - i + 1 + i + r_3 = 4 \Rightarrow r_3 = 2$$

כלומר:

$$r_1 = 1+i, \quad r_2 = 1-i, \quad r_3 = 2$$

תרגיל 4.2.7.

יהא $z_1 = 2e^{i\frac{\pi}{6}}$, $z_2 = -\sqrt{2}+i\sqrt{2}$, פתרו את המשוואה:

$$w^4 = \frac{z_1^3}{z_2}$$

<u>פתרון:</u>

נחשב את $\frac{z_1^2}{z_2}$, אז:

$$z_1^3 = 2^3 e^{i\frac{3}{6}\pi} = 8e^{i\frac{1}{2}\pi}$$

ונעביר את z_2 לצורה טריגונומטרית:

$$r = \sqrt{\sqrt{2}^2 + \sqrt{2}^2} = \sqrt{4} = 2$$

והזווית היא:

$$\tan(\theta) = \frac{\sqrt{2}}{-\sqrt{2}} = -1$$

אז הזווית היא $-\frac{\pi}{4}$, פלוס אולי פאי, ואכן בגלל הראשית בה אנו נמצאים הזווית היא $-\frac{\pi}{4}+\pi = \frac{3}{4}\pi$.
כלומר:

$$w^4 = \frac{8e^{i\frac{1}{2}\pi}}{2e^{i\frac{3}{4}\pi}} = \frac{8}{2}e^{i\pi\left(\frac{1}{2}-\frac{3}{4}\right)} = 4e^{-i\pi\frac{1}{4}} = 4e^{i\pi\frac{7}{4}\pi}$$

אז:

$$w_k = \sqrt{2}e^{i\frac{\frac{7}{4}\pi+2\pi k}{4}} = \sqrt{2}e^{i\frac{\frac{7+8k}{4}\pi}{4}}$$

עבור $k = 0,1,2,3$, כלומר:

$$w_0 = \sqrt{2}e^{i\frac{7\pi}{16}}, \quad w_1 = \sqrt{2}e^{i\frac{15\pi}{16}}, \quad w_2 = \sqrt{2}e^{i\frac{23\pi}{16}}, \quad w_3 = \sqrt{2}e^{i\frac{31\pi}{16}}$$

תרגול חמישי

5.1 מערכת משוואת לינארית

תזכורת.

מערכת משוואות לינארית (ממ"ל) היא מערכת משוואות מהצורה:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + ... + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

ומערכת כזאת אפשר לכתוב בתור כפל מטריצות:

$$Ax = b$$

כאשר:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

תרגיל 5.1.1.

נתונה ממ"ל:

$$\begin{cases} 3x + 2y = 1 \\ x + y = 3 \end{cases}$$

1. פתרו את הממ"ל.
2. כתבו את הממ"ל המקורית בצורה מטריציונית.

פתרון:

1. נתבונן במשוואה הראשונה, ונחסיר מ2 צדדי השוויון $2(x+y)$.

$$3x + 2y = 1$$

$$3x+2y-(2x+2y)=1-\underbrace{(2x+2y)}_{=6}$$

כלומר:

$$x=1-6=-5$$

נציב $x=-5$ בשורה השנייה:

$$x+y=3\Rightarrow -5+y=3\Rightarrow y=8$$

אז פתרון הממ"ל הינו:

$$(x,y)=(-5,8)$$

.2

$$\begin{pmatrix}3 & 2\\ 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ 3\end{pmatrix}$$

5.1.1 שיטת החילוץ של גאוס

תזכורת.

נזכיר כי מטריצה מדורגת קנונית היא מטריצה המקיימת:

1. A מדורגת, כלומר האיבר הפתוח של כל שורה מופיע משמאל לאיבר הפותח בשורה מתחתיה, ושורות האפסים למטה.
2. האיבר הפותח של כל שורה הוא 1.
3. בכל עמודה של האיבר הפותח, הוא היחיד שאינו אפס.

על מטריצה A יש פעולות אלמנטריות:

1. הכפלת שורה בסקלר שאינו אפס.
2. הוספת שורה (או כפולה של שורה בסקלר) לשורה אחרת.
3. החלפת זוג שורות.

בהניתן ממ"ל, ניתן לפתור אותה בעזרת <u>שיטת החילוץ של גאוס</u> על ידי רשימת <u>מטריצת המקדמים המורחבת</u> ודירוגה בעזרת פעולות אלמנטריות עד להגעה למטריצה מדורגת קנונית. נרשום את המטריצה המורחבת.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} & A & & \vec{b}\end{array}\right)$$

דוגמא 5.1.2.

נדגים את השיטה. תהא המערכת:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 6 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 3 \\ 2x_1 + 2x_2 + 1x_3 = 5 \end{cases}$$

נרשום את מטריצת המקדמים:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 1 & 5 \end{array}\right)$$

נביא את המערכת לצורה המדורגת כלומר לצורה:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \star \\ 0 & 1 & 0 & \star \\ 0 & 0 & 1 & \star \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 1 & 5 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2 \to R_2 - R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \\ 2 & 2 & 1 & 5 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2 \to -R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 1 & 5 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_3 \to R_3 - 2R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & -5 & -7 \end{array}\right) \xrightarrow{R_3 \to -\frac{1}{2}R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & \frac{5}{2} & \frac{7}{2} \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_3 \to R_3 - R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right) \xrightarrow{R_3 \to 2R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_2 \to R_2 - 2R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_1 \to R_1 - 2R_2 - 3R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

אז הפתרון שלנו הוא:

$$x_1 = x_2 = x_3 = 1$$

תרגיל 5.1.3.

תהא המערכת $Ax = b$, כאשר $A = \text{diag}(\lambda_1, ..., \lambda_n)$, כאשר $\lambda_k \neq 0$ לכל k, מצאו פתרון למערכת.

פתרון:

נשים לב כי המערכת שלנו קרובה למדורגת:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \lambda_1 & \dots & 0 & b_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & \lambda_n & b_n \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \dots & 0 & \frac{b_1}{\lambda_1} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & \frac{b_n}{\lambda_n} \end{array}\right)$$

אז הפתרון למערכת הוא:

$$x_1 = \frac{b_1}{\lambda_1}, ..., x_n = \frac{b_n}{\lambda_n}$$

תרגיל 5.1.4.

פתרו את המערכת:

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x + 2y + 3z = 4 \\ y + 2z = 2 \end{cases}$$

פתרון:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2 \to R_2 - R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{R_3 \to R_3 - R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right)$$

קיבלנו שורת סתירה בשורה 3, ולכן אין לממ"ל פתרון.

תרגיל 5.1.5.

פתרו את המערכת:

$$\begin{cases} x + y + z + w = 4 \\ y + z + w = 3 \\ z + w = 2 \end{cases}$$

פתרון:

נביא את המערכת לצורה הקנונית:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{R_1 \to R_1 - R_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2 \to R_2 - R_3} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

המטריצה מדורגת קנונית, נמיר חזרה לממ"ל:

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \\ z + w = 2 \end{cases}$$

כלומר, אם נסמן $w = t$, אז מרחב הפתרונות שלנו הוא:

$$(x, y, z, w) = \{(1, 1, 2 - t, t) | t \in \mathbb{R}\}$$

תרגיל 5.1.6.

יהא $k \in \mathbb{R}$ והממ"ל:

$$\begin{cases} -5x + ky + z = 8 \\ -x + y + z = 2 \\ y + kz = 2 \end{cases}$$

1. מצאו עבור אילו ערכים של k יש למערכת פתרון יחיד, אין פתרונות או ∞ פתרונות.
2. מצאו את כל פתרונות המערכת עבור $k = 0$.

<u>פתרון:</u>

1. נדרג את הממ"ל:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -5 & k & 1 & 8 \\ -1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & k & 2 \end{array}\right) \xrightarrow[R_2 \to -R_2]{R_1 \leftrightarrow R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & -2 \\ -5 & k & 1 & 8 \\ 0 & 1 & k & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{R_3 \to 5R_1 + R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & -2 \\ 0 & k-5 & -4 & -2 \\ 0 & 1 & k & 2 \end{array}\right)$$

נרצה לחלק ב$k-5$, כדאי להמשיך את הדירוג, כלומר נצטרך להניח כי $k \neq 5$, נעשה זאת, אבל נזכור בסוף התרגיל שצריך לבדוק מה קורה כאשר $k = 5$, ובשביל זה נצטרך לחזור לנקודה הזאת של המטריצה, להציב $k = 5$ ולראות מה קורה.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & -2 \\ 0 & k-5 & -4 & -2 \\ 0 & 1 & k & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2 \to \frac{1}{k-5} R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & \frac{-4}{k-5} & \frac{-2}{k-5} \\ 0 & 1 & k & 2 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_3 \to R_3 - R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & \frac{-4}{k-5} & \frac{-2}{k-5} \\ 0 & 0 & k + \frac{4}{k-5} & 2 + \frac{2}{k-5} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & \frac{-4}{k-5} & \frac{-2}{k-5} \\ 0 & 0 & \frac{4+k(k-5)}{k-5} & \frac{2+2(k-5)}{k-5} \end{array}\right)$$

זהו, קיבלנו מטריצה מדורגת, הדבר הראשון שנרצה לראות הוא מתי האיברים הפותחים של השורות מתאפסים, כלומר מתי:

$$\frac{4 + k(k-5)}{k-5} = 0 \iff 4 + k(k-5) = 4 + k^2 - 5k = 0$$

כלומר:

$$k_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{25-16}}{2} = \frac{5 \pm 3}{2} = 4, 1$$

אז דבר ראשון, כלומר $k \neq 4, 1, 5$ יש לנו פתרון יחד, נצטרך להציב כל מספר בנפרד ולראות מה קורה למערכת.

<u>כאשר $k = 1$:</u>

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & \frac{-4}{k-5} & \frac{-2}{k-5} \\ 0 & 0 & \frac{4+k(k-5)}{k-5} & \frac{2+2(k-5)}{k-5} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & \frac{-4}{1-5} & \frac{-2}{1-5} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2+2(1-5)}{1-5} \end{array}\right) =$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & \frac{-4}{1-5} & \frac{-2}{1-5} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{2+2(1-5)}{1-5} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & \frac{-4}{1-5} & \frac{-2}{1-5} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{3}{2} \end{array}\right)$$

בשורה 3 נקבל סתירה ולכן אין פתרון.

<u>כאשר $k = 4$:</u>

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & \frac{-4}{4-5} & \frac{-2}{4-5} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{2+2(4-5)}{4-5} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

אז יש אינסוף פתרונות.

<u>כאשר $k = 5$:</u> נחזור ללפני שחילקנו ב$k-5$ ונציב $k = 5$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & -2 \\ 0 & k-5 & -4 & -2 \\ 0 & 1 & k & 2 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -4 & -2 \\ 0 & 1 & 5 & 2 \end{array}\right)$$

וברור שיש פתרון יחיד.

כלומר כאשר $k \neq 1, 4$ יש פתרון יחיד, כאשר $k = 1$ אין פתרון וכאשר $k = 4$ יש אינסוף פתרונות.

2. נחזור למט' המדורגת ונציב $k = 0$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & \frac{-4}{k-5} & \frac{-2}{k-5} \\ 0 & 0 & \frac{4+k(k-5)}{k-5} & \frac{2+2(k-5)}{k-5} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & \frac{-4}{-5} & \frac{-2}{-5} \\ 0 & 0 & \frac{4}{-5} & \frac{-8}{-5} \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[R_2 \to -5R_2]{R_3 \to -5R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & -2 \\ 0 & -5 & -4 & -2 \\ 0 & 0 & 4 & -8 \end{array}\right) \xrightarrow[R_3 \to \frac{1}{4}R_3]{R_3 \to R_3 + R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & -2 \\ 0 & -5 & 0 & -10 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right)$$

מהשורה השלישית נקבל $z = -2$, מהשנייה $y = 2$, ואז מהשורה הראשונה:

$$x - y - z = -2 \Rightarrow x = -2 \Rightarrow x = -6$$

אז הפתרון שלנו הוא:

$$(x, y, z) = (-2, 2, -2)$$

5.1.2 ממ"ל הומוגנית ואי-הומוגנית

תזכורת.

תהא $Ax=b$ ממ"ל, אז אם v פתרון שלה, כלומר:

$$Av=b$$

וw פתרון של המערכת $Ax=0$, אז:

$$A(v+w)=Av+\cancel{Aw}^{\,0}=Av=b$$

כלומר $u=v+w$ פתרון של הממ"ל המקורית.
כלומר אם יש לנו ממ"ל, נוכל למצוא פתרון פרטי, לפתור את הממ"ל ההומוגנית, כלומר למצוא את הפתרון הכללי שלה, ואז הפתרון הכללי של הממ"ל האי-הומוגני יהיה <u>הפתרון הפרטי + הפתרון הכללי ההומוגני.</u>

דוגמא 5.1.7.

נניח יש לנו את הממ"ל:

$$\begin{cases} x+y=1 \\ 2x+2y=2 \end{cases}$$

ננחש את הפתרון $(x,y)=(1,0)$, ואז נתבונן במערכת ההומוגנית:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2\to R_2-2R_1} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

כלומר $x+y=0$, כלומר $x=t, y=-t$, אז הפתרון הכללי הוא:

$$(x,y)=(t,-t)+(1,0)=(t+1,-t), \qquad t\in\mathbb{R}$$

5.1.3 דרגת מטריצה

תזכורת.

בהינתן מטריצה $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, כלומר מטריצה עם m שורות ו-n עמודות. $\text{rank}(A)$ (לפעמים גם מסומן $r(A)$) הוא מספר השורות שאינן שורות אפסים בצורה המדורגת הקנונית של A.
אם יש לנו ממ"ל $Ax = b$, אז יש קשר בין מספר הפתרונות של הממ"ל לדרגות של $A, (A|b)$.

1. אין לממ"ל פתרון $\Longleftrightarrow$ יש שורת סתירה $\Longleftrightarrow$ $\text{rank}(A) < \text{rank}(A|b)$.
2. יש לממ"ל פתרון יחיד $\Longleftrightarrow$ אין שורת סתירה וגם אין משתנה חופשי $\Longleftrightarrow$ $\text{rank}(A) = \text{rank}(A|b) = n =$ מספר העמודות.
3. יש לממ"ל אינסוף פתרונות $\Longleftrightarrow$ אין שורת סתירה וגם יש משתנה חופשי $\Longleftrightarrow$ $\text{rank}(A) = \text{rank}(A|b) < n =$ מספר העמודות.

תרגיל 5.1.8.

נתונה ממ"ל עם פתרון יחיד

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y = b_2 \end{cases}$$

האם קיימים $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ כך ש:

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = c_1 \\ a_{21}x + a_{22}y = c_2 \end{cases}$$

אין פתרון?

<u>פתרון:</u>

מאחר ולממ"ל יש פתרון יחיד מתקיים $\text{rank}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = 2$ אז גם לכל $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ מתקיים:

$$\text{rank}\left(\begin{array}{cc|c} a_{11} & a_{12} & c_1 \\ a_{21} & a_{22} & c_2 \end{array}\right) = 2$$

ולכן יש למערכת פתרון יחיד (לכל $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$).

תרגול שישי

6.1 מרחבים וקטורים ותתי מרחבים וקטורים

תזכורת.

הקבוצה V, יחד עם פעולת החיבור, וכפל בסקלר ב-$\mathbb{F}$ נקראת מרחב וקטורי מעל שדה $\mathbb{F}$ אם מתקיים:

- סגירות לחיבור: $\forall v,w\in V,\ u+v\in V$.
- אסוציאטיביות בחיבור: $\forall v,u,w\in V,\ u+(v+w)=(u+v)+w$.
- קיום ווקטור האפס: $\exists 0\in V,\ \forall v\in V,\ 0+v=v+0=v$.
- קיום נגדי חיבורי: $\forall v\in V,\exists(-v)\in V,\ (-v)+v=v+(-v)=0$.
- חילופיות בחיבור: $\forall v,u\in V,\ u+v=v+u$.
- סגירות לכפל בסקלר: $\forall\lambda\in\mathbb{F},v\in V,\ \lambda v\in V$.
- פילוג של חיבור בסקלר: $\forall v\in V,\lambda,\mu\in\mathbb{F},\ (\lambda+\mu)v=\lambda v+\mu v$.
- פילוג של כפל בסקלר: $\forall v\in V,\lambda,\mu\in\mathbb{F},\ (\lambda\mu)v=\mu(\lambda v)$.
- פילוג של ווקטורים: $\forall u,v\in V,\lambda\in\mathbb{F},\ \lambda(u+v)=\lambda u+\lambda v$.
- כפל ביחידת השדה: $\forall v\in V,\ 1_{\mathbb{F}}\cdot v=v$.

כאשר איברי השדה נקראים סקלרים ואיברי המרחב נקראים וקטורים.

דוגמא 6.1.1.

נראה 3 דוגמאות למרחבים וקטורים מוכרים, כאשר $\mathbb{F}$ הוא או השדה $\mathbb{R}$ או $\mathbb{C}$.

1. מרחב המטריצות $\mathbb{F}^{n\times m}$ מעל $\mathbb{F}$ עם חיבור וכפל מטריצות כמו שהגדרנו בתרגול 4.
2. $\mathbb{F}^n$ מעל השדה $\mathbb{F}$ כלומר n-יות עם כפל בסקלר וחיבור איבר איבר.
3. מרחב הפולינומים $\mathbb{F}[x]$ מעל השדה $\mathbb{F}$ עם הפעולות שהגדרנו בתרגול 1 של חיבור פולינומים וכפל בסקלר.
4. מרחב הפונקציות הממשיות מעל $\mathbb{R}$ עם פעולות החיבור והכפל בסקלר הרגילות של פונקציות.

טענה 6.1.2.

נבחין כי:

1. $\mathbb{C}^n$ הוא תת מרחב מעליו $\mathbb{R}$.
2. $\mathbb{R}^n$ הוא לא תת מרחב מעליו $\mathbb{C}$.

מרוכבים מעל ממשיים ולהיפך

<u>הוכחה:</u>
נוכיח את הטענה עבור $n = 2$:
בשביל שמרחב יהיה מרחב וקטורי מעל שדה כלשהו (בפרט מעל $\mathbb{C}$) הוא צריך לקיים סגירות לכפל בסקלר. נבדוק האם זה המקרה:

$$(2+3i)\begin{pmatrix}1\\ \pi\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2+3i\\ (2+3i)\pi\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2+3i\\ 2\pi+3i\pi\end{pmatrix} \notin \mathbb{R}^2$$

כי אף אחת מהקורדינטות היא לא מספר ממשי!

תזכורת.

יהי V מ"ו מעל שדה $\mathbb{F}$ ותהיי $W \subset V$ תת קבוצה לא ריקה של V. נאמר כי W הוא תמ"ו מעל $\mathbb{F}$ אם הוא עם אותן פעולות חיבור וקטורים וכפל וקטור בסקלר כמו V.

דרך שקולה לבדוק שת"מ $V \subset W$ הוא תמ"ו, היא לבדוק את התנאים הבאים:

1. $0 \in W$
2. סגירות בחיבור ב W:
$$\forall w_1, w_2 \in W, \quad w_1 + w_2 \in W$$
3. סגירות בכפל בסקלר ב W:
$$\forall w \in W, \lambda \in \mathbb{F}, \quad \lambda w \in W$$

תרגיל 6.1.3.

בכל סעיף הוכיחו או הפריכו, האם הקבוצה הנתונה תמ"ו:

1.
$$A := \left\{ \begin{pmatrix} t \\ 1 \end{pmatrix} \middle| t \in \mathbb{R} \right\} \subset \mathbb{R}^2$$

2.
$$A := \{p(x) \mid \deg(p) \in \mathbb{N}_{odd}\} \subset \mathbb{R}[x]$$

3.
$$A := \left\{ \begin{pmatrix} t \\ 2t \\ 3t \end{pmatrix} \middle| t \in \mathbb{R} \right\} \subset \mathbb{R}^3$$

4.
$$A := \left\{ \begin{pmatrix} t \\ t^2 \\ 0 \end{pmatrix} \middle| t \in \mathbb{R} \right\} \subset \mathbb{R}^3$$

פתרון:

1. נשים לב כי וקטור האפס, $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ לא ב-A, אז A לא תת-מרחב.
2. נראה כי A אינה סגורה לחיבור:
$$2x^3 + x + \in A$$
$$-2x^3 - 4x^2 + 3 \in A$$
אבל:
$$2x^3 + x + 1 + (-2x^3 - 4x^2 + 3) = -4x^2 + x + 4 \notin A$$
3. נראה כי A תמ"ו של $\mathbb{R}^3$, ראשית $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in A$, אם $v_1, v_2 \in A$, אז קיימים $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$ כך ש:
$$v_1 = \begin{pmatrix} t_1 \\ 2t_1 \\ 3t_1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} t_2 \\ 2t_2 \\ 3t_2 \end{pmatrix}$$
אז:
$$(v_1 + v_2) = \begin{pmatrix} t_1 \\ 2t_1 \\ 3t_1 \end{pmatrix} + v_2 = \begin{pmatrix} t_2 \\ 2t_2 \\ 3t_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t_1 + t_2 \\ 2(t_1 + t_2) \\ 3(t_1 + t_2) \end{pmatrix} \in A$$

נשאר לנו להראות סגירות לכפל בסקלר:

$$\lambda \in \mathbb{R}, v = \begin{pmatrix} t \\ 2t \\ 3t \end{pmatrix} \in A \Rightarrow \lambda v = \begin{pmatrix} \lambda t \\ 2(\lambda t) \\ 3(\lambda t) \end{pmatrix} \in A$$

אז A אכן תמ"ו של $\mathbb{R}^3$.

4. נראה כי A אינה סגורה לחיבור:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} \in A$$

אבל:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} \notin A$$

כלומר A לא מ"ו של $\mathbb{R}^3$.

6.1.1 אחיוד וחיתוך של תתי-מרחבים

תזכורת.

יהיו W_1, W_2 תמ"ו של V.

1. החיתוך של W_1, W_2 הוא תמ"ו של V:

$$W_1 \cap W_2 := \{w | w \in W_1 \text{ וגם } w \in W_2\}$$

2. נסמן ע"י $W_1 + W_2$ את התמ"ו הבא של V:

$$W_1 + W_2 = \{w_1 + w_2 | w_1 \in W_1, w_2 \in W_2\}$$

מקרה מיוחד, בו נקרא לW_1, W_2 <u>סכום ישר</u> ונסמן $W_1 \oplus W_2$ הוא כאשר:

(א) $W_1 + W_2 = V$.

(ב) $W_1 \cap W_2 = \{0\}$.

התנאי השני, ש$W_1 \cap W_2 = \{0\}$ שקול לכך שכל $v \in V$ ניתן לייצג <u>בצורה יחידה</u> בתור $v = w_1 + w_2$ עבור $w_1 \in W_1, w_2 \in W_2$.

תרגיל 6.1.4.

1. הראו כי אוסף המטריצות מסדר $n \times n$ הסימטריות, אותם נסמן Sym_n, תמ"ו של $\mathbb{R}^{n\times n}$.
2. הראו כי אוסף המטריצות מסדר $n \times n$ האנטי-סימטריות, אותם נסמן ASym_n, תמ"ו של $\mathbb{R}^{n\times n}$.
3. הוכיחו כי $\mathbb{R}^{n\times n} = \mathsf{Sym}_n \oplus \mathsf{ASym}_n$.

פתרון:

1. נבדוק את הקריטריונים:
   (א) מטריצת האפס היא סימטרית,
   (ב) יהיו $A, B \in \mathsf{Sym}_n$, כלומר $A^t = A, B^t = B$, אז:
   $$(A+B)^t = A^t + B^t = (A+B)$$
   כלומר $(A+B) \in \mathsf{Sym}_n$.
   (ג) יהא $A \in \mathsf{Sym}_n$, כלומר $A = A^t, \lambda \in \mathbb{R}$, אז:
   $$(\lambda A)^t = \lambda A^t = \lambda A$$
   כלומר $(\lambda A) \in \mathsf{Sym}_n$.
2. ההוכחה זהה למקרה של Sym_n ומושארת כתרגיל.
3. נזכר שראינו בתרגול 3 בדיוק את זה, שכל מטריצה $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ אפשר לכתוב בתור:
   $$A = \underbrace{\frac{1}{2}(A+A^t)}_{\text{סימטרית}} + \underbrace{\frac{1}{2}(A-A^t)}_{\text{אנטי-סימטרית}}$$
   וזאת הדרך היחידה לעשות זאת, כלומר $\mathbb{R}^{n\times n} = \mathsf{Sym}_n \oplus \mathsf{ASym}_n$.

תרגיל 6.1.5.

1. הוכיחו כי קבוצת המטריצות המשולשת עליונות מסדר $n \times n$ תמ"ו של $\mathbb{R}^{n\times n}$.
2. הוכיחו כי קבוצת המטריצות המשולשת תחתונות מסדר $n \times n$ תמ"ו של $\mathbb{R}^{n\times n}$.
3. האם זוג התמ"ו סכום ישר עבור $\mathbb{R}^{n\times n}$?

פתרון:
סעיף 1 ו2 מושארים כתרגיל.
עבור הסעיף השלישי, נשים לב כי I_n גם משולשת עליונה וגם תחתונה, אך לא מטריצת האפס, כלומר $\mathbb{R}^{n\times n}$ לא סכום ישר של זוג תתי המרחבים הנ"ל.

תרגיל 6.1.6.

הוכיחו או הפריכו כי איחוד תמ"ו הוא תמ"ו.

<u>פתרון:</u>
נראה כי זה לא נכון. נתבונן במרחב הוקטורי $\mathbb{R}^3$ ובתתי המרחבים הבאים:

$$R_1 := \{(x,y,z) \mid y = 0 = z\}, R_2 := \{(x,y,z) \mid x = 0 = z\}, R_3 := \{(x,y,z) \mid x = 0 = y\}$$

בה"כ נראה ש R_1 הוא תת מרחב וקטורי:

$$0 = (0,0,0) \in R_1$$

$$\forall (x_1,0,0),(x_2,0,0) \in R_1,\ (x_1+x_2,0,0) \in R_1$$
$$\forall (x_1,0,0), \lambda \in \mathbb{R} \in R_1,\ \lambda(x_1,0,0) = (\lambda x_1,0,0) \in R_1$$

באופן דומה מוכיחים עבור R_2, R_3.

מתקיים ש:
$$(1,0,0) \in R_1 \subset R_1 \cup R_2, \qquad (0,2,0) \in R_2 \subset R_1 \cup R_2$$
ואילו הסכום שלהם מקיים:

$$(1,2,0) \notin R_1, R_2 \Rightarrow (1,2,0) \notin R_1 \cup R_2$$

כלומר תת המרחב $R_1 \cup R_2$ אינו סגור לחיבור ולכן אינו תת מרחב וקטורי של $\mathbb{R}^3$.

טענה 6.1.7.

יהיו V מרחב וקטורי ו W_1, W_2 שני תמ"ו שלו. הוכיחו כי, $W_1 \cup W_2$ תמ"ו של V אמ"מ $W_1 \subset W_2$ או $W_2 \subset W_1$.

<u>הוכחה:</u>
הכיוון הראשון:
בה"כ $W_1 \subset W_2$, אז יש להראות כי $W_1 \cup W_2$ תמ"ו של V, ואכן, $W_1 \cup W_2 = W_2$ שהוא תמ"ו של V.
הכיוון השני:
נראה כי אם W_1 לא מוכל בW_2 וגם W_2 לא מוכל בW_1, אז $W_1 \cup W_2$ לא תמ"ו.
במקרה הנ"ל, קיים $v_1 \in W_1$, אבל $v_1 \notin W_2$ וגם $v_2 \in W_2$, $v_2 \notin W_1$, נראה כי $v_1 + v_2 \notin W_1 \cup W_2$,
נניח בשלילה כי $v_1 + v_2 \in W_1 \cup W_2$, אבל אז מסגירות החיבור של W_1 מתקיים:

$$\underbrace{v_1 + v_2}_{\in W_1} + \underbrace{(-v_1)}_{\in W_1} = v_2 \in W_1$$

שזו סתירה להנחתינו.

ובאותה צורה, אם v_1+v_2 היה בW_2 היה מתקיים:

$$\underbrace{v_1+v_2}_{\in W_2}+\underbrace{(-v_2)}_{\in W_2}=v_1\in W_2$$

שזו גם סתירה, כלומר v_1+v_2 לא בV_1 וגם לא בV_2, אז הוא לא ב$V_1\cup V_2$, כלומר $V_1\cup V_2$ לא סגור לאיחוד.

6.1.2 צ"ל וSpan.

תזכורת.

יהא V מ"ו מעל $\mathbb{F}$, נומר כי $v\in V$ הוא צירוף ליניארי של $w_1,..,w_n\in V$ אם קיימים $a_1,...,a_n\in\mathbb{F}$ כך ש:

$$v=a_1w_1+a_2w_2+...+a_nw_n$$

תרגיל 6.1.8.

בדקו האם:

$$w=\begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix}$$

צ"ל של:

$$v_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix},\ v_2=\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix},\ v_3=\begin{pmatrix}0\\3\\4\\5\end{pmatrix}$$

פתרון:

נחפש $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ כך ש $w=\lambda_1v_1+\lambda_2v_2+\lambda_3v_3$:

$$\lambda_1\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}+\lambda_2\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}+\lambda_3\begin{pmatrix}0\\3\\4\\5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda_1+\lambda_2\\\lambda_2+3\lambda_3\\\lambda_2+4\lambda_3\\\lambda_2+5\lambda_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix}$$

אז יש לנו ממ"ל:

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&0&1\\0&1&3&2\\0&1&4&3\\0&1&5&4\end{array}\right)\rightsquigarrow\dots\rightsquigarrow\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&0&2\\0&1&0&-1\\0&0&1&1\\0&0&1&1\end{array}\right)$$

למממ"ל הזה פתרון יחיד:

$$\lambda_1 = 2, \quad \lambda_2 = -1, \quad \lambda_3 = 1$$

כלומר w אכן צ"ל של v_1, v_2, v_3:

$$2\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\3\\4\\5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix}$$

תרגיל 6.1.9.

בדקו האם:

$$p(x) = x^3 + 2x^2 + 3$$

צ"ל של:

$$q_1(x) = x^2$$
$$q_2(x) = x^3 + 1$$
$$q_3(x) = x^3 + x^2 + x$$

<u>פתרון:</u>
נחפש $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ כך ש:

$$\lambda_1 q_1(x) + \lambda_2 q_2(x) + \lambda_3 q_3(x) = p(x)$$

אז:

$$x^3(\lambda_2 + \lambda_3) + x^2(\lambda_1 + \lambda_3) + x(\lambda_3) + (\lambda_2) = x^3 + 2x^2 + 3$$

כלומר:

$$\begin{cases} \lambda_2 + \lambda_3 = 1 \\ \lambda_1 + \lambda_3 = 2 \\ \lambda_3 = 0 \\ \lambda_2 = 3 \end{cases}$$

מהמשוואה הראשונה, השנייה ורביעית אנו כבר רואים שאין פתרון, כלומר $p(x)$ לא צ"ל של q_1, q_2, q_3.

תזכורת.

יהיו $V \supset \{w_1, ..., w_n\} = W$, נסמן:

$$\text{span}_{\mathbb{F}}(W) = \text{span}_{\mathbb{F}}(w_1, ..., w_n) = \{a_1 w_1 + a_2 w_2 + ... + a_n w_n | a_1, ..., a_n \in \mathbb{F}\}$$

אם $\text{span}_{\mathbb{F}}(W) = V$ נומר כי W <u>פורשת</u> את V.

תרגיל 6.1.10.

הוכיחו כי $W=\left\{p(x)\in\mathbb{R}_{\leq 3}[x]\middle|\int_{-1}^{1}p(x)dx=0\right\}$ תת-מרחב של $R_{\leq 3}[x]$ ומצאו קבוצה פורשת.

<u>תזכורת:</u>

$$\int_{-1}^{1}x^n dx=\frac{x^{n+1}}{n+1}\Big|_{x=-1}^{x=1}=\frac{1^{n+1}}{n+1}-\frac{(-1)^{n+1}}{n+1}$$

<u>פתרון:</u>

ראשית נראה כי מדובר בתמ"ו, ברור כי פולינום האפס בW, יהיו $p(x),q(x)\in W$, אז:

$$\int_{-1}^{1}p(x)+q(x)dx=\int_{-1}^{1}p(x)dx+\int_{-1}^{1}q(x)dx=0$$

ויהא $\lambda\in\mathbb{R}$, אז:

$$\int_{-1}^{1}\lambda p(x)dx=\lambda\int_{-1}^{1}p(x)dx=0$$

נבדוק עבור פולינמום כללי $p(x)=a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0$ מתי $p(x)\in W$, ואכן:

$$\int_{-1}^{1}a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0dx=a_3\frac{x^4}{4}\Big|_{x=-1}^{x=1}+a_2\frac{x^3}{3}\Big|_{x=-1}^{x=1}+a_1\frac{x^2}{2}\Big|_{x=-1}^{x=1}+a_0x\Big|_{x=-1}^{x=1}$$

$$=a_2\frac{2}{3}+2a_0=0$$

כלומר:

$$a_0=-\frac{1}{3}a_2$$

נשים לב כי אין שום הגבלה על a_1,a_3, כלומר $p(x)\in W$ אמ"מ:

$$p(x)=sx^3-\frac{1}{3}tx^2+ux+t$$

לכל $s,t,u\in\mathbb{R}$, אז:

$$p(x)=sx^3+t\left(1-\frac{1}{3}x^2\right)+ux$$

כלומר הקבוצה:

$$p_1(x)=x^3$$

$$p_2(x)=1-\frac{1}{3}x^2$$

$$p_3(x)=x$$

פורשים את W.

תרגיל 6.1.11.

יהיו $W_2 = \text{span}\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right)$, $W_1 = \text{span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$, הוכיחו כי:

$$W_1 \oplus W_2 = \mathbb{R}^2$$

אמ"מ $y \neq 0$.

פתרון:

ראשית נוכיח כי אם $y \neq 0$ אז $W_1 \oplus W_2 = \mathbb{R}^2$, ואכן יש לנו 2 דברים להוכיח:

1.

$$W_1 \cap W_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

2.

$$W_1 + W_2 = \mathbb{R}^2$$

ואכן:

1. אם $v \in W_1 \cap W_2$, אז קיימים $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ כך ש:

$$v = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = c_2 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

כלומר:

$$\begin{pmatrix} c_1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} xc_2 \\ yc_2 \end{pmatrix}$$

אבל אם $y \neq 0$, אז $c_2 = 0$, ולכן $c_1 = 0$, כלומר $v = 0$.

2. יהא $v = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ כללי ב$\mathbb{R}^2$, עלינו להוכיח כי קיימים $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ כך ש:

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 + c_2 x \\ c_2 y \end{pmatrix}$$

אז ראשית, $c_2 = \frac{b}{y}$, ואז:

$$a = c_1 + c_2 x = c_1 + x\frac{b}{y} \Rightarrow c_1 = a - \frac{bx}{y}$$

וסיימנו.

הכיוון השני, שאם $W_1 \oplus W_2 = \mathbb{R}^2$ אז $y \neq 0$ מושארת כתרגיל.

תרגיל 6.1.12.

יהיו W, U_1, U_2 תמ"ו של V. הוכיחו או הפריכו:

1. אם:
$$W + U_1 = W + U_2$$
אז $U_1 = U_2$
2. אם:
$$W \oplus U_1 = W \oplus U_2$$
אז $U_1 = U_2$

פתרון:

1. נראה דוגמא נגדית, אם $V = \mathbb{R}^2$, $W = \mathbb{R}^2, U_1 = \mathbb{R}^2, U_2 = \text{span}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$, אז באמת:
$$\underbrace{\mathbb{R}^2}_{W} + \underbrace{\mathbb{R}^2}_{U_1} = \underbrace{\mathbb{R}^2}_{W} + \underbrace{\text{span}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}}_{U_1}$$
אבל כמובן:
$$\mathbb{R}^2 \neq \text{span}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$$
2. שוב נראה דוגמא נגדית, נגדיר:
$$W = \text{span}\left(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right), \quad U_1 = \text{span}\left(\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right), \quad U_2 = \text{span}\left(\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right)$$
אז עלפי התרגיל הקודם מתקיים $W \oplus U_1 = W \oplus U_2 = \mathbb{R}^2$, אבל $U_1 \neq U_2$, כי למשל $\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \in U_2$, אבל $\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \notin U_1$.

תרגול שביעי

7.1 חזרה על span

תזכורת.

יהא V מ"ו, נומר כי $S \subset V$ <u>פורש</u> את V אם:

$$V = \text{span}(S)$$

באותו אופן, אם W תמ"ו של V נומר כי $S \subset W \subset V$ <u>פורשת</u> את W אם:

$$W = \text{span}(S)$$

תרגיל 7.1.1.

יהא W תמ"ו של V, ותהא $S = \{w_1, ..., w_n\} \subset W$.

1. הוכיחו כי $\text{span}(S) \subset W$.
2. הוכיחו כי $\text{span}(S)$ תמ"ו של W.

<u>פתרון:</u>

1. נשים לב כי W, בתת-מרחב וקטורי סגור לחיבור וכפל בסקלר, אז משום שכל $S \subset W$, אז גם כל צ"ל של אברי S, כלומר
$$\text{span}(S) \subset W$$
2. נראה כי $\text{span}(S)$ תמ"ו.
   (א) ברור כי $0 \in \text{span}(S)$.
   (ב) יהיו $v_1, v_2 \in \text{span}(S)$, כלומר:
$$v_1 = \lambda_1 w_1 + ... + \lambda_n w_n, v_2 = \eta_1 w_1 + ... + \eta_n w_n$$
   אז:
$$v_1 + v_2 = (\lambda_1 + \eta_1) w_1 + ... + (\lambda_n + \eta_n) w_n \in \text{span}(S)$$

(ג) אם $\text{span}(S) \ni v = v_1 = \lambda_1 w_1 + ... + \lambda_n w_n, \eta \in \mathbb{F}$ אז:

$$\eta v = \eta\lambda_1 w_1 + ... + \eta\lambda_n w_n \in \text{span}(S)$$

כפל בסקלר מושאר כתרגיל.

7.2 תלות ואי-תלות לינארית

תזכורת.

יהי V מ"ו מעל שדה $\mathbb{F}$. הוקטורים $v_1, ..., v_n$ (או לחילופין הקבוצה $T = \{v_1, ...v_n\}$) נקראת תלויה לינארית אם קיימים $\alpha_1, ...\alpha_n \in \mathbb{F}$ לא כולם אפסים כך ש:

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_1 v_1 = \alpha_1 v_1 + ... + \alpha_n v_n = 0$$

הוקטורים $v_1, ..., v_n$ (או לחילופין הקבוצה T) יקראו בלתי תלויים לינארית אם לכל $\alpha_1, ..., \alpha_n \in \mathbb{F}$ כך ש:

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_1 v_1 = \alpha_1 v_1 + ... + \alpha_n v_n = 0$$

בהכרח מתקיים ש $\alpha_1 = ... = \alpha_n = 0$.

תרגיל 7.2.1.

בדקו האם הקבוצה $\{x-1, x+1, x^2-1\} \subset \mathbb{R}[x]$ שבמרחב הפולינומים מעל $\mathbb{R}$ תלויה לינארית.

פתרון:
נניח כי קיימים $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}$ כך ש:

$$a_1(x-1) + a_2(x+1) + a_3(x^2-1) = 0$$

כלומר:

$$a_3x^2 + (a_1+a_2)x + (a_2 - a_1 - a_3) = a_1x - a_1 + a_2x + a_2 + a_3x^2 - a_3 = 0$$

פולינומים שווים אם המקדמים שלהם שווים, לכן:

$$\begin{cases} a_3 = 0 \\ a_1 + a_2 = 0 \\ a_2 - a_1 - a_3 = 0 \end{cases}$$

נרשום את המערכת בצורה מטריציונית:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right)$$

אם נדרג נקבל את המטריצה:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

לכן הפתרון היחיד למערכת הוא $a_1 = a_2 = a_3 = 0$, כלומר הקבוצה בלתי תלויה לינארית.

טענה 7.2.2.

יהא V מ"ו מעל $\mathbb{F}$, $S = \{v_1, ...v_n\} \subset V$ תת קבוצה שלו, אם $0 \in S$ אז היא תלויה לינארית.

הוכחה:

בה"כ $v_1 = 0$. נבחר מקדמים באופן הבא:

$$\alpha_1 = 1, \qquad \forall 1 \le i \le n, \qquad \alpha_i = 0$$

אזי מתקיים:

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_1 v_1 = \alpha_1 v_1 + ... + \alpha_n v_n = \sum_{i=1}^{n} \alpha_1 v_1 = 1v_1 + 0v_2 + ... + 0v_n = v_1 = 0$$

כלומר, מצאנו מקדמים שלא כולם אפסים כך שהצירוף של איברי S עימם הוא 0, ולכן S תלויה לינארית, כרצוי.

תרגיל 7.2.3.

תהא $S = \{(1,i)(i,-1)\} \subset \mathbb{C}^2$. הראו כי:

1. הקבוצה תלויה לינארית ב$\mathbb{C}^2$ כמרחב וקטורי מעל $\mathbb{C}$.
2. הקבוצה בלתי תלויה לינארית ב$\mathbb{C}^2$ כמרחב וקטורי מעל $\mathbb{R}$.

פתרון:

1. נניח כי השדה הוא $\mathbb{C}$. אזי נרצה למצוא $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ כך ש:

$$z_1(1,i) + z_2(i,-1) = (0,0)$$

נניח שקיימים כאלו. אזי מטריצת המקדמים היא:

$$\begin{pmatrix} 1 & i \\ i & -1 \end{pmatrix}$$

ולאחר דירוג נקבל את המטריצה:

$$\begin{pmatrix} 1 & i \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

זוהי מטריצת מקדמים של מערכת הומוגנית עם שורת אפסים, כלומר יש אינסוף פתרונות למערכת ובפרט אחד לא טריוואלי (פתרון שלא כולו אפסים), והוא יעיד שהקבוצה תלויה לינארית.

2. נניח כעת כי השדה הוא $\mathbb{R}$. אזי נרצה למצוא $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ כך ש:

$$(a_1 + ia_2, a_1 i - a_2) = a_1(1, i) + a_2(i, -1)(a_1 + ia_2, ia_1 - a_2) = (0, 0)$$

אבל מספרים מרוכבים שווים אם החלקים הממשים והמדומים שלהם שווים, כלומר:

$$ia_1 - a_2 = 0 \iff a_1 = a_2 = 0$$

לכן, $a_1 = a_2 = 0$ והקבוצה בלתי תלויה לינארית.

טענה 7.2.4.

יהא V מ"ו מעל $\mathbb{F}$, הוכיחו כי $\mathbb{F}$ ו $S = \{v_1, v_2\} \subset V$תלויה לינארית אמ"מ איבריה כפולה בסקלר אחד של השני.

<u>הוכחה:</u>
כלומר, נראה ש S ת"ל אמ"מ $v_1 = \lambda v_2$ עבור $\lambda \in \mathbb{F}$ כלשהי.
<u>כיוון ראשון</u> נניח כי הקבוצה ת"ל. אזי קיימים λ_1, λ_2 לא כולם אפסים (בה"כ $\lambda_1 \neq 0$) כך ש:

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 = 0$$

כלומר:

$$v_1 = -\frac{\lambda_1}{\lambda_2} v_2$$

ולכן הם כפולה בסקלר אחד של השני.

<u>כיוון שני</u> נניח כי הם כפולה בסקלר אחד של השני, כלומר $v_1 = \alpha v_2$. אזי:

$$v_1 - \alpha v_2 = 0$$

עבור $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -\alpha$, מתקיים שהצירוף הלינארי של איברי S עימם הוא 0, כלומר S תלויה לינארית.

7.3 בסיס ומימד

תזכורת.

יהא V מ"ו, קבוצה:

$$B=\{v_1,...,v_n\}$$

קבוצה שהיא גם פורשת את V וגם בת"ל נקראת בסיס של V.
אם V נוצרת סופית אז קיים בסיס סופי, ולמספר האיברים בו נקרא המימד של V ונסמן:

$$|B|=n=\dim V$$

טענה (ללא הוכחה) 7.3.1.

מספר תכונות חשובות.

1. אם B_1,B_2 זוג בסיסים של V, אז:
$$|B_1|=|B_2|$$
2. אם $W=\{w_1,...,w_m\}\subset V$, בת"ל, אז:
$$|W|=m\leq\dim(V)$$
3. אם $W=\{w_1,...,w_m\}\subset V$, פורשת את V, כלומר $V=\text{span}(W)$, אז:
$$|W|=m\geq\dim(V)$$
4. אם $W=\{w_1,...,w_m\}\subset V$, ומתקיים $\dim(V)=|W|$, ו-W או פורשת את V, או בת"ל אז W בסיס של V.

תרגיל 7.3.2.

הוכיחו כי:

$$v_1=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix},v_2=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},v_3=\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}$$

בסיס של $\mathbb{R}^3$.

פתרון:
נשים לב כי עלינו להוכיח 2 דברים, אי-תלות ופרישה, אבל משום ש $\dim\mathbb{R}^3=3=|W|$, אז אם W או בת"ל או פורשת את $\mathbb{R}^3$, אז היא אוטומטית מקיימת את 2 התכונות.

נוכיח אי-תלות, יהיו $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ כך ש:

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 = 0$$

אז:

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 + \lambda_2 + 2\lambda_3 \\ 2\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 \\ 3\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

נדרג את המטריצה המתאימה:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow \ldots \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

למערכת הזאת יש פתרון יחיד, $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$ וסיימנו.

תרגיל 7.3.3.

הוכיחו כי הקבוצה:

$$M = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \middle| a + b + c + d = 0 \right\}$$

תמ"ו של $\mathbb{R}^{2\times 2}$ ומצאו בסיס עבורה.

<u>פתרון:</u>
ראשית נוכיח כי מדובר בתמ"ו:

- ברור כי $0 \in M$.
- יהיו $M_1 = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix}, M_2 = \begin{pmatrix} a_1 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix} \in M$, אז:

$$M_1 + M_2 = \begin{pmatrix} a_1 + a_2 & b_1 + b_2 \\ c_2 + c_2 & d_1 + d_2 \end{pmatrix}$$

ומתקיים:

$$a_1 + a_2 + b_2 + b_2 + c_1 + c_2 + d_1 + d_2 = (a_1 + b_1 + c_1 + d_1) + (a_2 + b_2 + c_2 + d_2) = 0$$

- אם $M_1 = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix} \in M$, $\lambda \in \mathbb{R}$ אז $\lambda M_1 = \begin{pmatrix} \lambda a_1 & \lambda b_1 \\ \lambda c_1 & \lambda d_1 \end{pmatrix}$ ומתקיים:

$$\lambda a_1 + \lambda b_1 + \lambda c_1 + \lambda d_1 = \lambda(a_1 + b_1 + c_1 + d_1) = 0$$

אז $\lambda M_1 \in M$.

כעט אנו יודעים כי מדובר בתמ"ו של $\mathbb{R}^{2\times 2}$, אנו יודעים כי $M \neq \mathbb{R}^{2\times 2}$, אז $\dim M < 4$.
נחפש איברים בת"ל בM, אז ניחוש טוב הוא:

$$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, M_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, M_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

ברור כי $M_1, M_2, M_3 \in M$, אז אם נראה כי הם בת"ל אז אוטומטית נקבל כי הם בסיס, ואכן:

$$\lambda_1 M_1 + \lambda_2 M_1 + \lambda_3 M_3 = \begin{pmatrix} \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 & -\lambda_1 \\ -\lambda_2 & -\lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \iff \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$$

תרגיל 7.3.4.

הוכיחו כי $\mathbb{R}[x]$ אינה נוצרת סופית.

<u>פתרון:</u>
נניח בשלילה כי $\mathbb{R}[x]$ נוצרת סופית, כלומר קיים ל$\mathbb{R}[x]$ בסיס:

$$B = \{p_1(x), ..., p_n(x)\}$$

נסמן:

$$M = \max_{k=1}^{n} \deg(p_k(x))$$

אז x^{M+1} לא צ"ל של אברי B, בשלילה לכך ש B פורשת את $\mathbb{R}[x]$.

תרגיל 7.3.5.

(תרגיל ממבחן עבר - מועד א' ינואר 2022)
תהא:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ויהיו:

$$U = \left\{X \in \mathbb{R}^{3\times 3} | AX - XA = 0\right\}$$

$$V = \left\{Y \in \mathbb{R}^{3\times 3} | AY + YA = 0\right\}$$

תמ"ו של $\mathbb{R}^{3\times 3}$ (איו צורך להוכיח כי מדובר בתמ"ו), מצאו בסיס ומימד ל $U \cap V$.

<u>פתרון:</u>
תהא $Z \in U \cap V$, אז:

$$\begin{cases} AZ - ZA = 0 \\ AZ + ZA = 0 \end{cases} \Rightarrow ZA = AZ = 0$$

תהא $M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$, אז:

$$AM = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 5d & 5e & 5f \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$MA = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 5b & 0 \\ d & 5e & 0 \\ g & 5h & 0 \end{pmatrix}$$

כלומר, $MA = AM = 0 \iff a = b = c = d = e = f = g = h = 0$, אז:

$$U \cap V = \text{span}\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$$

אז $\dim(U \cap V) = 1$, והמטריצה היחידה בspan היא הבסיס למרחב.

תרגיל 7.3.6.

יהא V מ"ו נוצר סופית, ויהא W תמ"ו של V כך ש $\dim W = \dim V$, הוכיחו כי $V = W$.

פתרון:

נבחר לW בסיס, $B_W = \{w_1, ..., w_n\}$, בפרט B_W קבוצה בV שהיא בת"ל, ומתקיים $|B_W| = \dim(W) = \dim(V)$, אז:

$$W = \text{span}(B_W) = V$$

7.4 מרחבי שורות ועמודות של מטריצות

תזכורת.

תהיי $A \in \mathbb{F}^{m\times n}$ מטריצה מסדר $a \times m$, נסמן:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \ddots & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

אם נסמן ב $R_1, \dots, R_m$ את שורות A, וב$C_1, \dots, C_n$ את עמודות A, אז נגדיר את תתי המרחבים:

$$\text{Row}(A) = \text{span}(R_1, .., R_m) = \text{span}\left(\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \right) \subset \mathbb{F}^n$$

$$\text{Col}(A) = \text{span}(C_1, \dots, C_n) = \text{span}\left(\begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} \right) \subset \mathbb{F}^m$$

עובדה חשובה שראינו בהרצאה היא שבמהלך תהליך הדירוג, $\text{Row}(A)$ נשמרת.

תרגיל 7.4.1.

תהא $A \in \mathbb{F}^{m\times n}$, ותהא B שקולת שורות לA, כלומר בעזרת דירוג ניתן להגיע מA לB, הוכיחו או הפריכו:

$$\text{Col}(A) = \text{Col}(B)$$

<u>פתרון:</u>

נראה כי עובדה זו לא נכונה, בניגוד למקרה של Row.

נשים לב כי:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

אבל:

$$\text{Col}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \text{span}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Col}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \text{span}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

וכמובן ש:

$$\text{span}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \neq \text{span}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

תרגיל 7.4.2.

תהא $A=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&3&4&4\\1&2&4&4\end{pmatrix}$ מצאו בסיס ל-Row(A), Col(A).

<u>פתרון:</u>
נתחיל מ-Row(A).
שלושת שורות A הן:

$$R_1=\begin{pmatrix}1&2&3&4\end{pmatrix}$$
$$R_2=\begin{pmatrix}1&3&4&4\end{pmatrix}$$
$$R_3=\begin{pmatrix}1&2&4&4\end{pmatrix}$$

אז:

$$\lambda_1R_1+\lambda_2R_2+\lambda_3R_3=0 \iff \begin{cases}\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=0\\2\lambda_1+3\lambda_2+2\lambda_3=0\\3\lambda_1+4\lambda_2+4\lambda_3=0\\4\lambda_1+4\lambda_2+4\lambda_3=0\end{cases}$$

מהמשוואה הראשונה והשנייה נקבל $\lambda_2=0$, אז מהמשוואה הראשונה והשלישית נקבל:

$$\begin{cases}\lambda_1+\lambda_3=0\\3\lambda_1+4\lambda_3=0\end{cases} \Rightarrow \lambda_1=\lambda_2=0$$

אז הקבוצה בת"ל ונקבל כי R_1,R_2,R_3 בסיס ל-Row(A).
עבור Col(A), ישר נשים לב כי $C_4=4C_1$, אז נבדוק האם C_1,C_2,C_3 בת"ל ולכן בסיס, כלומר האם:

$$\eta_1C_1+\eta_2C_2+\eta_3C_3=0 \iff \eta_1=\eta_2=\eta_3=0$$

ואכן:

$$\eta_1C_1+\eta_2C_2+\eta_3C_3=\begin{pmatrix}\eta_1+2\eta_2+3\eta_3\\\eta_1+3\eta_2+4\eta_3\\\eta_1+2\eta_2+4\eta_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

אז מהמשוואה הראשונה והשנייה נקבל $\eta_3=0$, אז מהמשוואה הראשונה והשנייה נקבל:

$$\begin{cases}\eta_1+2\eta_2\\\eta_1+3\eta_2\end{cases}=0 \iff \eta_1=\eta_2=0$$

כלומר, C_1,C_2,C_3 בסיס ל-Col(A).

תרגול שמיני

8.1 השלמה לבסיס

תזכורת.

תהיי $A \in \mathbb{F}^{m\times n}$ מטריצה מסדר $a \times m$, נסמן:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \ddots & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

אם נסמן ב $R_1, ..., R_m$ את שורות A, אז:

$$\text{Row}(A) = \text{span}(R_1, .., R_m) = \text{span}\left(\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \end{pmatrix}, ..., \begin{pmatrix} a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}\right) \subset \mathbb{F}^n$$

עובדה חשובה שראינו בהרצאה היא שבמהלך תהליך הדירוג, $\text{Row}(A)$ נשמרת.

תזכורת.

יהא V מ"ו ממימד n, ותהא $W = \{w_1, .., w_k\}$ קבוצה בת"ל, אז בהכרח קיימים $U = \{u_{k+1}, ..., u_n\}$ כך ש:

$$B = W \cup U = \{w_1, .., w_k, u_{k+1}, ..., u_n\}$$

בסיס של V.
כלומר כל קבוצה בת"ל ניתן להשלים לבסיס.

תרגיל 8.1.1.

מצאו בסיס B ל$\mathbb{C}^2$ כמ"ו מעל $\mathbb{R}$ המכיל את:

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1+i \\ 0 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 1-i \\ 0 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ i \end{pmatrix}$$

פתרון:

אנו יודעים כי מימד $\mathbb{C}^2$ כמ"ו מעל $\mathbb{R}$ הוא 4, ולכן מספיק למצוא וקטור יחיד, v_4 כך ש $v_1, ..., v_4$ בת"ל

נסיים. ואכן ננחש את $v_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ואכן:

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 + \lambda_4 v_4 = \begin{pmatrix} \lambda_1(1+i) + \lambda_2(1-i) \\ i\lambda_3 + \lambda_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 + \lambda_2 + i(\lambda_1 - \lambda_2) \\ i\lambda_3 + \lambda_4 \end{pmatrix} = 0$$

כלומר:

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ \lambda_1 - \lambda_2 = 0 \\ \lambda_3 = 0 \\ \lambda_4 = 0 \end{cases} \iff \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 0$$

תרגיל 8.1.2.

השלימו את:

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, v_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

לבסיס של $\mathbb{R}^5$.

פתרון:
עכשיו לנחש יהיה קצת קשה, אז נעשה את הדבר הבא:

1. נבדוק כי הקבוצה בת"ל (נדלג על כך בתרגיל הזה).
2. נרשום את $v_1, ..., v_4$ כשורות מטריצה A.
3. נדרג את המטריצה למטרציה B
4. נקבל בסיס חדש למרחב השורות, שאותו קל יותר להשלים לבסיס של $\mathbb{R}^5$.
5. נשים לב כי $\text{Row}(A) = \text{Row}(B)$, אז ההשלמה לבסיס של $\text{Row}(B)$ תהווה את אותה השלמה של $\text{Row}(A)$ אותה אנו מחפשים.

אז:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

כלומר, המרחב הנפרש על ידי $v_1, ..., v_4$ הוא אותו מרחב שנפרש על ידי:

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, u_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, u_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

וזאת קבוצה שקל להשלים לבסיס עם:

$$u_5 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

אז בסיס ל-$\mathbb{R}^5$ הוא:

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, v_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, u_5 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

8.2 משפט המימדים

תזכורת.

יהא V מ"ו, ויהיו $S = \{v_1, ..., v_n\}, T = \{w_1, ..., w_m\}$ תתי-קבוצות של V אז:

$$\text{span}(T) + \text{span}(S) = \text{span}(S \cup T)$$

תזכורת.

יהא V מ"ו נוצר סופית ויהיו זוג תמ"ו U, W של V, אז מתקיים:

$$\dim(U + W) = \dim(U) + \dim(W) - \dim(U \cap W)$$

תרגיל 8.2.1.

יהיו V מרחב וקטורי מעל שדה $\mathbb{F}$ ממימד 6, U תת מרחב וקטורי של V ממימד 4, W תת מרחב וקטורי של V ממימד 5. בנוסף, נניח שU לא מוכל בW. הראו כי: $\dim(U \cap W) = 3$.

<u>פתרון:</u>

U, W תתי מרחבים של V ולכן גם סכומם תת מרחב של V. לכן:

$$U + W \subset V \Rightarrow \dim(U+W) \leq 6$$

ממשפט המימדים:

$$\dim(U+W) = \dim(U) + \dim(W) - \dim(U \cap W)$$

נציב את ההנחות שלנו:

$$6 \geq \dim(U+W) = 4 + 5 - \dim(U \cap W)$$

כלומר:

$$\dim(U \cap W) \geq 3$$

אבל חיתוך הוא בפרט תת מרחב של כל אחד מהמרחבים, כלומר:

$$U \cap W \subset U \ ; \ U \cap W \subset W \Rightarrow \dim(U \cap W) \leq \min \dim(U), \dim(W) = \min 4, 5 = 4$$

כלומר, סה"כ:

$$4 \geq \dim(U \cap W) \geq 3$$

נניח בשלילה שהמימד של החיתוך הוא 4. אז:

$$\dim(U \cap W) = 4 = \dim(U) \ \ \& \ \ U \cap W \subset U \Rightarrow U = W \cap U \subset W$$

וזו סתירה כי הנחנו ש$W \subsetneq U$. לכן, $\dim(U \cap W) = 3$, כרצוי.

תרגיל 8.2.2

חשבו את ממדי החיתוך והסכום עבור: $U=\text{span}\{1-x,2\},\ W=\text{span}\{3+x,x^2\}$ ב $\mathbb{R}_2[x]$.

פתרון:
נבחין כי $1-x,2$ אינם כפולה בסקלר אחד של השני. לכן, הם בלתי תלויים לינארית. כלומר, זו קבוצה פורשת בת"ל של U, כלומר בסיס. מהגדרת מימד, $\text{dim}(U)=2$. באופן דומה, גם $\text{dim}(W)=2$.
מהתזכורת:

$$U+W=\text{span}\{1-x,2\}+\text{span}\{3+x,x^2\}=\text{span}\{1-x,2,3+x,x^2\}$$

נבדוק אם הקבוצה הפורשת תלויה לינארית. נתבונן בקבוצה:

$$(a_1+2a_2)+(-a_1)x+(a_3)x^2=a_1(1-x)+a_2(2)+a_3(3+x)+a_4(x^2)=0$$

והממ"ל המתאימה:

$$\begin{cases}a_1+2a_2+3a_3=0\\ -a_1+a_3=0\\ a_4=0\end{cases}$$

והמטריצה המתאימה היא:

$$\begin{pmatrix}1&2&3&0\\-1&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$$

וזו מטריצה הומוגניות עם יותר עמודות משורות, כלומר יש פתרון לא טריוואלי והקבוצה תלויה לינארית.
לכן, $\text{dim}(U+W)<4$.
ואכן ניתן להבחין כי תלות אחת היא בכך ש:

$$(-1)(3+x)+2(2)+(-1)(1-x)=0$$

נוריד את $3+x$ ונבדוק בת"ל:

$$(a_1+2a_2)+(-a_1)x+(a_3)x^2=a_1(1-x)+a_2(2)+a_3(x^2)=0$$

והממ"ל המתאימה:

$$\begin{cases}a_1+2a_2=0\\ -a_1=0\\ a_3=0\end{cases}$$

והפתרון שלה הוא רק $a_1=a_2=a_3=0$.כלומר, זו קבוצה בת"ל מגודל 3, והמימד הוא לכל היותר 3, ולכן הוא בדיוק 3.
ממשפט המימדים:

$$3=\text{dim}(U+W)=\text{dim}(U)+\text{dim}(W)-\text{dim}(U\cap W)=2+2-\text{dim}(U\cap W)$$

לכן: $\text{dim}(U\cap W)=1$ כרצוי.

8.3 משפט הדרגה

תזכורת.

תהא $A \in \mathbb{F}^{m\times n}$ מטריצה, אז:

$$\text{rank}(A) = \dim(\text{Row}(A)) = \dim(\text{Col}(A))$$

תרגיל 8.3.1.

הוכיחו או הפריכו:
תהא A מטריצה מסדר 4×3, אז עמודה 4 צ"ל של העמודות האחרות.

פתרון:
זה לא נכון, נראה דוגמא נגדית:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

תרגיל 8.3.2.

עבור כל ערכי
$s, t \in \mathbb{R}$ מצאו בסיס למרחב השורות ועמודות ל:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & s+t \\ 0 & 1 & 2 & st \\ 0 & 0 & 1 & e^t \end{pmatrix}$$

פתרון:
נשים לב כי העמודה הראשונה, השנייה והשלישית בת"ל (לכל s, t) ולכן לכל s, t הדרגה של A היא 3, ולכן לכל s, t בסיס למרחב השורות הוא פשוט שלושת העמודות, ומרחב השורות הוא כל $\mathbb{R}^3$, אז נבחר פשוט את הבסיס הסטנדרטי:

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

8.4 מטריצות הפיכות

תזכורת.

מטריצה <u>ריבועית</u> $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ נקראת הפיכה אם קיימת מטריצה $B \in \mathbb{F}^{n\times n}$ כך ש:

$$AB = BA = I_n$$

נסמן $B = A^{-1}$.

טענה (ללא הוכחה) 8.4.1.

1. יהיו A, B מטריצות הפיכות מאותו סדר אז AB גם הפיכה ומתקיים:

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$

2. תהא A הפיכה, אז גם A^t הפיכה ומתקיים:

$$(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$$

3. $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ הפיכה אמ"מ:

(א) A שקולת שורה ל-I_n.

(ב) לכל $b \in \mathbb{F}^n$ קיימת למשל"ל $Ax = b$ פתרון יחיד שהוא:

$$x = A^{-1}b$$

(ג)

$$\text{rank}(A) = n$$

דוגמא 8.4.2.

נחשב בידיים את ההופכית של $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ אז נניח כי:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

אז:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+c & b+d \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

אז $c=0, d=1$, אז:

$$\begin{pmatrix} a+c & b+d \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b+1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ולכן:

$$a=1, \quad b=-1$$

אז:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

תרגיל 8.4.3.

תהא $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, הוכיחו כי:

1. אם בA שורת אפסים אז A אינה הפיכה.
2. אם בA עמודת אפסים אז A אינה הפיכה.
3. האם במקרה בו בA אין שורת ועמודת אפסים A בהכרח הפיכה?

פתרון:

1. אם בA שורת אפסים, כלומר קיים k כך ש $(A)_{k,i}=0$ לכל $1\le i\le k$.
נניח בשלילה שקיימת $B=A^{-1}$ אז $AB=I_n$, אבל נחשב:

$$(AB)_{k,k} = \sum_{i=1}^{n} A_{k,i}B_{i,k} = 0$$

אבל:

$$(AB)_{k,k} = (I_n)_{k,k} = 1$$

שזו סתירה.

2. תהא A מטריצה עם עמודת אפסים, נניח בשלילה כי A הפיכה, אז גם A^t, אבל בA^t שורת אפסים, אז נקבל סתירה לסעיף הקודם.
3. נראה דוגמא נגדית:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

אז $\text{rank}(A) = 1 \neq 2$, אז היא לא הפיכה.

תרגיל 8.4.4.

תהא $\begin{pmatrix} \lambda_1 & ... & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & ... & \lambda_n \end{pmatrix} = A = \text{diag}(\lambda_1, ..., \lambda_n)$, הוכיחו כי A הפיכה אמ"מ $\lambda_1, ..., \lambda_n \neq 0$,

<u>פתרון:</u>
ראשית, אם $\lambda_k = 0$ עבור k כלשהו אז בA שורת אפסים ולכן A אינה הפיכה, נראה כי אם $\lambda_1, ..., \lambda_n \neq 0$ אז A הפיכה, ואכן נזכר כי:

$$\text{diag}(\lambda_1, ..., \lambda_n)\,\text{diag}(\eta_1, ..., \eta_n) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & ... & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & ... & \lambda_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta_1 & ... & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & ... & \eta_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \eta_1\lambda_1 & ... & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & ... & \eta_n\lambda_n \end{pmatrix}$$

אז באמת:

$$B = \text{diag}\left(\frac{1}{\lambda_1}, ..., \frac{1}{\lambda_n}\right)$$

מקיימת:

$$AB = \text{diag}(1, ..., 1) = I_n$$

תרגול תשיעי

9.1 מטריצות הפיכות

תרגיל 9.1.1.

תהא $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, כך ש:

$$A^{10} = -I_n$$

הוכיחו כי A הפיכה ומצאו את A^{-1}.

פתרון:
נשים לב כי:

$$A^{20} = (-I_n)(-I_n) = (-1)^2 I_n = I_n$$

אז:

$$A^{20} = AA^{19} = I_n$$

אז:

$$A^{-1} = A^{19}$$

תזכורת.

בהנתן A, על מנת למצוא את A^{-1}, נכתוב את $P = (A|I_n)$ ונדרג את A לI_n עד שנקבל $(I_n|B)$ ואז $B = A^{-1}$.

תרגיל 9.1.2.

מצאו את המטריצה ההופכית ל:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

פתרון:
נרשום את:

$$P = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

ונדרג:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[R_3 \to R_3 - R_1]{R_2 \to R_2 - R_1}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2 \to R_2 - 2R_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_3 \to R_3 - R_2}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -2 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow{R_3 \leftrightarrow R_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & -2 \end{array}\right)$$

אז:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

תרגיל 9.1.3.

יהיו $A, B, C \in \mathbb{R}^{n \times n}$ הפיכות, נסמן:

$$D = 3A^2 B^t C^2 A$$

מצאו את D^{-1}.

<u>פתרון:</u>
נשים לב כי:

$$DA^{-1} = 3A^2 B^t C^2 A A^{-1} = 3A^2 B^t C^2$$

$$DA^{-1}(C^{-1})^2 = 3A^2 B^t C^2 (C^{-1})^2 = 3A^2 B^t$$

$$DA^{-1}(C^{-1})^2 (B^t)^{-1} = 3A^2 B^t (B^t)^{-1} = 3A^2$$

$$DA^{-1}(C^{-1})^2 (B^t)^{-1} (A^2)^{-1} = 3A^2 (A^2)^{-1} = 3I_n$$

$$D\left(\frac{1}{3} A^{-1}(C^{-1})^2 (B^t)^{-1} (A^2)^{-1}\right) = I_n$$

אז:

$$D^{-1} = \frac{1}{3} A^{-1}(C^{-1})^2 (B^t)^{-1} (A^2)^{-1}$$

תרגיל 9.1.4.

1. תהא $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ הפיכה, ו v_1, v_2, v_3 ווקטורים בת"ל, הוכיחו כי Av_1, Av_2, Av_3 גם בת"ל.
2. האם הטענה נכונה עבור A שאינה הפיכה?

פתרון:

1. נניח בשלילה כי Av_1, Av_2, Av_3 ת"ל, כלומר קיימים $\lambda_1, \lambda_3, \lambda_3$ שאינם כולם אפס כך ש:

$$\lambda_1 Av_1 + \lambda_2 Av_2 + \lambda_3 Av_3 = 0$$

אבל:

$$\lambda_1 Av_1 + \lambda_2 Av_2 + \lambda_3 Av_3 = A(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3)$$

כלומר $u = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3$ פתרון של המערכת $Ax = 0$, אבל A הפיכה ולכן הפתרון היחיד של המערכת הוא $u = 0$ אז:

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 = 0$$

בסתירה לכך ש v_1, v_2, v_3 בת"ל.

2. נראה דוגמא נגדית:

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\ v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},\ A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

תרגיל 9.1.5.

תהא $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ כך ש:

$$(A + I_n)^2 = 0$$

הוכיחו כי A הפיכה.

פתרון:

נפתח סוגריים:

$$(A + I_n)^2 = (A + I_n)(A + I_n) = A^2 + A + A + I_2 = A^2 + 2A + I_2$$

אז:

$$A^2 + 2A = -I_2 \Rightarrow A(A + 2I_2) = -I_2 \Rightarrow A(-A - 2I_2) = I_2$$

אז:

$$A^{-1} = -A - 2I_2$$

תרגיל 9.1.6.

תהא $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ הפיכה, ותהא B מטריצה כך ש:

$$A^2 = B^2$$

הוכיחו כי B הפיכה.

פתרון:
נשים לב כי:

$$B^2(A^{-1})^2 = A^2(A^{-1})^2 = I_n$$

אז:

$$B(B(A^{-1})^2) = I_n$$

אז:

$$B^{-1} = B(A^{-1})^2$$

9.2 דטרמיננטות

תזכורת.

לכל מטריצה ריבועית $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ קיים מספר (סקלר) שנסמן $\det(A) = |A| \in \mathbb{F}$ (כמובן שכמעט תמיד נדבר על $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ או $\mathbb{C}$).
לפני שנראה כיצד מחשבים אותו, מספר תכונות חשובות הן:

1. A הפיכה אמ"מ $\det(A) \neq 0$.

2. כפליות הדטרמיננטה:

$$\det(AB) = \det(A)\det(B)$$

בפרט, אם A הפיכה אז:

$$\det(A^{-1})\det(A) = \det(A^{-1}A) = \det(I_n) = 1$$

אז:

$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$$

3. $$\det(A) = \det(A^t)$$

4. $$\det(\lambda A) = \lambda^n \det(A)$$

דוגמא 9.2.1.

חישוב דטרמיננטה נעשה באופן ריקורסיבי, ההגדרה המדויקת של דטרמיננטה נלמדה בהרצאות, אנו נראה דוגמאות בלבד.

נתחיל במקרה של 2×2, אם $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ אז:

$$\det(A) = ac - bd$$

למשל:

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = 1 \cdot 4 - 2 \cdot 3 = -2$$

אם A היא $n \times n$, נבחר שורה או עמודה, ואז לכל איבר בה, נסמן את המינור של איבר זה ע"י מחיקת השורה או עמודה שלו, המינורים מטריצות $(n-1) \times (n-1)$ ואז נחבר את הדטרמיננטות שלהן כפול האיבר המחוק תחת הסימן הבא:

$$\begin{pmatrix} + & - & + & \dots \\ - & + & - & \dots \\ + & - & + & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

למשל:

.1

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

אז נפתח על פי העמודה הראשונה:

$$\det(A) = (+1)\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} + (-2)\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$
$$= 2 - 3 - 2(2-1) + 3(3-1) = 3$$

.2

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

נבחר את העמודה השלישית ונפתח סביבה:

$$\det(A) = +3 \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

את $\det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ נחשב עפ"י השורה הראשונה:

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = 2 + 3 - 1 = 4$$

אז:

$$\det(A) = +3\det\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 3 & 1 & -1\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix} = 3\cdot 4 = 12$$

תרגיל 9.2.2.

האם מתקיים $\det(A+B)=\det(A)+\det(B)$?

פתרון:
לא, נראה דוגמא נגדית:

$$A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}, \qquad B=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$$

אז $\det(A)+\det(B)=2$, אבל:

$$\det(A+B)=\det\left(\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\right)=\det\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}=0$$

תרגיל 9.2.3.

מצאו עבור אילו $t\in\mathbb{R}$ המטריצה הבאה הפיכה?

$$A=\begin{pmatrix}1 & t & 3\\ t & 1 & 2\\ 0 & t & 4\end{pmatrix}$$

פתרון:
נחשב את $\det(A)$ בעזרת השורה הראשונה:

$$\det(A)=1\det\begin{pmatrix}1 & 2\\ t & 4\end{pmatrix}-t\det\begin{pmatrix}t & 3\\ t & 4\end{pmatrix}=4-2t-t(4t-3t)=-t^2-2t+4$$

כלומר, A לא הפיכה אמ"מ $-t^2-2t+4=0$ אמ"מ $t=\frac{-2\pm\sqrt{20}}{-2}$.

תרגיל 9.2.4.

תהא A_n מטריציה מסדר $n\times n$ עם 2 על האלכסון הראשי ו1 מתחת/מעל האלכסון הראשי:

$$A_1=(2)\,,\ A_2=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix},\ A_3=\begin{pmatrix}2 & 1 & 0\\ 1 & 2 & 1\\ 0 & 1 & 2\end{pmatrix},\ A_4=\begin{pmatrix}2 & 1 & 0 & 0\\ 1 & 2 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 2 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 2\end{pmatrix}$$

חשבו את $\det(A_n)$.

<u>פתרון:</u>
חישוב ישיר ייתן לנו כי:

$$\det(A_1) = 2, \quad \det(A_2) = 3, \quad \det(A_3) = 4$$

וננחש כי $\det(A_n) = n + 1$, נוכיח זאת באינדוקציה, נשים לב כי:

$$A_n = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 2 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & & & \\ \vdots & \vdots & & A_{n-2} & \\ 0 & 0 & & & \end{pmatrix}$$

כלומר:

$$\det(A_n) = 2\det(A_{n-1}) - \det(A_{n-2})$$

את מקרה הבסיס ראינו, יהא $n \geq 3$, ונניח כי לכל $m < n$ מתקיים:

$$\det A_m = m + 1$$

אז:

$$\det(A_n) = 2\det(A_{n-1}) - \det(A_{n-2}) = 2((n-1)+1) - ((n-2)+1) = 2n - (n-1) = n + 1$$

וסיימנו.

9.2.1 השפעת דירוג על דטרמיננטות

תזכורת.

תהא A מטריצה ריבועית, פעולות הדירוג משפיעות על $\det(A)$ בצורה הבאה:

1. החלפת שורה מכפילה את הדטרמיננטה ב-1.
2. הכפלת שורה ב$\lambda \in \mathbb{F}$ מכפילה את הדטרמיננטה בλ. לכן הכפלת המטריצה בסקלר מכפילה את הדטרמיננטה בסקלר בחזקת כמות
3. הוספת לשורה כל שורה אחרת כפול כל סקלר לא משנה את הדטרמיננטה.

בנוסף, אם A משולשת (עליונה או תחתונה) אז $\det(A)$ שווה למכפלת האיברים באלכסון.

הערה.

נשים לב כי מהתכונה השנייה אנו יכולים להסיק את תכונה 4 בתזכורת הקודמת, שהכפלת מטריצה $n \times n$ בסקלר λ מכפילה את כל הדטרמיננטה ב־λ^n.

תרגיל 9.2.5.

חשבו את

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 6 & 12 \\ 0 & 2 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 3 & 10 \end{pmatrix}$$

<u>פתרון:</u>

נבצע פעולות דירוג:

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 6 & 12 \\ 0 & 2 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 3 & 10 \end{pmatrix} = -\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 & 12 \\ 0 & 0 & 3 & 10 \end{pmatrix} = -2\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 3 & 10 \end{pmatrix}$$

$$= -2\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 3 & 10 \end{pmatrix} = -2\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = -2(1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4) = -48$$

9.2.2 כלל קרמר

תזכורת.

כלל קרמר תהא A מטריצה ריבועית הפיכה, ותהא מערכת המשוואות:

$$A\vec{x} = \vec{b}$$

נסמן ב $A_k^{\vec{b}}$ את המטריצה המתקבלת ע"י החלפת עמודה k בוקטור b, נגדיר:

$$d_k = \frac{\det(A_k^{\vec{b}})}{\det A}$$

אז $D = \begin{pmatrix} d_1 \\ \vdots \\ d_n \end{pmatrix}$ פתרון למערכת.

תרגיל 9.2.6.

פתרו את המשוואה:

$$\begin{cases} 2x + y - z = 3 \\ x + y + z = 1 \\ x - 2y - 3z = 4 \end{cases}$$

פתרון:

נכתוב כמטריצות:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

אז:

$$\det(A) = 5 \neq 0 \implies A \text{ הפיכה}$$

$$\det(A_1) = \det \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 4 & -2 & -3 \end{pmatrix} = 10 \implies d_1 = \frac{10}{5} = 2$$

$$\det(A_2) = \det \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 4 & -2 & -3 \end{pmatrix} = -5 \implies d_2 = \frac{-5}{5} = -1$$

$$\det(A_3) = \det \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 4 \end{pmatrix} = 0 \implies d_3 = \frac{0}{5} = 0$$

אז:

$$D = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

פתרון של המערכת.

תרגול עשירי

10.1 העתקות לינאריות

תזכורת.

יהיו V, W מרחבים וקטורים מעל אותו שדה $\mathbb{F}$. פונקציה $T : V \to W$ תקרא העתקה לינארית אם:

1.
$$\forall v_1, v_2 \in V, \quad T(v_1 + v_2) = T(v_1) + T(v_2)$$

2.
$$\forall \lambda \in \mathbb{F}, \quad v \in V, \quad T(\lambda v) = \lambda T(v)$$

או לחילופין:
$$\forall \lambda \in \mathbb{F}, \; v_1, v_2 \in V, \quad T(\lambda v_1 + v_2) = \lambda T(v_1) + T(v_2)$$

לקבוצת כל האיברים שנשלחים ל0 נקרא הגרעין של ההעתקה, ולאוסף כל האיברים שהתקבלו בW ע"י T נקרא התמונה של T, ונסמן:

$$\ker(T) = \{v \in V \mid T(v) = 0\} \subset V$$

$$\text{Im}(T) = \{T(v) \mid v \in V\} \subset W$$

הערה.

שימו ♡, ההעתקה מעבירה 0 ל0 ונגדי ולנגדי, כלומר:

$$\forall v \in V, \qquad T(-v) = -T(v), \qquad T(0) = 0$$

בפרט $0 \in \ker(T)$.

תרגיל 10.1.1.

עבור העתקות הבאות, בדקו האם מדובר בהעתקה לינארית, ואם כן מצאו את הגרעין והתמונה.

1.
$$T:\mathbb{R}^{2\times 2}\to\mathbb{R}^{2\times 2},\qquad \begin{pmatrix} a & b\\ c & d\end{pmatrix}\mapsto\begin{pmatrix} a & c+d\\ 1 & b\end{pmatrix}$$

2.
$$T:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^3,\qquad T(x)=\begin{pmatrix} x\\ x\\ x\end{pmatrix}$$

3.
$$T:\mathbb{R}^{2\times 2}\to\mathbb{R}^{2\times 2},\qquad A\mapsto A^2$$

4. עבור $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$ מטריצה מסדר 2×3 נגדיר את ההעתקה:
$$T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2,\qquad T(v)=Av$$

<u>פתרון:</u>

1. זו לא העתקה לינארית כי $T(0)\neq 0$.
2. ראשית נבדוק שזו העתקה לינארית. יהיו $\lambda\in\mathbb{F}, x_1,x_2\in\mathbb{R}$. נחשב:
$$T(\lambda x_1+x_2)=\begin{pmatrix}\lambda x_1+x_2\\ \lambda x_1+x_2\\ \lambda x_1+x_2\end{pmatrix}=\lambda\begin{pmatrix}x_1\\ x_1\\ x_1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}x_2\\ x_2\\ x_2\end{pmatrix}=\lambda T(x_1)+T(x_2)$$
נבדוק מהו הגרעין של ההעתקה. מהגדרה אנחנו מחפשים את כל ה $x\in\mathbb{R}$ כך ש:
$$\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}=T(x)=\begin{pmatrix}x\\ x\\ x\end{pmatrix}$$
וזה נכון רק עבור $x=0$, כלומר הגרעין של T הוא $\{0\}$. נחשב את התמונה:
$$\mathrm{Im}(T)=\{T(x)\mid x\in\mathbb{R}\}=\left\{\begin{pmatrix}x\\ x\\ x\end{pmatrix}\middle| x\in\mathbb{R}\right\}=\left\{x\begin{pmatrix}1\\ 1\\ 1\end{pmatrix}\middle| x\in\mathbb{R}\right\}=\mathrm{span}\left\{\begin{pmatrix}1\\ 1\\ 1\end{pmatrix}\right\}$$
3. זו לא העתקה לינארית, כי אין לינאריות בכפל בסקלר:
$$\begin{aligned}T(2I)&=4I^2=4I\\ 2T(I)&=2I^2=2I\end{aligned}$$

4. נבחין כי כפל מטריצות הוא לינארי, ולכן בפרט גם כפל מטריצה בוקטור לינארי, כלומר:

$$\forall \lambda \in \mathbb{F},\ v_1, v_2 \in V \quad T(\lambda v_1 + v_2) = A(\lambda v_1 + v_2) = \lambda A v_1 + A v_2 = \lambda T(v_1) + T(v_2)$$

נבדוק מהו הגרעין של ההעתקה. מהגדרה אנחנו מחפשים את כל ה $x \in \mathbb{R}$ כך ש:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 = T\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 + 2\lambda_2 + 3\lambda_3 \\ \lambda_3 \end{pmatrix}$$

זו ממ"ל שהפתרון שלה הוא:

$$\lambda_3 = 0, \lambda_1 = -2\lambda_2$$

כלומר:

$$\text{ker}(T) = \left\{ \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix} \middle| \lambda_1 = -2\lambda_2,\ \lambda_3 = 0 \right\}$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} -2\mu \\ \mu \\ 0 \end{pmatrix} \middle| \mu \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \mu \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \middle| \mu \in \mathbb{R} \right\} = \text{span}\left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

נרצה לראות שהתמונה של ההעתקה היא $\mathbb{R}^2$, כלומר שלכל $a, b \in \mathbb{R}$ קיימים $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ כך ש:

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 + 2\lambda_2 + 3\lambda_3 \\ \lambda_3 \end{pmatrix} = T\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

זו ממ"ל במשתנים $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ שנוכל לפתור ע"י דירוג מטריצת המקדמים המורחבת, או שנבחין כי $\lambda_1 = a - 3b, \lambda_2 = 0, \lambda_3 = b$ הוא פתרון של המערכת.

תזכורת.

תהא $T : V \to W$ העתקה לינארית, אז:

1. $\text{ker}\, T$ תמ"ו של V.
2. $\text{Im}\, T$ תמ"ו של W.
3. אם $S = \{v_1, ..., v_n\}$ קבוצה פורשת של V אז:

$$T(\lambda_1 v_1 + ... + \lambda_n v_n) = \lambda_1 T(v_1) + ... + \lambda_n T(v_n)$$

כלומר, $T(v_1), ..., T(V_n)$ פורשת את $\text{Im}\, T$, במילים אחרות:

$$\text{Im}\, T = \text{span}(T(v_1), ..., T(V_n))$$

בד"כ נבחר בסיס של V בתור קבוצה פורשת.

תרגיל 10.1.2.

בדקו האם T העתקה לינארית, אם כן מצאו את $\ker T, \operatorname{Im} T$.

1.
$$T:\mathbb{R}_3[x]\to\mathbb{R}_6[x]$$
$$T(a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0)=a_3x^6+a_2x^5+a_0x$$

2.
$$T:\mathbb{R}^{n\times n}\to\mathbb{R}^{n\times n},\qquad T(A)=A^t$$

3.
$$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\qquad f(x)=\cos(x)$$

4.
$$f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2,\qquad f\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2x+y\\x+y+z\end{pmatrix}$$

5.
$$f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2,\qquad f\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x+y\\|x+y|\end{pmatrix}$$

6.
$$T:\mathbb{R}^{2\times 2}\to\mathbb{R},\qquad T(A)=\det A$$

<u>פתרון:</u>

1.
$$T:\mathbb{R}_3[x]\to\mathbb{R}_6[x]$$
$$T(a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0)=a_3x^6+a_2x^5+a_0x$$

בדיקה מהירה תראה כי אכן מדובר בהעתקה לינארית:
$$T(\lambda p(x)+q(x))=\lambda T(p(x))+T(q(x))$$

ומתקיים:
$$0=T(a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0)=a_3x^6+a_2x^5+a_0x \iff a_3=a_2=a_0=0$$

כלומר:
$$\ker T=\operatorname{span}(x)$$

ומתקיים:
$$\operatorname{Im} T=\operatorname{span}(T(x^3),T(x^2),T(x),T(1))=\operatorname{span}(x^6,x^5,x)$$

2. ליניאריות כמעט מיידית:

$$T(\lambda A+B)=(\lambda A+B)^t=(\lambda A)^t+B^t=\lambda A^t+B^t=\lambda T(A)+T(B)$$

וגם:

$$A^t=0 \iff A=0$$

כלומר $\ker T=\{0\}$.
ו$\operatorname{Im} T=\mathbb{R}^{n\times n}$ כי לכל $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$ מתקיים:

$$T(A^t)=A$$

3. f לא לינארית כי $f(0)=1\neq 0$.
4. היא לינארית כי:

$$f\left(\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}\right)=f\left(\begin{pmatrix}x+\lambda a\\y+\lambda b\\z+\lambda c\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}2(x+\lambda a)+y+\lambda b\\ \\x+y+z+\lambda a+\lambda b+\lambda c\end{pmatrix}$$

$$=f\left(\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\right)+\lambda f\left(\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}\right)$$

נבדוק גרעין:

$$f\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2x+y\\x+y+z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\Rightarrow\left\{x+y+z=0\quad\Rightarrow z=x=-\frac{1}{2}y\right.$$

כלומר:

$$\ker T=\text{span}\begin{pmatrix}1\\-\frac{1}{2}\\1\end{pmatrix}$$

וכמובן כי:

$$T\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix},\qquad T\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$$

בסיס ל $\mathbb{R}^2$, אז $\operatorname{Im} T=\mathbb{R}^2$.

5. נראה כי f אינה לינארית:

$$T\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}$$

אבל:

$$T\left(-1\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right)=T\begin{pmatrix}-1\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\\2\end{pmatrix}\neq-1\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}$$

6. T אינה לינארית כי:

$$T(2I)=4\neq 2T(I)=2$$

תרגיל 10.1.3.

תהא $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ התעקה לינארית עם:

$$\ker T=\text{span}\left\{\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}\right\}$$

יהא $a\in\mathbb{R}$ כך ש:

$$T\begin{pmatrix}2\\3\\a\end{pmatrix}=T\begin{pmatrix}1\\3\\2\end{pmatrix}$$

מצאו את a.

<u>פתרון:</u>
נשים לב כי:

$$T\begin{pmatrix}1\\3\\2\end{pmatrix}=T\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}+T\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}=0+0=0$$

כלומר $T\begin{pmatrix}2\\3\\a\end{pmatrix}=0$ כלומר $\begin{pmatrix}2\\3\\a\end{pmatrix}\in\ker T$ כלומר:

$$\begin{pmatrix}2\\3\\a\end{pmatrix}\in\text{span}\left\{\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}\right\}$$

כלומר:

$$\begin{pmatrix}2\\3\\a\end{pmatrix}=\lambda_1\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}+\lambda_2\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$$

בהכרח $\lambda_1=2$ לכן בהכרח $\lambda_2=-1$ ולכן $a=2-1=1$.

10.1.1 בניית העתקות לינאריות

תזכורת.

אם $B=\{v_i\}_{i=1}^n$ בסיס ל V, אז לכל $w_1,...,w_n\in W$, קיימת העתקה לינארית יחידה המקיימת:

$$T(v_1)=w_1,....,T(v_n)=w_n$$

תרגיל 10.1.4.

מצאו העתקה לינארית $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^4$ המקיימת

$$\ker T=\operatorname{span}\left(\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right).\qquad \operatorname{Im}T=\operatorname{span}\left(\begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}\right)$$

<u>פתרון:</u>

נשלים את $f_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ לבסיס של $\mathbb{R}^3$, למשל על ידי:

$$f_2=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},f_3=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$$

ונגדיר:

$$T(f_1)=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix},T(f_2)=\begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix},T(f_3)=\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}$$

וסיימנו! אנחנו יודעים שקיימת העתקה יחידה שמקיימת זאת, והיא תקיים את הנדרש:

$$T(af_1+bf_1+cf_3)=aT(f_1)+bT(f_2)+cT(f_3)=b\begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix}+c\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}$$

ולכן מתקיים הנדרש (מודע?).
נשים לב כי זאת לא העתקה היחידה שמקיימת זאת, וזה בא לידי ביטוי בבחירת הבסיס.

תרגיל 10.1.5.

האם קיימת העתקה לינארית $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}_2[x]$ כך ש:

$$T\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}=3x^2+3,\qquad T\begin{pmatrix}0\\2\\0\end{pmatrix}=5x,\qquad T\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}=x^2+x+1$$

אם כן מצאו את $\ker T,\operatorname{Im}T$.

<u>פתרון:</u>
דבר ראשון, אנו יודעים שאם v_1,v_2,v_3 בסיס ל$\mathbb{R}^3$ אז קיימת העתקה כזאת. ואנו יודעים שהוקטורים האלה בסיס אמ"מ הם בת"ל, נבדוק זאת:

$$\lambda_1\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}+\lambda_2\begin{pmatrix}0\\2\\0\end{pmatrix}+\lambda_3\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda_1+\lambda_3\\2\lambda_1+2\lambda_2+\lambda_3\\3\lambda_1+2\lambda_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

מהמשוואה הראשונה והשלישית $\lambda_1=\lambda_3=0$ אז מהמשוואה השנייה $\lambda_2=0$, כלומר הווקטורים בת"ל ולכן קיימת התעקה כזאת.
נשים לב כי $3x^2+3,5x,x^2+x+1$ קבוצה בת"ל (נשאיר זאת כתרגיל) ולכן משיקולי מימד בסיס של $\mathbb{R}_2[x]$ ולכן $\operatorname{Im}T=\mathbb{R}_2[x]$ וגם $\ker T=\{0\}$.

תרגיל 10.1.6.

האם קיימת העתקה לינארית $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2$ כך ש:

$$T\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix},\quad T\begin{pmatrix}0\\2\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix},\quad T\begin{pmatrix}-5\\0\\-15\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\5\end{pmatrix}$$

אם כן מצאו את $\ker T,\operatorname{Im}T$.

<u>פתרון:</u>
נשים לב כי:

$$\begin{pmatrix}-5\\0\\-15\end{pmatrix}=-5\left(\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0\\2\\0\end{pmatrix}\right)$$

אז אם הייתה קיימת העתקה כזאת, אז מלינאריות:

$$T\begin{pmatrix}-5\\0\\-15\end{pmatrix}=T\left(-5\left(\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0\\2\\0\end{pmatrix}\right)\right)=-5T\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}+5T\begin{pmatrix}0\\2\\0\end{pmatrix}=-5\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}+5\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\\5\end{pmatrix}$$

אבל, עפ"י הנתון מתקיים:

$$T\begin{pmatrix}-5\\0\\-15\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\5\end{pmatrix}$$

אז לא קיימת העתקה לינארית כזאת.

10.1.2 משפט המימדים של העתקות לינאריות

תזכורת.

יהיו V,W מרחבים וקטורים נוצרים סופית מעל שדה $\mathbb{F}$, ו$T:V\to W$ העתקה לינארית, אז:

$$\dim(\ker(T))+\dim(\operatorname{Im}(T))=\dim(V)$$

הערה.

מקרה פרטי של משפט המימדים, בו נשתמש הרבה הוא במקרה ש:

$$\dim W=\dim V$$

ואז:

$$\operatorname{Im}T=W \iff \ker(T)=\{0\}$$

תרגיל 10.1.7.

תהא העתקה:

$$T:\mathbb{R}_{10}[x]\to\mathbb{R}_9[x],\qquad T(p(x))=p'(x)$$

הוכיחו כי T לינארית, ומצאו את $\ker T,\operatorname{Im}T$.

<u>פתרון:</u>
לינאריות מתקבלת מיידית מחוקי גזירה:

$$(p(x)+\lambda q(x))'=p'(x)+\lambda q'(x)$$

עוד חוק מחדו"א שיעזור לנו הוא ש:

$$p'(x)=0 \iff p(x)=c,\quad c\in\mathbb{R}$$

כלומר:

$$\ker T=\{c\in\mathbb{R}_{10}[x]|c\in\mathbb{R}\}=\operatorname{span}(1)$$

שזה מרחב ממימד 1, אז ממשפט המימדים:

$$\dim\operatorname{Im}T=\dim\mathbb{R}_{10}[x]-\dim\ker T=11-1=10$$

אז $\operatorname{Im} T$ תמ"ו של מרחב ממימד 10 ממימד 10, ולכן הוא כל $\mathbb{R}_9[x]$.

10.2 ווקטורי קאורדינטות

תזכורת.

אם V מ"ו ממימד n מעל שדה $\mathbb{F}$, עם בסיס סדור $B = (v_1, .., v_n)$ כלומר אנו מקבעים את אברי הבסיס, אז קיימת העתקה:

$$T : V \to \mathbb{F}^n, \qquad v = \lambda_1 v_1 + ... + \lambda_n v_n \mapsto \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}$$

העתקה הזאת לינארית:

$$v = \lambda_1 v_1 + ... + \lambda_n v_n, \quad w = \eta_1 v_1 + ... + \eta_n v_n, \quad \kappa \in \mathbb{F}$$

אז:

$$T(v + \kappa w) = \begin{pmatrix} \lambda_1 + \kappa\eta_1 \\ \vdots \\ \lambda_n + \kappa\eta_n \end{pmatrix} = T(v) + \kappa T(w)$$

והיא איזומורפיזם, כלומר $\operatorname{Im} T = \mathbb{F}^n$, $\ker T = \{0\}$, היא תלויה בבסיס הסדור B. ונסמן $[v]_B = T(v)$.
מסקנה מאוד חשובה מהמשפט הזה היא שכל מרחב וקטורי ממימד n מעל שדה $\mathbb{F}$ איזומורפי ל $\mathbb{F}^n$.

תרגיל 10.2.1.

יהיו זוג בסיסים סדורים (אין צורך לבדוק כי אכן מדובר בבסיסים) של מרחב הפולינומים עד מעלה 2:

$$B_1 = (1, 1 + x, 1 + x^2)\,, \qquad B_2 = (2, 4x, 8x^2)$$

יהא $p(x) = 1 + x + x^2$, מצאו את $[p(x)]_{B_1}, [p(x)]_{B_2}$.

פתרון:
עבור כל בסיס ננסה לכתוב את $p(x)$ בתור צ"ל של אברי הבסיס, כמובן שמשום שמדובר בבסיס יש דרך יחידה לכך.

$$p(x) = 1 + x + x^2 = 1 + x^2 + (1 + x) - 1 \implies [p(x)]_{B_1} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$p(x) = 1 + x + x^2 = \frac{1}{2} \cdot 2 + \frac{1}{4} \cdot 4x + \frac{1}{8} \cdot 8x^2 \implies [p(x)]_{B_2} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} \\ \frac{1}{8} \end{pmatrix}$$

10.3 מטריצה מייצגת של העתקה לינארית

תזכורת.

יהא $B=(v_1,...,v_n)$ בסיס סדור של מ"ו V מעל $\mathbb{F}$, ותהא $T:V\to V$ העתקה לינארית. אז קיימת מטריצה $[T]_B\in\mathbb{F}^{n\times n}$, המוגדרת על ידי:

$$[T]_B=\begin{pmatrix} | & & | \\ [T(v_1)]_B & \dots & [T(v_n)]_B \\ | & & | \end{pmatrix}$$

המקיימת:

$$[T(v)]_B=[T]_B[v]_B$$

לכל $v\in V$.

תרגיל 10.3.1.

יהא $B=\left(\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right)$ בסיס ל $\mathbb{R}^3$ (אין צורך לבדוק שמדובר בבסיס).

יהא $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ העתקה לינארית:

$$T\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x+y+z\\5z+x\\x+z\end{pmatrix}$$

מצאו את $[T]_B$ והשתמשו בו למצוא את $T\begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix}$.

<u>פתרון:</u>

נחשב ישירות:

$$T\left(\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}3\\6\\2\end{pmatrix}=2\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}+4\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}-3\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\implies[T(v_1)]_B=\begin{pmatrix}2\\4\\-3\end{pmatrix}$$

$$T\left(\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}=1\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}+0\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}+1\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\implies[T(v_2)]_B=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$$

$$T\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}21\\1\\1\end{pmatrix}=1\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}+0\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}+0\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\implies[T(v_3)]_B=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$$

כלומר:

$$[T]_B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

נשים לב כי:

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}\right]_B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

אז:

$$\left[T\left(\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right)\right]_B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$$

אז:

$$T\left(\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = 4\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 4\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \\ 4 \end{pmatrix}$$

תרגיל 10.3.2.

מצאו את $[T]_E$ עבור:

$$T : \mathbb{R}_3[x] \to \mathbb{R}_3[x], \qquad T(p(x)) = p'(x)$$

עם $E = (1, x, x^2, x^3)$ הבסיס הסטנדרטי ובעזרתו חשבו את $(x^2 + 3x + 1)'$.

פתרון:
עלפי הגדרה:

$$[T]_E = \begin{pmatrix} | & | & | & | \\ [T(1)]_E & [T(x)]_E & [T(x^2)]_E & [T(x^3)]_E \\ | & | & | & | \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} | & | & | & | \\ [0]_E & [1]_E & [2x]_E & [3x^2]_E \\ | & | & | & | \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

אז:

$$[T\left(x^2 + 3x + 1\right)]_E = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}[x^2 + 3x + 1]_E = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

כלומר:

$$T\left(x^2 + 3x + 1\right) = 3(1) + 2(x) + 0(x^2) + 0(x^3) = 2x + 3$$

תרגיל 10.3.3.

תהא $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ העתקה לינארית, ויהא:

$$B=\left(\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\3\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\10\\100\end{pmatrix}\right)$$

בסיס סדור של $\mathbb{R}^3$, כך ש:

$$[T]_B=\begin{pmatrix}3&0&0\\1&1&1\\4&1&1\end{pmatrix}$$

מצאו את $\text{ker}\,T,\text{Im}\,T$.

<u>פתרון:</u>
נתחיל מהרגעין, אם $Tv=0$, אז $[Tv]_B=0$ ולכן $[T]_B[v]_B=0$, כלומר $[v]_B$ פתרון של $[T]_Bx=0$, כלומר:

$$\begin{pmatrix}3&0&0\\1&1&1\\4&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda_1\\\lambda_2\\\lambda_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\lambda_1\\\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3\\4\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

כלומר:

$$\lambda_1=0,\quad \lambda_2=t,\quad \lambda_3=-t$$

כלומר:

$$\text{ker}\,T=\left\{t\begin{pmatrix}1\\3\\2\end{pmatrix}-t\begin{pmatrix}1\\10\\100\end{pmatrix}\middle|t\in\mathbb{R}\right\}=\left\{\begin{pmatrix}0\\-7t\\-98t\end{pmatrix}\middle|t\in\mathbb{R}\right\}=\text{span}\begin{pmatrix}0\\-7\\-98\end{pmatrix}$$

על מנת למצוא את $\text{Im}\,T$, נזכר שראינו בהרצאה כי $w\in\text{Col}(A)\iff w=Av$, כלומר התמונה של T היא העמודות של $[T]_B$:

$$\text{Im}\,T=\text{span}\left\{\left[\begin{pmatrix}3\\1\\4\end{pmatrix}\right]_B,\left[\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}\right]_B,\left[\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}\right]_B\right\}=\text{span}\left\{\left[\begin{pmatrix}3\\1\\4\end{pmatrix}\right]_B,\left[\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}\right]_B\right\}$$

$$=\text{span}\left\{3\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\3\\2\end{pmatrix}+4\begin{pmatrix}1\\10\\100\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\3\\2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\10\\100\end{pmatrix}\right\}=\text{span}\left\{\begin{pmatrix}8\\49\\411\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\13\\102\end{pmatrix}\right\}$$

תרגול אחד עשרה

11.1 מטריצה מייצגת של העתקה לינארית - המשך

תזכורת.

נזכיר את ההגדרה של מטריצה מייצגת של העתקה לינארית $T:V\to V$, עבור V מ"ו עם בסיס סדור $B=(v_1,...,v_n)$:

$$[T]_B=\begin{pmatrix} | & & | \\ [T(v_1)]_B & \cdots & [T(v_n)]_B \\ | & & | \end{pmatrix}$$

והיא מקיימת:

$$\forall v\in V,\qquad [T(v)]_B=[T]_B[v]_B$$

טענה (ללא הוכחה) 11.1.1.

יהי V מרחב וקטורי מעל $\mathbb{F}$ עם בסיס סדור $B=(v_1,...,v_n)$, ויהיו 2 העתקות לינאריות $T,S:V\to V$. מתקיים:

1. $[T]_B[S]_B=[T\circ S]_B$
2. $\forall n\in\mathbb{N},\ [T^n]_B=[T]_B^n$

תרגיל 11.1.2.

תהיי העתקה לינארית $T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2, T(x,y)=(x+y,x)$. חשבו את T^4.

פתרון:
נחשב את המטריצה המייצגת של T לפי הבסיס הסטנדרטי של R^2, ואז נשתמש בטענה שהוזכרה למעלה כדי לקבל את המטריצה המייצגת של T^4, משם נסיק את T^4.
נזכר כי הבסיס הסטנדרטי הוא:

$$E:=\left(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right)$$

מתקיים:

$$T(1,0)=(1+0,1)=(1,1)=(1,0)+(0,1)\quad;\quad T(0,1)=(0+1,0)=(1,0)$$

מהגדרה:

$$[T(e_1)]_E = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad ; \quad [T(e_2)]_E = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

לכן, המטריצה המייצגת הינה:

$$[T]_E = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

ולכן:

$$[T^4]_E = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^4 = ... = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

לכל $v \in \mathbb{R}^2$ מתקיים:

$$[T^4(v)]_E = [T^4]_E[v]_E = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5x+3y \\ 3x+2y \end{pmatrix}$$

ומכך שזהו הבסיס הסטנדרטי:

$$T^4 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5x+3y \\ 3x+2y \end{pmatrix}$$

תרגיל 11.1.3.

תהיינה $T, S : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ שתי העתקות לינאריות כך ש:

$$T(x, y) := (3x+2y, 2x+y) \quad ; \quad S(x, y) := (x+y, x)$$

הוכיחו כי העתקות מתחלפות, כלומר: $TS = ST$.

<u>פתרון:</u>
ראשית, נראה כי המטריצות המייצגות שלהן לפי הבסיס הסטנדרטי מתחלפות.
מתקיים:

$$[T]_E = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad ; \quad [S]_E = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

ועבורן:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

לכן, מתקיים:

$$[TS]_E = [T]_E[S]_E = [S]_E[T]_E = [ST]_E$$

ומכך שהמטריצות המייצגות לפי אותו הבסיס שוות זו לזו, מתקיים:

$$TS = ST$$

כרצוי.

11.2 מטריצות מעבר בסיס

תזכורת.

יהא V מ"ו מעל שדה $\mathbb{F}$ ממימד n, ויהיו $B = \{v_1, ...v_n\}, C = \{w_1, ..., w_n\}$ שני בסיסים סדורים, נגדיר את המטריצה:

$$P_{B\to C} = \begin{pmatrix} | & \dots & | \\ [v_1]_C & \dots & [v_n]_C \\ | & \dots & | \end{pmatrix}$$

מטריצת מעבר בסיס מבסיס B לבסיס C.

2 תכונות חשובות של מטריצה זאת הן:

1. לכל $v \in V$ מתקיים:
$$[v]_C = (P_{B\to C})[v]_B$$

2. $P_{B\to C}$ הפיכה ומתקיים:
$$P^{-1}_{B\to C} = P_{C\to B}$$

כל העתקה לינארית $T : V \to V$ מקיימת:

$$[T]_C = P_{B\to C}[T]_B P_{C\to B} = P^{-1}_{C\to B}[T]_B P_{C\to B}$$

תרגיל 11.2.1.

יהיו $B_1 := (2 + 3x, 1 + x), B_2 = (1 + x, 1 + 3x)$ שני בסיסים של $\mathbb{R}_1[x]$ (אין צורך להוכיח שהם בסיסים). חשבו את מטריצת המעבר מהבסיס הראשון לשני $P_{B_1\to B_2}$.

פתרון:

נחשב את ההקורדינטות של איברי הבסיס B_1 לפי הבסיס B_2 כלומר נמצא את:

$$[2 + 3x]_{B_2}, [1 + x]_{B_2}$$

נרצה לפתור את המשוואה (ולמצוא את המקדמים של הצירוף הלינארי):

$$2 + 3x = \kappa_1(1 + x) + \kappa_2(1 + 3x) = (3\kappa_2 + \kappa_1)x + (\kappa_1 + \kappa_2)$$

וזה מתאים לממ"ל:

$$\begin{cases} 3\kappa_2 + \kappa_1 = 3 \\ \kappa_2 + \kappa_1 = 2 \end{cases}$$

ולה יש פתרון עבור $\kappa_1 = \frac{3}{2}, \kappa_2 = \frac{1}{2}$. כלומר:

$$[2 + 3x]_{B_2} = \begin{pmatrix} \kappa_1 \\ \kappa_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

עבור האיבר השני בבסיס מתקיים:

$$1+x = 1(1+x) + 0(1+3x)$$

לכן:

$$[1+x]_{B_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

כלומר מטריצת המעבר היא:

$$P_{B_1 \to B_2} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & 1 \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

11.3 דמיון מטריצות

תזכורת.

מטריצות $A, B \in \mathbb{F}^{n\times n}$ נקראות דומות אם קיימת מטריצה $P \in \mathbb{F}^{n\times n}$ כך ש:

$$A = P^{-1}BP$$

אם A, B דומות מתקיים:

1. $$\text{det}(A) = \text{det}(B)$$

2. $$\text{trace}(A) = \text{trace}(B)$$

3. $$\text{rank}(A) = \text{rank}(B)$$

תרגיל 11.3.1.

יהיו $A, B \in \mathbb{F}^{n\times n}$ מטריצות הוכיחו או הפריכו:

1. אם A, B דומות אז לכל $n \in \mathbb{N}$ המטריצות A^n, B^n דומות.
2. אם קיים $n \in \mathbb{N}$ כך שהמטריצות A^n, B^n אז המטריצות A, B דומות.

פתרון:
ראשית נוכיח את 1. מהגדרה, קיימת מטריצה P כך ש:

$$B = P^{-1}AP$$

נשים לב כי מתקיים לכל $n \in \mathbb{N}$:

$$B^n = (P^{-1}AP)^n = (P^{-1}AP) \cdot ... \cdot (P^{-1}AP) =$$

$$= P^{-1}A(P \cdot P^{-1})AP \cdot ... \cdot P^{-1}A(P \cdot P^{-1})AP = P^{-1}AIAI \cdot ... \cdot IAP = P^{-1}A^nP$$

ולכן לפי ההגדרה הן דומות.

פתרון שגוי ל2:
ננסה להוכיח את 2. מההגדרה קיימת Q מטריצה כך ש:

$$A^n = Q^{-1}B^nQ = Q^{-1}BIBI...IBQ = Q^{-1}B(QQ^{-1})B(QQ^{-1})...(QQ^{-1})BQ =$$

$$= (Q^{-1}BQ)Q^{-1})...(Q^{-1}BQ) = (Q^{-1}BQ)^n$$

אז היינו רוצים להגיד כי:

$$A^n = (Q^{-1}BQ)^n \Rightarrow A = Q^{-1}BQ$$

<u>אבל זה שגוי!</u>
מדוע הפתרון שגוי? אי אפשר "להוציא שורש" למטריצות, כלומר $A^n = B^n$ לא גורר $A = B$!
פתרון אמיתי ל2:
למעשה, זו הפרכה. נתבונן במטריצות:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -I_2 \quad ; \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$$

מתקיים עבור n זוגי, לדוגמה $n = 2$:

$$A^2 = I_2 = B^2$$

ובפרט הן דומות (כל מטריצה דומה לעצמה), אבל A, B לא דומות זו לזו. נניח בשלילה שהן כן, כלומר שקיימת Q כך ש:

$$I_2 = Q^{-1}(-I_2)Q = -Q^{-1}Q = -I_2$$

וזו סתירה.

11.4 ערכים ווקטורים עצמיים

תזכורת.

תהא $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ מטריצה ריבועית, הזוג $\lambda \in \mathbb{F}$, $0 \neq v_\lambda \in \mathbb{F}^n$ נקראים <u>ווקטור וערך עצמי</u> אם מתקיים:

$$Av_\lambda = \lambda v_\lambda$$

או באופן שקול:

$$(A - \lambda I)v_\lambda = 0$$

לכל ע"ע נגדיר את המרחב העצמי:

$$V_\lambda := \ker(A - \lambda v) = \{v \in V | Av = \lambda v\}$$

נקרא ל $\dim V_\lambda$ הריבוי הגיאומטרי של λ.
נסמן ב$p_A(\lambda)$ את הפולינום האופייני של A:

$$p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I)$$

זהו פולינום בλ, η ע"ע של A אמ"מ $p_A(\eta) = 0$, כלומר η שורש של $p_A(\lambda)$, לריבוי של η כשורש של $p_A(\lambda)$ נקרא הריבוי האלגברי של η.

דוגמא 11.4.1.

תהא $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, נחשב את הפולינום האופייני של A:

$$A - \lambda I = \begin{pmatrix} 2-\lambda & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2-\lambda & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1-\lambda \end{pmatrix}$$

זוהי מטריצה משולשת עליונה אז:

$$\det(A - \lambda I) = (2-\lambda)^2(1-\lambda)^2$$

כלומר $\lambda = 1$ ע"ע מר"א 2, ו$\lambda = 2$ ע"ע מר"א 2.
נבדוק ר"ג של $\lambda = 1$:

$$A - 1I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

אז הוקטורים העצמיים הם הוקטורים המקיימים:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x + y = 0 \\ -2x - y = 0 \end{cases}$$

כלומר $x = y = 0, z = s, w = t$, אז:

$$V_1 = \text{span}\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

נבדוק ר"ג של $\lambda = 2$:

$$A - 2I = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

אז:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ -2x - y - z = 0 \\ w = 0 \end{cases}$$

כלומר, $x = w = 0, y = s, z = -s$, אז:

$$V_2 = \text{span}\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

11.5 לכסון מטריצות

תזכורת.

תהא $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$, אז קבוצה של ו"ע של ע"ע שונה היא בת"ל, אז אם לA ע"ע $\lambda_1, ..., \lambda_m$, ונבחר לכל λ_j בסיס B_j ל V_{λ_j}, אז הקבוצה:

$$B = \bigcup_{j=1}^{m} B_j$$

קבוצה בת"ל, בפרט אם בקבוצה הזאת n וקטורים אז היא בסיס ל$\mathbb{F}^n$, ונקרא בסיס מלכסן, תכף נחזור לשם הזה, אבל קודם מתי בקבוצה זאת יהיו n וקטורים?
הפ"א הוא פולינום מדרגה n, אז מהמשפט היסודי של האלגברה יש לו לכל היותר n שורשים, כלומר סכום כל הר"א הוא n, ראינו בהרצה כי לכל ע"ע הר"ג $\leq$ מהר"א, אז כל הדיון הזה מביא אותנו לעובדה הבאה: למטריצה A קיים בסיס מלכסן אמ"מ לפ"א קיימים n שורשים - כולל ריבויים, ולכל ע"ע מתקיים ר"ג $=$ ר"א.
נניח כי לA יש בסיס מלכסן $B = \{v_1, ..., v_n\}$, אז לכל וקטור בבסיס קיים ע"ע λ, כלומר $Av = \lambda v$, זה בסיס שמאוד נוח לעבוד אותו, ונרצה להעביר את A לבסיס הזה, בו A תהיה מטריצה אלכסונית כלומר, אם לA קיים בסיס מלכסן נקרא לA לכסינה ואם נסמן $P = \begin{pmatrix} | & ... & | \\ v_1 & ... & v_n \\ | & ... & | \end{pmatrix}$ את מטריצת המעבר בסיס בין הבסיס הסטנדרטי למלכסן, אז:

$$D = P^{-1}AP$$

כאשר D מטריצה אלכסונית:

$$D = \text{diag}(\lambda_1, ..., \lambda_n) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & ... & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & ... & \lambda_n \end{pmatrix}$$

תרגיל 11.5.1.

תהא:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

מצאו את הצורה האלכסונית D של A, ואת P כך ש:

$$D = P^{-1}AP$$

ולאחר מכן חשבו את A^{2024}.

<u>פתרון:</u>
ראשית נמצא את הפ"א:

$$\begin{aligned} \text{det}(A - \lambda I) &= \text{det} \begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2-\lambda \end{pmatrix} \\ &= (1-\lambda)\,\text{det} \begin{pmatrix} 3-\lambda & 0 & 0 \\ -2 & 1-\lambda & 0 \\ 1 & 1 & 2-\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda)(3-\lambda) \begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 \\ 1 & 2-\lambda \end{pmatrix} \\ &= (1-\lambda)^2(2-\lambda)(3-\lambda) \end{aligned}$$

אז 1 ע"ע מר"א 2 ו $2, 3$ ע"ע מר"א 1.
נמצא ו"ע:

1. עבור $\lambda = 1$:

$$A - I = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

ישר נראה כי:

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

פתרון של הממ"ל $(A-I)x=0$, ולכן ו"ע של $\lambda=1$, והתבוננות נוספת תראה כי:

$$v_2=\begin{pmatrix}0\\0\\1\\-1\end{pmatrix}$$

גם ו"ע של $\lambda=1$, אז הר"ג של 1 הוא 2, אז אנו כבר יודעים כי A הפיכה.

2. עבור $\lambda=2$:

$$A-2I=\begin{pmatrix}-1&2&0&0\\0&1&0&0\\0&-2&-1&0\\0&1&1&0\end{pmatrix}$$

ישר נראה כי $v_3=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}$ ו"ע של $\lambda=2$.

בגלל שהר"א של $\lambda=2$ הוא 1, אנו יודעים כי זהו הו"ע היחיד של $\lambda=2$.

3.

$$A-3I=\begin{pmatrix}-2&2&0&0\\0&0&0&0\\0&-2&-2&0\\0&1&1&-1\end{pmatrix}$$

פה קצת קשה (אבל לא לא אפשרי) לראות ישר את הפתרון, אז נציב:

$$\begin{pmatrix}-2&2&0&0\\0&0&0&0\\0&-2&-2&0\\0&1&1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\b\\c\\d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2a+2b\\0\\-2b-2c\\b+c-d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}$$

מכיוון שאני יודעים שהר"ג הוא 1, אז מרחב הפתרונות נפרש ע"י וקטור יחיד, אז מספיק למצוא פתרון כלשהו שהוא לא פתרון האפס, ואכן:

$$a=1,b=1,c=-1,d=0,\qquad v_4=\begin{pmatrix}1\\1\\-1\\0\end{pmatrix}$$

אז סה"כ:

$$P=\begin{pmatrix}|&|&|&|\\v_1&v_2&v_3&v_4\\|&|&|&|\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0&1\\0&0&0&1\\0&1&0&-1\\0&-1&1&0\end{pmatrix}$$

והמטריצה האלכסונית היא:

$$D=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&2&0\\0&0&0&3\end{pmatrix}$$

כלומר:

$$\underbrace{\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&2&0\\0&0&0&3\end{pmatrix}}_{D}=\underbrace{\begin{pmatrix}1&0&0&1\\0&0&0&1\\0&1&0&-1\\0&-1&1&0\end{pmatrix}^{-1}}_{P^{-1}}\underbrace{\begin{pmatrix}1&2&0&0\\0&3&0&0\\0&-2&1&0\\0&1&1&2\end{pmatrix}}_{A}\underbrace{\begin{pmatrix}1&0&0&1\\0&0&0&1\\0&1&0&-1\\0&-1&1&0\end{pmatrix}}_{P}$$

ולבסוף, מתקיים:

$$D^{2024}=(P^{-1}AP)^{2024}=P^{-1}A^{2024}P\Rightarrow A^{2024}=PD^{2024}P^{-1}$$

כאשר המעבר השני הוא טענה חשובה שראינו בהרצאה (וגם בתרגיל היום) ש:

$$(P^{-1}XP)^n=P^{-1}X^nP$$

בנוסף, קל לחשב חזקה של מטריצה אלכסונית:

$$D^{2024}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&2^{2024}&0\\0&0&0&3^{2024}\end{pmatrix}\Rightarrow A^{2024}=P\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&2^{2024}&0\\0&0&0&3^{2024}\end{pmatrix}P^{-1}$$

תרגיל 11.5.2.

<u>תרגיל ממבחן:</u>

תהא $A=\begin{pmatrix}5&4\\1&8\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^{2\times 2}$ מצאו $B\in\mathbb{R}^{2\times 2}$ כך ש $B^2=A$.

<u>פתרון:</u>

נלכסן את A:

$$p_a(\lambda)=\text{det}(A-\lambda I)=\begin{pmatrix}5-\lambda&4\\1&8-\lambda\end{pmatrix}=(5-\lambda)(8-\lambda)-4=...=\lambda^2-13\lambda+36$$
$$=...=(\lambda-4)(\lambda-9)$$

כלומר A לכסינה עם ע"ע $4,9$ נמצא ו"ע:

$$(A-4I)v=\begin{pmatrix}1&4\\1&4\end{pmatrix}v=0\Rightarrow v=\begin{pmatrix}4\\-1\end{pmatrix}$$

$$(A-9I)v=\begin{pmatrix}-4 & 4\\ 1 & -1\end{pmatrix}v=0\Rightarrow v=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$$

אז:

$$\begin{pmatrix}4 & 0\\ 0 & 9\end{pmatrix}=P^{-1}AP$$

כאשר $P=\begin{pmatrix}4 & 1\\ -1 & 1\end{pmatrix}$, ונשים לב כי:

$$D=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 3\end{pmatrix}^2$$

כלומר אם נסמן:

$$X=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 3\end{pmatrix}$$

אז:

$$X^2=D=P^{-1}AP\Rightarrow A=PX^2P^{-1}=PXP^{-1}PXP^{-1}=(PXP^{-1})^2$$

כלומר:

$$B=PXP^{-1}=\begin{pmatrix}4 & 1\\ -1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4 & 1\\ -1 & 1\end{pmatrix}^{-1}=\ldots=\begin{pmatrix}\frac{11}{5} & \frac{4}{5}\\ \frac{1}{5} & \frac{14}{5}\end{pmatrix}$$

תרגיל 11.5.3.

תרגיל ממבחן:

יהיו $A,B\in\mathbb{R}^{n\times n}$, כך ש:

$$AB=BA$$

נתון כי ל A יש n ע"ע שונים, הוכיחו כי אם $v\in\mathbb{R}^n$ ו"ע של A הוא גם ו"ע של B.

פתרון:

יהא $\mathbb{R}^n\ni v_\lambda\neq 0$ ו"ע עם ע"ע λ של A, אז:

$$ABv_\lambda=BAv_\lambda=B(\lambda v_\lambda)=\lambda Bv_\lambda$$

כלומר, $A(Bv_\lambda)=\lambda(Bv_\lambda)$, כלומר, $w=Bv_\lambda$ ו"ע של ע"ע λ, אבל, עפ"י הנתון הר"א של λ הוא 1, ולכן גם הר"ג, כלומר:

$$\dim V_\lambda=1$$

ולכן:

$$V_\lambda=\text{span}(v_\lambda)$$

אבל, w ו"ע של A של ע"ע λ, כלומר $w\in V_\lambda$ ולכן קיים $\alpha_\lambda\in\mathbb{R}$ כך ש:

$$w=\alpha_\lambda v_\lambda\Rightarrow Bv_\lambda=\alpha_\lambda v_\lambda$$

כלומר, v_λ ו"ע של B.

11.6 חזרה למטריצות דומות

תזכורת.

אם $A, B \in \mathbb{F}^{n\times n}$ אז:

1. יש להן אותו פ"א:
$$p_A(\lambda) = p_B(\lambda)$$
2. יש להן אותו אותן ע"ע, עם אותם ר"א ור"ג בהתאמה.
3. לא בהכרח יש להם את אותם ו"ע.

בכיוון השני:
אם A, B לכסינות, הן דומות אמ"מ יש להן אותה צורה אלכסונית, כלומר אותם ע"ע, כלומר אותו פ"א.

תרגיל 11.6.1.

הוכיחו כי:
$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 40 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$
$$B = \begin{pmatrix} 5 & -3 & -1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 4 & -4 & 1 \end{pmatrix}$$
דומות.

פתרון:
נתחיל בA, משום שהיא משולשת:
$$p_A(\lambda) = (3-\lambda)(2-\lambda)(1-\lambda)$$
ומשום שיש לה $n=3$ ע"ע שונים היא לכסינה.
עבור B, ראשית נמצא את הפ"א:
$$B - \lambda I = \begin{pmatrix} 5-\lambda & -3 & -1 \\ 2 & 0-\lambda & -1 \\ 4 & -4 & 1-\lambda \end{pmatrix}$$
אז:
$$\det(B-\lambda I) = ... = -\lambda^3 + 6\lambda^2 - 11\lambda + 6 = p_B(\lambda)$$
נראה 3 דרכים שונות להראות כי $p_A(\lambda) = p_B(\lambda)$:

1. נפשט את $p_A(\lambda)$:

$$\begin{aligned} p_A(\lambda) &= (3-\lambda)(2-\lambda)(1-\lambda) = (3-\lambda)(2-2\lambda-\lambda+\lambda^2) \\ &= (3-\lambda)(2-3\lambda+\lambda^2) = 6-9\lambda+3\lambda^2-2\lambda+3\lambda^2-\lambda^3 \\ &= -\lambda^3+6\lambda^2-11\lambda+6 = p_B(\lambda) \end{aligned}$$

2. נראה ע"י הצבה כי $\lambda = 1$ שורש של $p_B(\lambda)$, אז ממשפט חלוקה בשארית קיים $q(\lambda) = a\lambda^2 + b\lambda + c$ כך ש:

$$(\lambda-1)q(\lambda) = -\lambda^3+6\lambda^2-11\lambda+6 = p_B(\lambda)$$

אפשר להמשיך ב2 דרכים, אפשר להשתמש במשפט חלוקה בשארית, אבל אפשר גם להציב ולפתור ממ"ל, נפתור עם ההצבה:

$$(\lambda-1)q(\lambda) = (\lambda-1)(a\lambda^2+b\lambda+c) = a\lambda^3+b\lambda^2+c\lambda-a\lambda^2-b\lambda-c = \lambda^3(a)+\lambda^2(b-a)+\lambda(c-b)+1(-c)$$

אז:

$$\lambda^3(a)+\lambda^2(b-a)+\lambda(c-b)+1(-c) = -\lambda^3+6\lambda^2-11\lambda+6$$

$$\begin{cases} a=-1 \\ b-a=6 \\ c-b=-11 \\ -c=6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=-1 \\ b=5 \\ c=-6 \end{cases}$$

כלומר:

$$p_B(\lambda) = (\lambda-1)(-\lambda^2+5\lambda-6) = -(\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-3) = (1-\lambda)(2-\lambda)(3-\lambda) = p_A(\lambda)$$

3. משום ש$\deg p_A = \deg p_B$, ושורשי p_A הם $1,2,3$, אם הם גם שורשי p_B, והמקדם המוביל שלהם שווה, אז $p_A = p_B$, ואכן בדיקה ישירה תראה לנו כי:

$$p_B(1) = p_B(2) = p_B(3) = 0$$

והמקדמם של λ^3 הוא -1 ב2 הפולינומים, ולכן:

$$p_A(\lambda) = p_B(\lambda)$$

אז B לכסינה כי יש לה 3 ע"ע שונים, ונשים לב כי $p_A(\lambda) = p_B(\lambda)$, ולכן A, B דומות.

תרגול שתים עשרה

12.1 לכסון מטריצות - תרגול נוסף

תזכורת.

תהיי $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ מטריצה. התנאים הבאים שקולים:

1. A לכסינה, כלומר קיימת מטריצה P הפיכה כך ש $D = P^{-1}AP$ כאשר D אלכסונית.
2. קיימת מטריצה P שעמודותיה בסיס של $\mathbb{F}^n$ כך ש $D = P^{-1}AP$ כאשר D אלכסונית.
3. קיימת קבוצה של וקטורים עצמיים של A כך שלכל ערך עצמי כמות הו"ע בקבוצה המתאימים לו היא הריבוי הגיאומטרי וגם סכומם הוא n.
4. קיים ל $\mathbb{F}^n$ בסיס של ו"ע של A, והוא יקרא הבסיס המלכסן של A.
5. קיימת מטריצה שעמודותיה ו"ע של A כך שלכל ערך עצמי כמות הו"ע בקבוצה המתאימים לו היא הריבוי הגיאומטרי וגם סכומם הוא n, והיא מקיימת $D = P^{-1}AP$ כאשר D אלכסונית, ובפרט כל אחד מאיברי האלכסון מתאים לע"ע.
6. A דומה למטריצה D אלכסונית, כך שכל ע"ע של A מופיע על האלכסון של D ריבוי גיאומטרי שלו פעמים, וסכום הריבויים הגיאומטרים הוא n (לחילופין, רק ע"ע של A מופיעים על האלכסון של D).
7. סכום הריבוים הגיאומטרים של A הוא n.
8. הפולינום האופייני של A מתפרק לגורמים לינאריים והריבוי הגיאומטרי והאלגברי של כל ע"ע שווים.

למעשה, החלק שקשור לקיום בסיס מלכסן הוא הפיכות P (שעמודותיה הן הבסיס המלכסן), והחלק שקשור לכך שאלו ו"ע של A קשור לכך שהמטריצה דומה למטריצה אלכסונית (בדיקה יחסית פשוטה של הגדרת כפל מטריצות).
שימו ♡ סדר הע"ע באלכסון של D מתאים לסדר הע"ע של איברי הבסיס (שכן איברי הבסיס הם ו"ע של A בעצמם).

תרגיל 12.1.1.

יהא $k \in \mathbb{R}$, ותהא $T : \mathbb{R}^{2\times 2} \to \mathbb{R}^{2\times 2}$ העתקה לינארית המוגדרת ע"י:

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \qquad T(A) = \begin{pmatrix} \text{trace}(A) & 0 \\ ka & \text{trace}(A) \end{pmatrix}$$

1. חשבו את $A = [T]_E$ עבור E הבסיס הסטנדרטי.
2. חשבו את $P_A(\lambda)$ הפולינום האופייני.
3. עבור כל $k \in \mathbb{R}$, לכל ע"ע של A מצאו את המ"ע שלו.
4. האם קיימים ערכי k עבורם A לכסינה? אם כן מצאו P הפיכה וD אלכסונית כך ש $A = P^{-1}DP$ ובסיס מלכסן לכל k המאפשר זאת.

<u>פתרון:</u>

1. נסמן את הבסיס הסטנדרטי:

$$E = \left\{ \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{e_1}, \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{e_2}, \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{e_3}, \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{e_4} \right\}$$

אז:

$$T(e_1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ k & 1 \end{pmatrix} = e_1 + ke_3 + e_4$$
$$T(e_2) = 0$$
$$T(e_3) = 0$$
$$T(e_4) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = e_1 + e_4$$

ולכן:

$$A = [T]_E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ k & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2. נחשב את הפ"א עלפי הגדרה:

$$\det(A-\lambda I)=\det\begin{pmatrix}1-\lambda & 0 & 0 & 1\\ 0 & -\lambda & 0 & 0\\ k & 0 & -\lambda & 0\\ 1 & 0 & 0 & 1-\lambda\end{pmatrix}=(-\lambda)\det\begin{pmatrix}1-\lambda & 0 & 1\\ k & -\lambda & 0\\ 1 & 0 & 1-\lambda\end{pmatrix}$$
$$=(-\lambda)\left[(1-\lambda)\det\begin{pmatrix}-\lambda & 0\\ 0 & 1-\lambda\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}k & -\lambda\\ 1 & 0\end{pmatrix}\right]$$
$$=(-\lambda)\left[(1-\lambda)^2(-\lambda)+\lambda\right]=(-\lambda)^2[(1-\lambda)^2-1]=(-\lambda)^2[1+2\lambda-\lambda^2-1]$$
$$=\lambda^3(2-\lambda)$$

כאשר פיתחנו בהתחלה עפ"י עמודה 2.

3. יש לנו 2 ע"ע.

(א) עבור ע"ע 2 מר"א 1:

$$(A-2I)v=0\implies 0=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 0 & 1\\ 0 & -2 & 0 & 0\\ k & 0 & -2 & 0\\ 1 & 0 & 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\ b\\ c\\ d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-a+d\\ -2b\\ ka-2c\\ a-d\end{pmatrix}$$

$$\implies\begin{cases}b=0\\ a=d=s\\ ks-2c=0\implies c=\frac{k}{2}s\end{cases}$$

אז:

$$v_1=\begin{pmatrix}1\\ 0\\ \frac{k}{2}\\ 1\end{pmatrix}\implies V_{\lambda=2}=\text{span}\left\{\begin{pmatrix}1 & 0\\ \frac{k}{2} & 1\end{pmatrix}\right\}$$

(ב) עבור $\lambda=0$ ע"ע מר"א 3:

$$0=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ k & 0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\ b\\ c\\ d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a+d\\ 0\\ kc\\ a+d\end{pmatrix}$$

ראשית, אם $k\neq 0$, נקבל $c=0, b=s, a=t, d=-t$, כלומר ר"ג 2 שנפרש ע"י:

$$v_2=\begin{pmatrix}1\\ 0\\ 0\\ -1\end{pmatrix}, v_3=\begin{pmatrix}0\\ 1\\ 0\\ 0\end{pmatrix}$$

עם המ"ע:

$$V_{\lambda=0}=\text{span}\left\{\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}\right\}$$

אם $k=0$ נקבל את הממ"ל:

$$\begin{pmatrix} a+d \\ 0 \\ kc \\ a+d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

כלומר, $a=t, b=s, c=u, d=-t$, ר"ג 3:

$$v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, v_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

אז:

$$V_{\lambda=0} = \text{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

4. עפ"י הסעיף הקודם, A לכסימה אמ"מ $k=0$, והצורה האלכסונית היא:

$$D = \text{diag}(2,0,0,0), \qquad P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

עם הבסיס:

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

תרגיל 12.1.2.

יהיו $S,T:V\to V$ העתקות לינאריות עבור V מ"ו נוצר סופית, בנוסף קיים לV בסיס שכל אבריו ו"ע גם של S וגם של T, הוכיחו כי $ST=TS$.

פתרון:
היות וקיים בסיס B שמלכסן גם את T וגם את S, קיימת מטריצה הפיכה P ומטריצות אלכסוניות D_1, D_2 כך ש:

$$[T]_B = P^{-1}D_1P, \qquad [S]_B = P^{-1}D_2P$$

נשתמש בכך שמטריצות אלכסוניות מתחלפות ונקבל כי:

$$\begin{aligned}[TS]_B &= [T]_B[S]_B = P^{-1}D_1PP^{-1}D_2P = P^{-1}D_1D_2P = P^{-1}D_2D_1P \\ &= P^{-1}D_2PP^{-1}D_1P = [S]_B[T]_B = [ST]_B\end{aligned}$$

קיבלנו כי $[TS]_B = [ST]_B$ ולכן $TS=ST$.

תרגיל 12.1.3.

יהיו $S, T : V \to V$ העתקות לינאריות עבור V מ"ו נוצר סופית, כך ש:

$$\forall w \in V, \qquad TS(w) = S(w)$$

הוכיחו כי אם 1 ע"ע של T אז $\text{Im}(S) \subset V_{\lambda=1}$.

<u>פתרון:</u>
נניח כי 1 ע"ע של T, יהא $v \in \text{Im}(S)$, כלומר קיים w כך ש $v = S(w)$, אז לפי הנתון:

$$v = S(w) = TS(w) = T(v)$$

אז $v \in V_{\lambda=1}$.

תרגיל 12.1.4.

תהא $A \in \mathbb{R}^{100\times100}$, כך ש $\forall i, j, A_{i,j} = 1$, מצאו D אלכסונית וP הפיכה כך ש:

$$A = P^{-1}DP$$

<u>פתרון:</u>
ראשית, $100 - \text{rank}(A) = 100 - 1 = \deg(V_{\lambda=0})$, כלומר 0 ע"ע מר"ג 99.
נזכר כי סכום הע"ע, כולל ר"א הוא $\text{trace}(A) = 100$, ולכן, 100 ע"ע מר"א 1.
נחפש ו"ע, עבור $\lambda = 100$, אפשר מהר לראות כי:

$$v_{100} = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

מקיים:

$$Av_{100} = 100v_{100}$$

עבור $\lambda = 0$, יש לנחש 99 ו"ע בת"ל, ואכן:

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, ..., v_{99} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

כולם ו"ע של ע"ע 0.
אז A לכסינה, וסה"כ מתקיים:

$$D = \text{diag}(100, 0, ..., 0), \text{diag } P = \begin{pmatrix} | & ... & | \\ v_1 & ... & v_{100} \\ | & ... & | \end{pmatrix}$$

מקיימות את הנדרש.

תרגיל 12.1.5.

תהא $A \in \mathbb{R}^{7\times 7}$ עם הפ"א:

$$p_A(\lambda) = 7\lambda^7 + 13\lambda^6 - 56\lambda^5 + 3\lambda^2 + \pi\lambda + 5$$

הוכיחו כי A הפיכה.

פתרון:
A הפיכה אמ"מ לממ"ל $Av = 0$ קיים רק פתרון טריוויאלי, כלומר $V_{\lambda=0} = \{0\}$, כלומר $\lambda = 0$ אינו ע"ע, כלומר, $p_A(0) \neq 0$, ואכן:

$$p_A(0) = 5 \neq 0$$

אז A הפיכה.

12.2 נורמה ומכפלה פנימית

תזכורת.

יהי V מרחב וקטורי מעל שדה $\mathbb{F}$. הפונקציה $\langle , \rangle : V \times V \to \mathbb{F}$ נקראת מכפלה פנימית ב V אם מתקיים:

1.
$$\forall u, v_1, v_2 \in V, \qquad \langle u, v_1 + v_2 \rangle = \langle u, v_1 \rangle + \langle u, v_2 \rangle$$

2.
$$\forall u, v \in V, \lambda \in \mathbb{F}, \qquad \langle u, \lambda v \rangle = \lambda \langle u, v \rangle$$

3.
$$\forall u, v \in V, \qquad \langle u, v \rangle = \overline{\langle v, u \rangle}$$

4. $\forall v \in V, \quad \langle v, v \rangle \geq 0$ יתרה מכך מתקיים $\langle v, v \rangle = 0 \iff v = 0_V$

כל מכפלה פנימית מקיימת את חוק הפילוג: $\forall \lambda_1, ...\lambda_n, \eta_1, ..., \eta_m \in \mathbb{F}, v_1, ..., v_n, u_1, ..., u_m \in V$:

$$\left\langle \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i, \sum_{j=1}^{m} \eta_j u_j \right\rangle = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \bar{\lambda}_i \eta_j \langle v_i, u_j \rangle$$

תזכורת.

יהי $(V, \langle , \rangle)$ מרחב מכפלה פנימית. הנורמה של איבר ב V מוגדרת להיות:

$$\forall v \in V, \quad \|v\| = \sqrt{\langle v, v \rangle}$$

מספר תכונות חשובות שהיא מקיימת הן:

1. $\forall v \in V, \|v\| \geq 0, \quad \|v\| = 0 \iff v = 0_V$.
2. $\forall v \in V, \lambda \in \mathbb{F}, \ \|\lambda v\| = |\lambda| \|v\|$.
3. $\forall 0 \neq v \in V, \quad \left\| \frac{1}{\|v\|} v \right\| = 1$.

ווקטור בעל נורמה השווה ל1 נקרא וקטור יחידה, בהנתן $v \in V$, נקרא ל$u = \frac{1}{\|v\|} v$ נקרא הנרמול של v.
זוג א"ש חשובים שמתקיימים הם:

1. א"ש המשלוש:
$$\forall u, v \in V, \quad \|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$$

2. א"ש קושי שוורץ:
$$\forall u, v \in V, \quad |\langle u, v \rangle| \leq \|u\| \|v\|$$

תרגיל 12.2.1.

יהא V מ"ו מעל $\mathbb{R}$, כך ש $V = \text{span}\{v_1, ..., v_n\}$, יהיו $u, w \in V$ כך ש:

$$\forall 1 \leq i \leq n, \qquad \langle v_i, u \rangle = \langle v_i, w \rangle$$

הראו כי $u = w$.

פתרון:
נסמן $v = u - w$, היות ו $\{v_1, ..., v_n\}$ פורשת את V, קיימים (לא בהרכח ביחידות!) $\rho_1, ..., \rho_n, \in \mathbb{R}$ כך ש:

$$v = u - w = \rho_1 v_1 + ... + \rho_n v_n$$

אז:

$$\langle v, v \rangle = \langle v, u - w \rangle = \langle v, u \rangle - \langle v, w \rangle = \langle \rho_1 v_1 + ... + \rho_n v_n, u \rangle - \langle \rho_1 v_1 + ... + \rho_n v_n, w \rangle$$
$$= \sum_{i=1}^{n} \rho_i \langle v_i, u \rangle - \sum_{i=1}^{n} \rho_i \langle v_i, w \rangle = \sum_{i=1}^{n} \rho_i (\underbrace{\langle v_i, u \rangle - \langle v_i, w \rangle}_{=0}) = 0$$

אז $\langle v, v \rangle = 0$, אז בהכרח $v = 0$, ולכן $u = w \implies u - w = 0$.

12.3 אורתוגונליות, אורתונורמליות וגראם שמידט

12.3.1 אורתוגונליות ואורתונורמליות

תזכורת.

יהי $(V, \langle , \rangle)$ ממ"פ מעל שדה $\mathbb{F}$. קבוצת וקטורים $\{v_1, ..., v_n\} \subset V$ קבוצת וקטורים ב V נקראת:

- אורתוגונלית אם:

$$\forall 1 \leq i < j \leq n, \qquad \langle v_i, v_j \rangle = 0$$

- אורתונורמלית אם היא קבוצה אורתוגונלית וגם:

$$\forall 1 \leq i \leq n, \qquad \|v_i\| = 1$$

בסיס נקרא אורתוגונלי או אורתונורמלי אם קבוצת אבירו קבוצה אורתוגונלית או אורתונורמלית בהתאמה.
שימו ♡ שכל קבוצה אורתוגונלית ניתן להפוך לאורתונורמלית ע"י נרמול האיברים שבה, כלומר אם $B = \{v_1, ..., v_n\}$ בסיס א"ג אז, $C = \left\{\frac{v_1}{\|v_1\|}, ..., \frac{v_n}{\|v_n\|}\right\}$ בסיס א"נ.
בהנתן בסיס א"ג, $B = \{v_1, ..., v_n\}$, כל $v = \lambda_1 v_1 + ... + \lambda_n v_n$ מקיים:

$$\langle v_j, v \rangle = \langle v_j, \lambda_1 v_1 + ... + \lambda_n v_n \rangle = \lambda_j \|v_j\|^2 \Rightarrow \lambda_j = \frac{\langle v_j, v \rangle}{\|v_j\|^2} = \frac{\langle v_j, v \rangle}{\langle v_j, v_j \rangle}$$

כלומר:

$$v=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i v_i=\sum_{i=1}^{n}\frac{\langle v_i,v\rangle}{\|v_i\|^2}v_i=\sum_{i=1}^{n}\frac{\langle v_i,v\rangle}{\langle v_i,v_i\rangle}v_i$$

בפרט אם B א"נ:

$$v=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i v_i=\sum_{i=1}^{n}\langle v_j,v\rangle v_i$$

לכן, נגדיר את ההיטל של v על u להיות הוקטור $\frac{\langle u,v\rangle}{\langle u,u\rangle}u$.

12.3.2 תהליך גראם שמידט

תזכורת.

בהנתן מ"פ $(V,\langle,\rangle)$ וקבוצה בת"ל $W=\{v_1,...,v_n\}$, תהליך גרם-שמידט הוא תהליך של בניית קבוצה א"נ חדשה U, כך ש:

$$\text{span}(U)=\text{span}(V)$$

נבנה את U באינדוקציה ע"י:

$$u_1=\frac{v_1}{\|v_1\|}$$

$$\tilde{u}_k=v_k-\langle u_1,v_k\rangle u_1-...-\langle u_{k-1},v_k\rangle u_{k-1},\qquad u_k=\frac{\tilde{u}_k}{\|\tilde{u}_k\|}$$

נדגים את השיטה.

דוגמא 12.3.1.

יהיו $v_3=\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix},v_2=\begin{pmatrix}2\\2\\0\\0\end{pmatrix},v_1=\begin{pmatrix}3\\0\\0\\0\end{pmatrix}$, וקטורים ב$\mathbb{R}^4$ עם המ"פ הסטנדרטית. נבצע את תהליך גרם-שמידט.

$$u_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$\tilde{u}_2=v_2-\langle u_1,v_2\rangle u_1=\begin{pmatrix}2\\2\\0\\0\end{pmatrix}-\left\langle\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\2\\0\\0\end{pmatrix}\right\rangle\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\2\\0\\0\end{pmatrix}\Rightarrow u_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$\tilde{u}_3 = v_3 - \langle u_1, v_3\rangle u_1 - \langle u_2, v_3\rangle u_2 = \begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix} - \left\langle \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}\right\rangle \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix} - \left\langle \begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}\right\rangle \begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}0\\0\\1\\1\end{pmatrix} \Rightarrow u_3 = \begin{pmatrix}0\\0\\\frac{1}{\sqrt{2}}\\\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$$

תרגיל 12.3.2.

יהיו:

$$v_1 = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}a\\a\\1\end{pmatrix}$$

1. מצאו a כך ש v_1, v_2 אורתוגונליים.
2. עבור $a=-1$, מצאו u_1, u_2 אורתונורמליים כך שפורשים את התמ"ו שנפרש ע"י v_1, v_2.
3. השלמיו את u_1, u_2 לבסיס א"נ של $\mathbb{R}^3$, ניתן להשאיר את הווקטור האחרון בצורה $\tilde{u}_3$ כאשר $u_3 = \frac{1}{\|\tilde{u}_3\|}u_3$.

<u>פתרון:</u>

1. ראשית נחשב את $\langle v_1, v_2\rangle$:

$$\left\langle \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}a\\a\\1\end{pmatrix}\right\rangle = a + 2a + 3 = 3a + 3$$

אז v_1, v_2 א"ג אמ"מ $a = -1 \iff 3a + 3 = 0$.

2. עבור $a=-1$, הוקטורים כבר א"ג, לכן נותר רק לבצע נרמול:

$$u_1 = \frac{1}{\|v_1\|}v_1 = \frac{1}{\sqrt{1^2+2^2+3^2}}\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{14}}\\\frac{2}{\sqrt{14}}\\\frac{3}{\sqrt{14}}\end{pmatrix}$$

$$u_2 = \frac{1}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}}\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt{3}}\\-\frac{1}{\sqrt{3}}\\\frac{1}{\sqrt{3}}\end{pmatrix}$$

3. ראשית, נשלים את u_1, u_2 לבסיס ע"י הוספת v_3, וכמובן שעשינו זאת כבר פעמים רבות, ומועמד פשוט הינו:

$$v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

רק ניתן לבצע עליו גרם שמידט על v_3:

$$\begin{aligned}
\tilde{u}_3 &= v_3 - \langle u_1, v_3 \rangle u_1 - \langle u_2, v_3 \rangle u_2 \\
&= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \left\langle \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{14}} \\ \frac{2}{\sqrt{14}} \\ \frac{3}{\sqrt{14}} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{14}} \\ \frac{2}{\sqrt{14}} \\ \frac{3}{\sqrt{14}} \end{pmatrix} - \left\langle \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{\sqrt{14}} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{14}} \\ \frac{2}{\sqrt{14}} \\ \frac{3}{\sqrt{14}} \end{pmatrix} + \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{1}{14} \\ \frac{2}{14} \\ \frac{3}{14} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 - \frac{1}{14} - \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{14} - \frac{1}{3} \\ -\frac{3}{14} + \frac{1}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{25}{42} \\ -\frac{20}{42} \\ \frac{5}{42} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$