
רשימות תרגול לקורס אלגברה לינארית להנדסה מכנית
0509-1624

רשימות תרגול לקורס אלגברה לינארית להנדסה מכנית כפי שתורגל על ידי בן פוירשטיין וגאיה סטון בסמסטר א'
תשפ"ו, הן נכתבו בצמוד לקורס כפי שלימדו ד"ר לודה מרקוס-אפשטיין. וד"ר ילנה קריינס.
הרשימות עלולות להכיל טעויות, חוסרים או אי דיוקים, תיקונים יתקבלו בברכה.
נכתב ע"י בן פוירשטיין - bf1@mail.tau.ac.il וגאיה סטון gaiaestone@mail.tau.ac.il

תוכן העניינים

4	1 תרגול ראשון
4	1.1 פולינומים
4	1.1.1 הגדרת פולינומים ושורשיהם
9	1.1.2 מכפלה וסכום של פולינומים
11	1.1.3 חלוקה של פולינומים
13	1.1.4 משפטי ויאטה
14	2 תרגול שני
14	2.1 מספרים מרוכבים
14	2.1.1 מבוא למספרים מרוכבים
18	2.1.2 ערך מוחלט והצמדה
19	2.1.3 שורשי יחידה ופולינומים מרוכבים
24	2.2 תרגילים לתרגול עצמי
29	3 תרגול שלישי
29	3.1 מטריצות
29	3.1.1 חיבור מטריצות וכפל בסקלר
30	3.1.2 כפל מטריצות
35	3.1.3 שחלוף, ומטריצות סימטריות ואנטי-סימטריות
38	3.2 תרגילים לתרגול עצמי
41	4 תרגול רביעי
41	4.1 מערכת משוואות לינאריות
42	4.1.1 שיטת החילוף של גאוס
46	4.1.2 דרגה של מטריצה
49	4.1.3 ממ"ל הומוגנית ואי-הומוגנית
51	4.1.4 תרגילים לתרגול עצמי
55	4.2 מבוא ללוגיקה - קריאה עצמית
55	4.2.1 טענת לכל
56	4.2.2 טענת קיום
56	4.2.3 שוויון קבוצות
57	4.2.4 הוכחה בשלילה
58	4.2.5 הוכחה באינדוקציה

60	5 תרגול חמישי
60	5.1 מרחבים וקטורים ותתי מרחבים וקטורים
65	5.2 איחוד וחיתוך תתי מרחבים וקטוריים
67	5.3 סכום של תתי מרחבים
68	5.4 סכום ישר של תתי מרחבים
69	5.5 תרגילים לתרגול עצמי
74	6 תרגול שישי
74	6.1 צירופים לינאריים
76	6.2 מרחב הפרוש
81	6.3 תלות ואי-תלות לינארית
84	6.4 תרגילים לתרגול עצמי
86	7 תרגול שביעי
86	7.1 בסיס ומימד
90	7.2 משפט המימדים
93	7.3 מרחבי שורות ועמודות
97	7.4 תרגילים לתרגול עצמי
99	8 תרגול שמיני
99	8.1 השלמה לבסיס
103	8.2 משפט הדרגה
104	8.3 המרחב המאפס
106	8.4 תרגול נוסף
112	9 תרגול תשיעי
112	9.1 מטריצות הפיכות
115	9.2 דטרמיננטות
119	9.3 מטריצות אלמנטריות
121	9.4 כלל קרמר
123	9.5 מטריצת ונדרמונדה - קריאה עצמית
124	9.6 תרגילים לתרגול עצמי
127	10 תרגול עשירי
127	10.1 העתקות לינאריות
131	10.2 בניית העתקות לינאריות
133	10.3 משפט המימדים של העתקות לינאריות
135	10.4 איזומורפיזם
137	10.5 תרגילים לתרגול עצמי
139	11 תרגול אחד עשר
139	11.1 ווקטורי קאורדינטות
141	11.2 מטריצה מייצגת של העתקה לינארית
143	11.3 מטריצה מייצגת של הרכבה
147	11.4 מטריצות מעבר בסיס

150	12 תרגול שנים עשר
150	12.1 ערכים ווקטורים עצמיים
153	12.2 לכסון מטריצות
158	12.3 דמיון מטריצות
160	12.4 תרגילים לתרגול עצמי
165	13 תרגול שלוש עשר
165	13.1 משפט קיילי-המילטון
166	13.2 לכסון אופרטור
169	13.3 נורמה ומכפלה פנימית
174	14 תרגול נוסף - נורמות ומכפלות פנימיות
174	14.1 נורמה
175	14.2 א"ש קושי-שוורץ
178	14.3 אורתוגונליות, אורתונורמליות וגראם שמידט
180	14.4 תהליך גראם שמידט
183	14.5 הטלה ומשלים אורתוגונלי
186	15 תרגול חזרה למבחן

תרגול ראשון

1.1 | פולינומים

1.1.1 | הגדרת פולינומים ושורשיהם

תזכורת

פולינום הוא פונקציה $p(x)$ שמקבלת מספר ממשי ומחזירה מספר ממשי, מהצורה:

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

כאשר $a_0, \dots, a_n$ מספרים ממשיים.

נקרא ל a_m המקדם של x^m .

בהנתן פולינום $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$, כך ש $a_n \neq 0$, נקרא ל a_0 האיבר החופשי, ל a_n האיבר המוביל, ול n הדרגה, או המעלה של $p(x)$ שנסמן $\deg(p)$.
לפולינום $p(x) = 0$ נקרא פולינום האפס, ונגדיר $\deg(p) = -\infty$ (נראה מדוע זו הגדרה הגיונית בהמשך).
פולינום מהצורה $p(x) = a_n x^n$ נקרא מונום. לפולינום בו האיבר המוביל הוא 1 נקרא פוינום מתוקן.

הערה

בהמשך הקורס נגדיר מהו "מספר ממשי" בצורה ברורה יותר, כרגע נחשוב על המספרים הממשיים בתור המספרים שאנו מכירים, לדוגמא,

$$3, 1, -5, \frac{1}{2}, \pi, \sqrt{5}, \frac{3\pi}{4}, 0$$

הסימון של קבוצת הממשיים הוא $\mathbb{R}$, על שמן באנגלית, Real Numbers.

אם x_0 מספר ממשי, נסמן $x_0 \in \mathbb{R}$.

נסמן:

$$p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

כפונקציה שמקבלת מספר ב $\mathbb{R}$ ומחזירה מספר ב $\mathbb{R}$.

תרגיל 1.1

קבעו האם הפונקציות הבאות הן פולינומים, אם כן מצאו את הדרגה, האיבר החופשי והמקדם המוביל שלהם.

1.

$p_1(x) = 5x + 3$

2.

$p_2(x) = 5$

3.

$p_3(x) = 10x^5$

4.

$p_4(x) = \frac{x^2}{x + 1}$

5.

$p_5(x) = 0$

6.

$p_6(y) = y^3 + 2y^2 - 1$

7.

$p_7(x) = x^{\frac{1}{2}}$

8.

$p_8(a) = \pi a^3 - 7a$

9.

$p_9(x) = x^3 + x + 3^x$

פתרון:

האיבר החופשי	האיבר המוביל	$\deg(p)$	
3	5	1	$p_1(x)$
5	5	0	$p_2(x)$
0	10	5	$p_3(x)$
לא פולינום			$p_4(x)$
0	0	$-\infty$	$p_5(x)$
-1	1	3	$p_6(x)$
לא פולינום			$p_7(x)$
0	π	3	$p_8(x)$
לא פולינום			$p_9(x)$

תזכורת

שורש של פולינום $p(x)$ הוא מספר ממשי $x_0 \in \mathbb{R}$ המקיים,

$$p(x_0) = 0$$

דוגמא 1.2

.1

$$p(x) = 3x - 6, x_0 = 2$$

.2

$$p(y) = y^2 - 1, y_0 = 1$$

.3

$$p(x) = x^2 - 6x + 9, x_0 = 3$$

.4

$$p(x) = 0, x_0 \in \mathbb{R}$$

.5

$$p(z) = z^4 + 3z^2 - 4, z_0 = 1$$

תרגיל 1.3

הוכיחו כי אם סכום המקדמים של $p(x)$ שווה לאפס, אז $x_0 = 1$ שורש של $p(x)$.

פתרון:

יהא $p(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$ פולינום כאשר סכום מקדמיו אפס, נציב $x_0 = 1$ ונקבל:

$$p(x_0) = p(1) = a_n \cdot 1^n + \dots + a_1 \cdot 1 + a_0 = a_n + \dots + a_1 + a_0 = 0$$

ולכן $x_0 = 1$ שורש של $p(x)$.

טענה (ללא הוכחה) 1.4

1. לפולינום ממעלה $n = \deg(p)$ יש לכל היותר n שורשים.

2. אם לפולינום $p(x)$ מדרגה n יש שורשים $\xi_1, \dots, \xi_n$ (לא בהכרח שונים), אז קיים $c \in \mathbb{R}$ כך ש:

$$p(x) = c(x - \xi_1) \cdot (x - \xi_2) \cdot \dots \cdot (x - \xi_n)$$

ונשים לב כי c יהיה האיבר המוביל של $p(x)$.

טענה 1.5.

אם $\deg(p) = 2$, יש לנו נוסחא מפורשת למציאת שורשי הפולינום, הנקראת נוסחאת השורשים.

$$ax^2 + bx + c = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

הוכחה:

$$(x + a)^2 = x^2 + 2ax + a^2$$

אז:

$$\begin{aligned} ax^2 + bx + c = 0 &\Rightarrow x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0 \Rightarrow x^2 + 2\frac{b}{2a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a} = 0 \\ &\Rightarrow \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{c}{a} = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \\ &\Rightarrow x = \pm \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}} - \frac{b}{2a} = \frac{\pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} - \frac{b}{2a} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \end{aligned}$$

נשים לב כי אם נסמן $\Delta = b^2 - 4ac$, אז יש לנו 3 מקרים:

1. אם $\Delta > 0$ אז יש לפולינום 2 שורשים.
2. אם $\Delta = 0$ אז יש לנו 2 פתרונות שהן אותו מספר, כלומר $p(x) = c(x - a)^2$.
3. אם $\Delta < 0$ אז אין פתרון.

תרגיל 1.6.

פתרו את המשוואות הבאות, כלומר מצאו את כל $x \in \mathbb{R}$ המקיימים אותן.

1.

$$x^2 - 7x + 12 = 0$$

2.

$$2x^2 - 12x + 18 = 0$$

3.

$$x^2 = -1$$

פתרון:

1.

$$x_{1,2} = \frac{7 \pm \sqrt{7^2 - 4 \cdot 12}}{2} \Rightarrow x_1 = 3, x_2 = 4$$

2.

$$x_{1,2} = \frac{12 \pm \sqrt{12^2 - 4 \cdot 2 \cdot 18}}{4} = 3$$

כלומר, $x = 3$ הפתרון היחיד.

3. המשוואה היא $x^2 + 1 = 0$, אז $\sqrt{b^2 - 4ac} = \sqrt{-4}$, שאינו מוגדר. במילים אחרות, לפולינום $x^2 + 1$ אין שורשים ממשיים.

הערה

גם לפולינומים ממעלה 3, 4 יש נוסחאות, אבל הן נורא ארוכות, לדוגמא, למשל עבור

$$p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

המספר:

$$\alpha = \sqrt[3]{\left(-\frac{b^3}{27a^3} + \frac{bc}{6a^2} - \frac{d}{2a}\right) + \sqrt{\left(-\frac{b^3}{27a^3} + \frac{bc}{6a^2} - \frac{d}{2a}\right)^2 + \left(\frac{c}{3a} - \frac{b^2}{9a^2}\right)^3}} + \sqrt[3]{\left(-\frac{b^3}{27a^3} + \frac{bc}{6a^2} - \frac{d}{2a}\right) - \sqrt{\left(-\frac{b^3}{27a^3} + \frac{bc}{6a^2} - \frac{d}{2a}\right)^2 + \left(\frac{c}{3a} - \frac{b^2}{9a^2}\right)^3}} - \frac{b}{3a}$$

הוא שורש של הפולינום, כלומר $p(\alpha) = 0$.

מסתבר שאין נוסחא לפולינומים מדרגה 5 ומעלה! זאת עובדה מאוד מפתיעה מתחום במתמטיקה הנקרא תורת גלואה.

1.1.2 | מכפלה וסכום של פולינומים

תזכורת

יהיו $p(x), q(x)$ פולינומים. אנחנו יכולים לחבר פולינומים "איבר איבר" כלומר:

$$(a_n x^n + \dots + a_0) + (b_n x^n + \dots + b_0) = (a_n + b_n) x^n + (a_{n-1} + b_{n-1}) x^{n-1} + \dots + (a_0 + b_0)$$

דוגמא 1.7

נתבונן בדוגמאות הבאות:

$$1. (x^2 + 5x) + (x^3 + 2x + 4) = x^3 + x^2 + (5+2)x + 4 = x^3 + x^2 + 7x + 4$$

$$2. (z^4 + 4z^3 + 2) + (4z^4 + z^3 + 3z) = 5z^4 + 5z^3 + 3z + 2$$

$$3. (x^{100} + x^4 - 3x) + (-x^{100} + 3x + 3) = x^4 + 3$$

תרגיל 1.8

יהיו $p(x), q(x)$ פולינומים הוכיחו כי: $p(x) + q(x)$ הוא פולינום ממעלה לכל היותר המקסימום של המעלות, כלומר:

$$\deg(p + q) \leq \max(\deg(p), \deg(q))$$

פתרון:

ראשית נסמן את הפולינומים באופן הבא: $p(x) = a_n x^n + \dots + a_0$, $q(x) = b_m x^m + \dots + b_0$. נחלק למקרים:

1. אם $p(x) = 0$, אז:

$$p(x) + q(x) = 0 + q(x) = q(x)$$

והטענה ברורה.

2. אם $q(x) = 0$, אז המקרה זהה לחלוטין.

3. אם $n = \deg(p) = \deg(q) = m$, אז:

$$\begin{aligned} p(x) + q(x) &= (a_n x^n + \dots + a_0) + (b_m x^m + \dots + b_0) = a_n x^n + \dots + a_0 + b_n x^n + \dots + b_0 \\ &= (a_n + b_n) x^n + \dots + (a_0 + b_0) \end{aligned}$$

הוא פולינום, ודרגתו היא לכל היותר n (יכול להיות כי $a_n + b_n = 0$ ואז הדרגה קטנה מ- n , אבל לא ייתכן כי דרגתו גדולה מ- n).

4. אם $n = \deg(p) > \deg(q) = m$, וגם $q(x) \neq 0$, $p(x) \neq 0$:

$$\begin{aligned} p(x) + q(x) &= (a_n x^n + \dots + a_{m+1} x^{m+1} + a_m x^m + \dots + a_0) + (b_m x^m + \dots + b_0) \\ &= a_n x^n + \dots + a_{m+1} x^{m+1} + (a_m + b_m) x^m + \dots + (a_0 + b_0) \\ &= a_n x^n + \dots + (a_0 + b_0) \end{aligned}$$

הוא פולינום, ומתקיים $\deg(p + q) = \deg(p)$ שכן $a_n \neq 0$.

5. המקרה האחרון שנשאר לנו הוא $\deg(q) > \deg(p)$, אבל ההוכחה הזאת זהה למקרה הקודם.

הערה

במקרים כאלה, שיש לנו 2 טענות להוכיח, אבל אנו יודעים מראש שההוכחות יהיו כמעט זהות, יש ביטוי בו משתמשים, הביטוי הוא "בלי הגבלת הכללית" או בראשי תיבות בה"כ, כאשר הניסוח הוא: בה"כ נניח כי $\deg(p) > \deg(q)$, השימוש בכלי הזה עלול להחביא טעויות, ויש להיזהר כאשר משתמשים בו.

תזכורת

יהיו $p(x), q(x)$ פולינומים. אנחנו יכולים להכפיל פולינומים ע"י פתיחת סוגריים וכינוס איברים.

דוגמא 1.9

נתבונן בדוגמא הבאה:

$$(x^2 + 5x) \cdot (2x + 4) = 2x^3 + 10x^2 + 4x^2 + 20x = 2x^3 + 14x^2 + 20x$$

תרגיל 1.10

יהיו $p(x), q(x)$ פולינומים הוכיחו כי: $p(x) \cdot q(x)$ הוא פולינום ממעלה $\deg(p) + \deg(q)$, כאשר נגדיר $-\infty + a = -\infty$ לכל a .

פתרון:

נחלק למקרים שוב,

1. בה"כ, $p(x) = 0$, אז $p(x) \cdot q(x) = 0$, ולכן

$$\deg(p(x) \cdot q(x)) = \deg(0) = -\infty$$

והוכחנו את הטענה.

2. נניח כי $p(x), q(x) \neq 0$, נסמן את הפולינומים באופן הבא: $p(x) = a_n x^n + \dots + a_0$, $q(x) = b_m x^m + \dots + b_0$. מתקיים:

$$(a_n x^n + \dots + a_0)(b_m x^m + \dots + b_0) = a_n b_m x^n x^m + \dots + a_0 b_0 = a_n b_m x^{n+m} + \dots + a_0 b_0$$

ראשית, נשים לב שאכן מדובר בפולינום, כאשר המקדם המוביל שלו הוא:

$$a_n b_m x^n x^m = a_n b_m x^{n+m}$$



ומשום ש $a_n \neq 0, b_m \neq 0$ אז גם $a_n b_m \neq 0$, ולכן:

$$n + m = \deg(p(x)q(x)) = \deg(p) + \deg(q) = n + m$$

1.1.3 | חלוקה של פולינומים

תזכורת

יהיו $p(x), q(x)$ פולינומים שאינם פולינום האפס, אז קיימים פולינומים $r(x), s(x)$ כך ש $\deg(r) < \deg(p)$ המקיימים:

$$q(x) = s(x)p(x) + r(x)$$

וזוה נותן לנו לכתוב:

$$\frac{q(x)}{p(x)} = s(x) + \frac{r(x)}{p(x)}$$

אם $r(x) = 0$ נאמר כי $p(x)$ מחלק את $q(x)$ ללא שארית.

טענה (ללא הוכחה) 1.11.

בהינתן $p(x), q(x)$ יש לנו אלגוריתם למציאת $r(x), s(x)$ שנקרא חלוקה לשארית של פולינומים.

דוגמא 1.12

נניח ואנו רוצים לחלק את $\frac{x^4+x^3+5x^2+3x-10}{x^2-2x+1}$, כלומר $q(x) = x^4+x^3+5x^2+3x-10, p(x) = x^2-2x+1$. ניקח את המונם ממעלה הכי גבוה של $q(x)$ ונחלק במונם ממעלה הגבוה ביותר של $p(x)$, במקרה שלנו נקבל $\frac{x^4}{x^2} = x^2$, נכתוב את התוצאה מעל (ראו את הכתיב המלא מטה), נכפיל ב $p(x)$ ונחסיר מ $q(x)$ את מה שקיבלנו, כלומר:

$$(x^4 + x^3 + 5x^2 + 3x - 10) - x^2(x^2 - 2x + 1) = 3x^3 + 4x^2 + 3x - 10$$

נמשיך כך עד שישאר לנו פולינום ממעלה נמוכה יותר מ $p(x)$, לאחר שנסיים, מה שנשאר לנו מטה הוא $r(x)$, והפולינום שקיבלנו למעלה הוא $s(x)$.

$$\begin{array}{r}
 x^2 - 2x + 1 \overline{) \begin{array}{r} x^4 + x^3 + 5x^2 + 3x - 10 \\ x^4 - 2x^3 + x^2 \\ \hline 3x^3 + 4x^2 + 3x - 10 \\ 3x^3 - 6x^2 + 3x \\ \hline 10x^2 - 20x + 10 \\ 10x^2 - 20x + 10 \\ \hline 20x - 20 \end{array}}
 \end{array}$$

כלומר בדוגמא שלנו:

$$\frac{x^4 + x^3 + 5x^2 + 3x - 10}{x^2 - 2x + 1} = x^2 + 3x + 10 + \frac{20x - 20}{x^2 - 2x + 1}$$

תזכורת

אם x_0 שורש של $p(x)$, אז $(x - x_0)$ מחלק את $p(x)$ ללא שארית.

תרגיל 1.13

פתרו את המשוואה:

$$x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0$$

פתרון:

נשים לב כי סכום מקדמי הפולינום הוא:

$$1 - 6 + 11 - 6 = 0$$

ולכן $x_0 = 1$ שורש של הפולינום, נחלק ב $(x - 1)$:

$$\begin{array}{r|rrrr} & x^2 & -5x & +6 & \\ x-1 & x^3 & -6x^2 & +11x & -6 \\ & x^3 & -x^2 & & \\ \hline & & -5x^2 & +11x & -6 \\ & & -5x^2 & +5x & \\ \hline & & & 6x & -6 \\ & & & 6x & -6 \\ \hline & & & & 0 \end{array}$$

כלומר:

$$\frac{x^3 - 6x^2 + 11x - 6}{x - 1} = x^2 - 5x + 6$$

שזהו פולינום שאנו יודעים לפתור עם נוסחת השורשים!

$$x_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{5^2 - 4 \cdot 6}}{2} = \frac{5 \pm 1}{2}$$

כלומר, השורשים שלנו הם 1, 2, 3 או:

$$x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = (x - 1)(x - 2)(x - 3)$$

1.1.4 | משפטי ויאטה

תזכורת

יהא $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ פולינום עם שורשים $r_1, \dots, r_n$, אז מתקיים:

.1

$$r_1 + \dots + r_n = -\frac{a_{n-1}}{a_n}$$

.2

$$r_1 r_2 \cdot \dots \cdot r_n = (-1)^n \frac{a_0}{a_n}$$

תרגיל 1.14

יהא $p(x) = x^4 - 5x^2 + 4$. נתון כי יש לו 4 שורשים ממשיים (לא כל פולינום מקיים זאת!), נסמנם r_1, r_2, r_3, r_4 , חשבו את:

$$s = (r_1 + r_2 + r_3)^4 \cdot (r_1 + r_3 + r_4)^4 \cdot (r_1 + r_2 + r_4)^4 \cdot (r_2 + r_3 + r_4)^4$$

פתרון:נשים לב כי $r_1 + r_2 + r_3 + r_4 = 0$, אז:

$$\begin{aligned} s &= (r_1 + r_2 + r_3)^4 \cdot (r_1 + r_3 + r_4)^4 \cdot (r_1 + r_2 + r_4)^4 \cdot (r_2 + r_3 + r_4)^4 \\ &= (-r_1)^4 (-r_2)^4 (-r_3)^4 (-r_4)^4 \\ &= (r_1 r_2 r_3 r_4)^4 = \left(\frac{a_0}{a_n} \right)^4 = (4)^4 \end{aligned}$$

תרגול שני

2.1 | מספרים מרוכבים

2.1.1 | מבוא למספרים מרוכבים

תזכורת

מספר מרוכב הינו מהצורה $a + ib$ כאשר $a, b \in \mathbb{R}$. נסמן את אוסף המספרים המרוכבים ע"י $\mathbb{C}$, כלומר $a + ib \in \mathbb{C}$. נגדיר את פעולות הכפל והחיבור ב $\mathbb{C}$ ע"י:

$$(a + ib) + (c + id) := (a + c) + i(b + d)$$

$$(a + ib) \cdot (c + id) := (ac - bd) + i(ad + bc)$$

נבחין כי הגדרה זו עקבית עם $i^2 = -1$, כלומר:

$$(a + ib)(c + id) = ac + iad + ibc + i^2 bd = ac + iad + ibc - bd = (ac - bd) + i(ad + bc)$$

עבור $z = a + ib$, נקרא ל a החלק הממשי של z , ול b החלק המדומה. ונסמן:

$$a = \operatorname{Re}(z), b = \operatorname{Im}(z)$$

כלומר:

$$z = \operatorname{Re}(z) + i \operatorname{Im}(z)$$

תרגיל 2.1

מצאו את החלק המדומה והחלק הממשי של המספרים הבאים:

1.

$$z = 3i + 19i^2 + 14i^3 + 5$$

2.

$$z = (3 + i)\alpha + i, \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

3.

$$z = (3 + i)\beta + i, \quad \beta \in \mathbb{C}$$

פתרון:

1.

$$z = 3i + 19i^2 + 14i^3 + 5 = 3i - 19 - 14i + 5 = (5 - 19) + i(3 - 14) = -14 - 11i$$

כלומר:

$$\operatorname{Re}(z) = -14$$

$$\operatorname{Im}(z) = -11$$

2.

$$z = (3 + i)\alpha + i = 3\alpha + i\alpha + i = 3\alpha + i(\alpha + 1)$$

כלומר:

$$\operatorname{Re}(z) = 3\alpha$$

$$\operatorname{Im}(z) = \alpha + 1$$

3. אם $\beta \in \mathbb{C}$, אז $\beta = \operatorname{Re}(\beta) + i \operatorname{Im}(\beta)$:

$$\begin{aligned} z &= (3 + i)(\operatorname{Re}(\beta) + i \operatorname{Im}(\beta)) + i = (3 \operatorname{Re}(\beta) + 3i \operatorname{Im}(\beta) + i \operatorname{Re}(\beta) - \operatorname{Im}(\beta)) + i \\ &= (3 \operatorname{Re}(\beta) - \operatorname{Im}(\beta)) + i(3 \operatorname{Im}(\beta) + \operatorname{Re}(\beta) + 1) \end{aligned}$$

אז:

$$\operatorname{Re}(z) = 3 \operatorname{Re}(\beta) - \operatorname{Im}(\beta)$$

$$\operatorname{Im}(z) = 3 \operatorname{Im}(\beta) + \operatorname{Re}(\beta) + 1$$

2.2 תרגילחשבו את i^{2025} .**פתרון:**

נשים לב כי:

$$i^1 = i$$

$$i^2 = -1$$

$$i^3 = -i$$

$$i^4 = 1$$

$$i^5 = i$$

כלומר, באופן כללי:

$$i^{k+4j} = i^k$$

כאשר k, j מספרים שלמים, נשים לב כי $2025 = 506 \cdot 4 + 1$, אז:

$$i^{2025} = i^{2024} \cdot i = i^4 \cdot i = 1 \cdot i = i$$

תזכורת

כל מספר מרוכב $z = x + iy$ אפשר להציג גם בצורה שנקראת הצגה טריגונומטרית המזהה בין:

$$z = x + iy \iff re^{i\theta} := r(\cos \theta + i \sin \theta)$$

את הביטוי $\cos(\theta) + i \sin(\theta) = e^{i\theta}$ או $\text{cis}(\theta)$ אפשר לסמן ע"י $\cos(\theta) + i \sin(\theta)$, יש לביטוי הזה משמעות מתמטית מדויקת, אבל כרגע נשתמש בו כסימון בלבד.

כלומר:

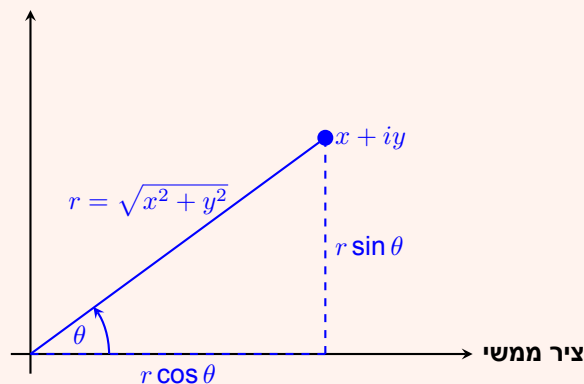
$$r(\cos(\theta) + i \sin(\theta)) = r \text{cis}(\theta) = re^{i\theta}$$

המעבר בין הצורות הוא:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \geq 0, \quad \theta = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) = \arctan\left(\frac{\text{Im}(z)}{\text{Re}(z)}\right)$$

$$x = r \cos(\theta), \quad y = r \sin(\theta)$$

ציר מדומה



נשים לב ל-2 הערות.

1. לפעמים נצטרך להוסיף π ל $\arctan \frac{y}{x}$ משום שלמשל עבור $z_1 = 1 + i$, $z_2 = -z_1 = -1 - i$, מתקיים,

$$\frac{\text{Im}(z_1)}{\text{Re}(z_1)} = \frac{\text{Im}(z_2)}{\text{Re}(z_2)} = 1$$

מתקיים $\arctan(1) = \frac{\pi}{4}$, שזו אכן הזווית של z_1 , אבל לא של z_2 שהיא $\frac{\pi}{4} + \pi = \frac{5\pi}{4}$. אז כל פעם שנמיר מספר מרוכב מהצגה אלגברית לטריגונומטרית נצטרך לשים לב לזווית.

העשרה: אפשר להשתמש בפונקציה $\text{atan2}(y, x)$ שמחשבת את הזווית הנכונה ישר, בכך שהיא מקבלת 2 משתנים (x, y) , לא נשתמש בה בקורס.

2. לכל $re^{i\theta}$ קיימים a, b יחידים כך ש $re^{i\theta} = a + ib$ וזה גם (כמעט) נכון להפך, לכל משום שבהצגה טריגונומטרית, הזווית אדישה לחיבור כפולות של 2π , כי הרי לכל k שלם מתקיים:

$$\begin{aligned}\forall k \in \mathbb{Z}, \quad \cos(\theta + 2\pi k) &= \cos(\theta) \\ \forall k \in \mathbb{Z}, \quad \sin(\theta + 2\pi k) &= \sin(\theta)\end{aligned}$$

כלומר:

$$re^{i(\theta+2\pi)} = re^{i\theta}$$

למשל:

$$1 = e^{i0} = e^{2\pi i} = e^{4\pi i} = \dots$$

אז אפשר למשל להגיד, שלכל $a + ib$ יש r, θ יחידים כך ש $re^{i\theta} = a + ib$ וגם $0 \leq \theta < 2\pi$.

היתרון העיקרי של ההצגה הטריגונומטרית הוא בהכפלת מספרים מרוכבים:

$$r_1 e^{i\theta_1} \cdot r_2 e^{i\theta_2} = (r_1 r_2) e^{i(\theta_1 + \theta_2)} = (r_1 r_2) (\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \sin(\theta_1 + \theta_2))$$

לעומת זאת, לחבר מספרים בצורה טריגונומטרית זה פחות אלגנטי, ובד"כ הדרך הקלה לעשות זאת היא להמיר לצורה אלגברית, לחבר ואז להמיר חזרה.

תרגיל 2.3.

מצאו מספר z כאשר $z^5 = 1$, אבל $z \neq 1$.

פתרון:

נשים לב כי בהצגה טריגונומטרית, $z = re^{i\theta}$, אז:

$$z^5 = (r^5) e^{i5\theta} = 1 = e^{2i\pi}$$

אז למשל $r = 1$, $\theta = \frac{2\pi}{5}$ יעבוד, והוא בהחלט אינו שווה ל-1.

הערה

למעשה, יש 5 מספרים מרוכבים שמקיימים את המשוואה:

$$z^5 = 1$$

והם:

$$e^{\frac{2\pi}{5}i}, e^{\frac{4\pi}{5}i}, e^{\frac{6\pi}{5}i}, e^{\frac{8\pi}{5}i}, e^{\frac{10\pi}{5}i} = e^{2\pi i} = 1$$

אלה נקראים שורשי יחידה מסדר n ,



2.1.2 | ערך מוחלט והצמדה

תזכורת

למספר $z = a + ib = re^{i\theta} \in \mathbb{C}$ נסמן:

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2} = r \in \mathbb{R}$$

$$\bar{z} = a - ib = re^{-i\theta} \in \mathbb{C}$$

כאשר נקרא ל $|z|$ הערך המוחלט של z ול $\bar{z}$ הצמוד של z .

זהות חשובה היא:

$$z\bar{z} = |z|^2$$

תרגיל 2.4

חשבו את החלק הממשי והמדומה של:

$$z = \frac{i+1}{4+3i}$$

פתרון:

נשתמש בטריק הכפלה בצמוד, כלומר:

$$\frac{i+1}{4+3i} = \frac{(i+1)(4+3i)}{(4+3i)(4+3i)} = \frac{(i+1)(4-3i)}{|4+3i|^2} = \frac{4i+4-3i^2-3i}{25} = \frac{7+i}{25} = \frac{7}{25} + \frac{1}{25}i$$

כלומר:

$$\operatorname{Re}(z) = \frac{7}{25}, \quad \operatorname{Im}(z) = \frac{1}{25}$$

תרגיל 2.5

פתרו את המשוואה:

$$\bar{z} = z^3$$

פתרון:

נסמן $z = re^{i\theta}$, אז:

$$re^{-i\theta} = r^3 e^{i3\theta}$$

כלומר:

$$r = r^3 \Rightarrow r - r^3 = 0 \Rightarrow r(1 - r^2) = 0 \Rightarrow r = 0 \text{ או } r = 1$$

וגם:

$$-\theta = 3\theta + 2\pi k \Rightarrow -4\theta = 2\pi k \Rightarrow \theta = -\frac{\pi}{2}k$$

נזכר שאנו מתעניינים בזוויות בין 0 ל- 2π , אז:

$$z_1 = 0, z_2 = e^0 = 1, z_3 = e^{i\frac{\pi}{2}} = i, z_4 = e^{i\pi} = -1, z_5 = e^{i\frac{3\pi}{2}} = -i$$

2.1.3 | שורשי יחידה ופולינומים מרוכבים

תזכורת

עבור מספר מרוכב $w = re^{i\theta}$, ישנם n מספרים z המקיימים $z^n = w$, מהצורה:

$$z = \sqrt[n]{r} e^{i\frac{\theta + 2\pi k}{n}}$$

עבור $k = 0, \dots, n-1$.המונח "שורשים" יופיע מעט כאשר אנו מדברים על מספרים מרוכבים בקורס, פרט למקרה המיוחד שורשי היחידה, כלומר כאשר $w = 1$, ואז שורשי היחידה הם:

$$z = e^{i\frac{2\pi k}{n}}$$

עבור $k = 0, \dots, n-1$.נשים לב כי כל המספרים הללו נמצאים על מעגל היחידה, ויש בניהם אותה זווית, כלומר אם נשרטט אותם נקבל מצולע משוכלל.

תרגיל 2.6

יהיו $z_1 = 4\sqrt{2} - i4\sqrt{2}$, $z_2 = e^{i\frac{3\pi}{4}}$. פתרו את המשוואה: $w^3 = \frac{z_1}{z_2}$.פתרון:על מנצת לחשב את $\frac{z_1}{z_2}$, נמיר את z_1 לצורה הטריגונומטרית:

$$r = \sqrt{(4\sqrt{2})^2 + (4\sqrt{2})^2} = \sqrt{64} = 8$$

$$\theta = \arctan\left(\frac{-1}{1}\right) = \arctan(-1) = \frac{7\pi}{4}$$

אז:

$$w^3 = \frac{z_1}{z_2} = \frac{8e^{i\frac{7\pi}{4}}}{e^{i\frac{3\pi}{4}}} = 8e^{i\pi} = -8$$

כלומר:

$$w^3 = -8$$

אז:

$$w_0 = \sqrt[3]{8} e^{i \frac{\pi+2\pi k}{3}}$$

עבור $k = 0, 1, 2$, כלומר:

$$w_0 = 2e^{i \frac{\pi}{3}}, \quad w_1 = 2e^{i \frac{\pi+2\pi}{3}} = -2, \quad w_2 = 2e^{i \frac{5\pi}{3}}$$

2.7. תרגיל

הראו כי לכל n , סכום שורשי היחידה הוא אפס.פתרון:

נשים לב כי הסכום שלנו הוא סכום של סדרה הנדסית:

$$1 + e^{i \frac{2\pi}{n}} + e^{i \frac{2\pi 2}{n}} + \dots + e^{i \frac{2\pi(n-1)}{n}} = 1 + \left(e^{i \frac{2\pi}{n}}\right) + \left(e^{i \frac{2\pi}{n}}\right)^2 + \dots + \left(e^{i \frac{2\pi}{n}}\right)^{n-1}$$

ואנו זוכרים מהתיכון כי:

$$1 + q + q^2 + \dots + q^n = \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1}$$

אז סכום הסדרה שלנו היא:

$$\frac{\left(e^{i \frac{2\pi}{n}}\right)^n - 1}{e^{i \frac{2\pi}{n}} - 1} = \frac{1 - 1}{e^{i \frac{2\pi}{n}} - 1} = 0$$

פתרון נוסף (באמצעות נוסחאות ויטה):נתרגם את השאלה לשאלה על פולינומים. נזכר כי שורשי היחידה מכל סדר n הם שורשים לפולינום:

$$q(z) := z^n - 1$$

עבורו:

$$\deg(q) = n, \quad a_n = 1, \quad a_{n-1} = 0, \quad a_0 = 1$$

נזכר בנוסחאות ויטה עבור סכום מקדמים:

$$r_1 + \dots + r_n = -\frac{b_{n-1}}{b_n}$$

כאשר $r_1, \dots, r_n$ הם שורשי הפולינום $b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \dots + b_0$.
 לכן, במקרה שלנו, סכום שורשי היחידה מסדר n (כלומר סכום שורשי הפולינום q) יהיה $\frac{a_{n-1}}{a_n} = 0$.

תזכורת

פולינום $p(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$ כאשר $a_0, \dots, a_n$ להיות מרוכבים, וגם מהצב x מספר מרוכב, נקרא פולינום מרוכב. זוהי פונקציה מהצורה:

$$p : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$$

תזכורת

משפט חשוב מאוד באלגברה, שלא נוכיח בקורס הוא המשפט היסודי של אלגברה: לפולינום מרוכב p ממעלה n יש בדיוק n שורשים, בפרט קיימת לו הצורה:

$$p(x) = a_n (x - w_1) \cdot \dots \cdot (x - w_n)$$

עבור $w_j \in \mathbb{C}$, כאשר יכולים להיות כפילויות, בשורשים - כלומר הם לא בהכרח שונים. שימו ⚡ שזה לא נכון בהכרח לפולינומים ממשיים!

תרגיל 2.8

מצאו את שורשי הפולינום:

$$p(z) = z^2 - 2z + 2$$

פתרון:

נשתמש בנוסחת השורשים:

$$z_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 8}}{2} = \frac{2 \pm 2i}{2} = 1 \pm i$$

תרגיל 2.9

אם $w \in \mathbb{C}$ שורש של פולינום עם מקדמים ממשיים $p(x)$ אז גם $\bar{w}$.

פתרון:

יהא $p(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$ פולינום ממשי, ונניח כי w שורש שלו, נזכר ב3 תכונות חשובות של הצמדה:

$$1. \quad \overline{zw} = \bar{z} \cdot \bar{w}$$

$$2. \quad \overline{z + w} = \bar{z} + \bar{w}$$

$$3. \quad z = \bar{z} \iff z \in \mathbb{R}$$

אז:

$$0 = p(w) = a_n w^n + \dots + a_1 w + a_0$$

אז:

$$0 = \bar{0} = \overline{p(w)} = \overline{a_n w^n + \dots + a_1 w + a_0} = \overline{a_n} \overline{w^n} + \dots + \overline{a_1} \overline{w} + \overline{a_0} = a_n \overline{w}^n + \dots + a_1 \overline{w} + a_0 = p(\overline{w})$$

כלומר, גם $p(\overline{w}) = 0$, כלומר $\overline{w}$ שורש של p .

תרגיל 2.10

יהא $p(x)$ פולינום ממשי ממעלה אי-זוגית, אז קיים לו שורש ממשי אחד לפחות.

פתרון:

את שורשי $p(x)$ אפשר לחלק לזוגות, $(w_j, \overline{w_j})$, אבל יש לנו מספר אי-זוגי של שורשים, אז חייב להיות לנו שורש ששווה לצמוד של עצמו, שראינו שזה שקול להיותו ממשי.

תרגיל 2.11

יהא $p(z)$ פולינום בעל מקדמים ממשיים, הוכיחו כי $z = i$ שורש של $p(z)$ אם ורק אם:

$$a_0 - a_2 + a_4 - a_6 \dots = 0 \text{ וגם } a_1 - a_3 + a_5 - a_7 \dots = 0$$

פתרון:

יהא $p(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0$ פולינום בעל מקדמים ממשיים. נזכר כי $i^{4k+l} = i^l$ לכל $k \in \mathbb{Z}$, כלומר:

$$\begin{aligned} p(i) &= a_n i^n + a_{n-1} i^{n-1} + \dots + a_1 i + a_0 \\ &= (a_0 + a_4 + a_8 \dots) + i(a_1 + a_5 + a_9 \dots) + (i^2)(a_2 + a_6 + a_{10} \dots) + (i^3)(a_3 + a_7 + a_{11} \dots) \\ &= (a_0 + a_4 + a_8 \dots) + i(a_1 + a_5 + a_9 \dots) - (a_2 + a_6 + a_{10} \dots) + i(a_3 + a_7 + a_{11} \dots) \\ &= (a_0 - a_2 + a_4 - a_6 \dots) + i(a_1 - a_3 + a_5 - a_7 \dots) \end{aligned}$$

נשים לב כי $a_0 - a_2 + a_4 - a_6 \dots$ וגם $a_1 - a_3 + a_5 - a_7 \dots$ הם ממשיים, ונזכר כי $x + iy = 0$ אם ומ"מ $x = 0$ וגם $y = 0$ (כאשר $x, y \in \mathbb{R}$), כלומר:

$$p(i) = 0 \iff a_0 - a_2 + a_4 - a_6 \dots = a_1 - a_3 + a_5 - a_7 \dots = 0$$

תרגול עצמי: מצאו פולינום עם מקדמים מרוכבים אשר $p(i) = 0$ אבל לא מתקיים $a_0 - a_2 + a_4 - a_6 \dots = a_1 - a_3 + a_5 - a_7 \dots = 0$.

תרגיל 2.12

יהיו w_1, w_2, w_3 , שלושת שורשי היחידה מסדר 3 חשבו את $s = w_1^{3001} + w_2^{3001} + w_3^{3001}$.

פתרון:נשים לב כי, לכל k :

$$w_k^{3001} = w_k^{3 \cdot 1000 + 1} = (w_k^{1000})^3 w_k = w_k$$

כלומר:

$$s = w_1 + w_2 + w_3$$

אז מהתרגיל הקודם על שורשי היחידה, מתקיים:

$$s = 0$$

2.2 | תרגילים לתרגול עצמי

תרגיל 2.13

מצאו את החלק הממשי, החלק המדומה וההצגה הטריונומטרית של המספרים הבאים:

1.

$$z = \frac{1+i}{3i+2}$$

2.

$$z = (3i+4)^5$$

3.

$$z = (\overline{2i+3}) \cdot \frac{1}{2e^{i\frac{\pi}{3}}}$$

4.

$$z = |2e^{i\pi}| + \operatorname{Re}(3+2i) + i \operatorname{Im}(2i)$$

פתרון:

1. נכפיל בצמוד:

$$z = \frac{1+i}{3i+2} = \frac{(1+i)(-3i+2)}{(3i+2)(-3i+2)} = \frac{-3i+2+3+2i}{3^2+2^2} = \frac{5-i}{13} = \frac{5}{13} - \frac{1}{13}i$$

כלומר:

$$\operatorname{Re}(z) = \frac{5}{13}, \quad \operatorname{Im}(z) = -\frac{1}{13}$$

בצורה טריגונומטרית:

$$r = \sqrt{\left(\frac{5}{13}\right)^2 + \left(\frac{1}{13}\right)^2} = \frac{\sqrt{26}}{13}$$

$$\tan(\theta) = \frac{-\frac{1}{13}}{\frac{5}{13}} = -\frac{1}{5} \Rightarrow \theta = \arctan\left(-\frac{1}{5}\right)$$

2. נמיר לצורה טריגונומטרית את המספר $w = 3i+4$:

$$r = \sqrt{3^2+4^2} = 5$$

הזווית היא:

$$\tan(\theta_w) = \frac{3}{4} \Rightarrow \theta_w = \arctan\left(\frac{3}{4}\right)$$

אז:

$$z = w^5 = 5^5 e^{i5 \arctan(\frac{3}{4})}$$

כלומר בצורה טריגונומטרית המודול 5^5 והזווית $5 \arctan\left(\frac{3}{4}\right)$, החלק הממשי:

$$\operatorname{Re}(z) = 5^5 \cos\left(5 \arctan\left(\frac{3}{4}\right)\right) = -3116$$

$$\operatorname{Im}(z) = 5^5 \sin\left(5 \arctan\left(\frac{3}{4}\right)\right) = -237$$

3. נמיר את $3 + 2i$ לצורה טריגונומטרית, $r = \sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{13}$, והזווית:

$$\theta = \arctan\left(\frac{-2}{3}\right)$$

אז:

$$z = \frac{\sqrt{13}e^{i \arctan(-\frac{2}{3})}}{2e^{i\frac{\pi}{3}}} = \frac{\sqrt{13}}{2}e^{i(\arctan(-\frac{2}{3}) - \frac{\pi}{3})}$$

אז:

$$\operatorname{Re}(z) = \frac{\sqrt{13}}{2} \cos\left(\arctan\left(-\frac{2}{3}\right) - \frac{\pi}{3}\right), \quad \operatorname{Im}(z) = \frac{\sqrt{13}}{2} \sin\left(\arctan\left(-\frac{2}{3}\right) - \frac{\pi}{3}\right)$$

4.

$$z = \underbrace{\frac{2e^{i\pi}}{2}}_2 + \underbrace{\frac{\operatorname{Re}(3+2i)}{3} + i \frac{\operatorname{Im}(2i)}{2}}_3 = 5 + 2i$$

בצורה טריגונומטרית:

$$r = \sqrt{5^2 + 2^2} = \sqrt{29}$$

$$\theta = \arctan\left(\frac{2}{5}\right)$$

תרגיל 2.14

יהא $z \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$, הוכיחו את הטענות הבאות:

1. (לא להגשה)

$$\left| \frac{z}{|z|} \right| = 1$$

2. לכל $\theta \in \mathbb{R}$:

$$|z| = |e^{i\theta} z|$$

3. (לא להגשה)

$$\operatorname{Re}(z) \operatorname{Re}(iz) + \operatorname{Im}(z) \operatorname{Im}(iz) = 0$$

4. יהא $w \in \mathbb{C}$, $w \neq 0$, כך ש $\operatorname{Re}\left(\frac{w}{z}\right) = 0$, אז:

$$|z + w|^2 - |z|^2 - |w|^2 = 0$$

פתרון:1. נסמן $z = re^{i\theta}$ אז:

$$\left| \frac{z}{|z|} \right| = \left| \frac{re^{i\theta}}{r} \right| = |e^{i\theta}| = 1$$

2. נשתמש בכפילות הערך המוחלט:

$$|e^{i\theta}z| = |e^{i\theta}||z| = |z|$$

3. נסמן $z = a + ib$ אז $iz = ia - b = -b + ia$ אז:

$$\operatorname{Re}(z) \operatorname{Re}(iz) + \operatorname{Im}(z) \operatorname{Im}(iz) = a(-b) + b(a) = -ab + ab = 0$$

4.

$$|z + w|^2 = \left| z \left(\frac{w}{z} + 1 \right) \right|^2 = |z|^2 \left| \frac{w}{z} + 1 \right|^2 =$$

אבל משום ש $\frac{w}{z}$ מדומה טהור, נסמן $\frac{w}{z} = i\eta$, עבור $\eta \in \mathbb{R}$ אז מתקיים:

$$\left| \frac{w}{z} + 1 \right|^2 = \eta^2 + 1$$

אז:

$$|z + w|^2 = |z|^2 \left| \frac{w}{z} + 1 \right|^2 = |z|^2 (1 + \eta^2) = |z|^2 + \eta^2 |z|^2 \underbrace{|i|^2}_{=1} = |z|^2 + |i\eta z|^2 = |z|^2 + |w|^2$$

תרגיל 2.15

יהיו $w_1, \dots, w_{20}$ פתרונות המשוואה $w^{20} = 1 + i$, למה שווה $s = |w_1| + \dots + |w_{20}|$?
בחרו את התשובה הנכונה:

1. $20 \cdot 2^{\frac{1}{20}}$

2. 0

3. $20 \cdot 2^{\frac{1}{40}}$ 4. $i \cdot 2^{\frac{1}{20}}$

5. -1

פתרון:יהא w_k כלשהו, אז:

$$w_k^{20} = 1 + i \implies |w_k^{20}| = |1 + i| = \sqrt{2} = 2^{\frac{1}{2}}$$

אז:

$$|w_k^{20}| = |w_k|^{20} = 2^{\frac{1}{2}}$$

כלומר:

$$|w_k| = \left(2^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{20}} = 2^{\frac{1}{40}}$$

אז:

$$s = 20 \cdot 2^{\frac{1}{40}}$$

תרגיל 2.16

יהיו $w, z \in \mathbb{C}$, בחרו את הטענה הנכונה:1. אם w שורש של המשוואה $w^{10} = 1 + i$, אז גם $\bar{w}$.2. אם $w, z \in \mathbb{R}$, אז הזווית של w, z בייצוג טריגונומטרי שווה.3. אם $w, z \in \mathbb{R}$, וגם $wz > 0$, אז $w = \bar{z}$.4. אם $w, z \in \mathbb{R}$, וגם $wz > 0$, אז $\operatorname{Im}\left(\frac{\bar{z}}{w}\right) = 0$.

פתרון:

1. נראה דוגמא נגדית:נשים לב כי $1 + i = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$, ולכן פתרון (לא יחיד) הוא:

$$w = 2^{\frac{1}{20}} e^{i\frac{\pi}{40}}$$

ולכן $\bar{w} = 2^{\frac{1}{20}} e^{-i\frac{\pi}{40}}$, ונשים לב כי:

$$\bar{w}^{10} = \left(2^{\frac{1}{20}} e^{-i\frac{\pi}{40}}\right)^2 = \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}} = 1 - i \neq 1 + i$$

כלומר, $\bar{w}$ אינו פתרון למשוואה.2. נראה דוגמא נגדית:

$$(e^{-i\frac{\pi}{2}})(e^{i\frac{\pi}{2}}) = 1 \in \mathbb{R}$$

3. נראה דוגמא נגדית:

$$w = 1, \quad z = 2$$

4. נראה כי (4) התשובה הנכונה, נסמן $z = a + ib, w = c + id$, כאשר $a, b, c, d \in \mathbb{R}$.

$$\operatorname{Im}(wz) = ad + bc = 0$$

נחשב ישירות:

$$\frac{\bar{z}}{w} = \frac{a - ib}{c + id} = \frac{(a - ib)(c - id)}{c^2 + d^2} = \frac{ac - iad - ibc + (-ib)(-id)}{c^2 + d^2} = \frac{ac - bd - i(ad + bc)}{c^2 + d^2}$$

כלומר:

$$\operatorname{Im}\left(\frac{\bar{z}}{w}\right) = -\frac{ad+bc}{c^2+d^2} = 0$$

תרגיל 2.17.

יהא $z \in \mathbb{C}$ $z \neq -1$ כך ש $\operatorname{Re}\left(\frac{z-1}{z+1}\right) = 0$, אז בהכרח $|z|$ שווה ל:

1. $\frac{1}{2}$.

2. $\frac{3}{2}$.

3. 1.

4. אף תשובה לא נכונה.

פתרון:

נסמן $z = a + ib$, אז:

$$w = \frac{z-1}{z+1} = \frac{a-1+ib}{a+1+ib} = \dots = \frac{a^2+b^2-1+2ib}{(a+1)^2+b^2} = \frac{a^2+b^2-1}{(a+1)^2+b^2} + \frac{2ib}{(a+1)^2+b^2}$$

אז אם $\operatorname{Re}(w) = 0$ אז:

$$\frac{a^2+b^2-1}{(a+1)^2+b^2} = 0 \implies a^2+b^2 = 1$$

כלומר $|z| = 1$.

תרגול שלישי

3.1 | מטריצות

3.1.1 | חיבור מטריצות וכפל בסקלר

תזכורת

מטריצה מסדר $m \times n$ מעל $\mathbb{R}$ היא רשימה של m שורות ו- n עמודות. למשל:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & \pi & 5 \end{pmatrix}$$

זו מטריצה 2×3 . נסמן $A \in \mathbb{R}^{2 \times 3}$ או $A \in M_{2 \times 3}(\mathbb{R})$, ונסמן את איבריה $a_{i,j}$ (או $A_{i,j}$) כאשר i היא השורה ו- j העמודה, למשל במקרה שלנו:

$$a_{1,1} = 1, a_{1,2} = 2, a_{2,2} = \pi, a_{2,3} = 5$$

לפעמים נסמן $A = (a_{i,j})$.

תזכורת

ישנן שתי פעולות חשובות עם מטריצות:

1. חיבור מטריצות. יהיו $A = (a_{i,j}), B = (b_{i,j}) \in \mathbb{R}^{m \times n}$ מטריצות מאותו סדר. נגדיר את המטריצה $A + B \in \mathbb{R}^{m \times n}$ להיות:

$$A + B = \begin{pmatrix} a_{1,1} + b_{1,1} & \dots & a_{1,n} + b_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m,1} + b_{m,1} & \dots & a_{m,n} + b_{m,n} \end{pmatrix}$$

כלומר:

$$(A + B)_{i,j} = a_{i,j} + b_{i,j}$$

שימו לב: ניתן לחבר רק מטריצות מאותו סדר. למשל, אם $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}, B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ אז אין משמעות לביטוי $A + B$.

2. כפל בסקלר. תהא $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ מטריצה, ויהי $\lambda \in \mathbb{R}$ מספר ממשי (שנקרא סקלר). נגדיר את המטריצה $\lambda A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ כך:

$\mathbb{R}^{m \times n}$ להיות:

$$\lambda A = \begin{pmatrix} \lambda a_{1,1} & \dots & \lambda a_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda a_{m,1} & \dots & \lambda a_{m,n} \end{pmatrix} = (\lambda a_{i,j})$$

מטריצה חשובה היא מטריצת האפס, שנסמן $O_{m \times n} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ (או לפעמים פשוט 0), שהיא מטריצה שכל איבריה אפס, ומקיימת:

$$O_{m \times n} + A = A$$

לכל $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, ולכל $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$\lambda O_{m \times n} = O_{m \times n}$$

3.1. דוגמה

1. דוגמה לחיבור מטריצות:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 10 & 12 \end{pmatrix}$$

2. דוגמה לכפל בסקלר:

$$3 \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 9 & 12 \end{pmatrix}$$

3.2. תרגיל

מצאו מטריצה $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ כך ש:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} + 2A = 3 \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

פתרון:

נשים לב כי:

$$2A = 3 \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

כלומר:

$$A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

3.1.2 | כפל מטריצות

תזכורת

בהינתן זוג מטריצות, $A \in \mathbb{R}^{m \times k}$, $B \in \mathbb{R}^{k \times n}$, המכפלה של A ו- B היא מטריצה אותה נסמן AB מסדר m .

על n , כלומר $AB \in \mathbb{R}^{m \times n}$, כאשר:

$$(AB)_{i,j} = \sum_{t=1}^k A_{i,t} B_{t,j}$$

נשים לב כי אם $A \in \mathbb{R}^{m \times k}$, $B \in \mathbb{R}^{l \times n}$ אז אין משמעות לביטוי AB .

דוגמא 3.3

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 5 & 1 \cdot 2 + 2 \cdot 4 + 3 \cdot 6 \\ 4 \cdot 1 + 5 \cdot 3 + 6 \cdot 5 & 4 \cdot 2 + 5 \cdot 4 + 6 \cdot 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 22 & 28 \\ 49 & 64 \end{pmatrix}$$

תרגיל 3.4

מצאו דוגמא נגדית לכל אחת מהטענות הבאות:

1. לכל מטריצות A, B , מתקיים $AB = BA$.
2. אם $AB = 0$ אז בהכרח $A = 0$ או $B = 0$.
3. אם $A \neq 0$ וגם $AB = AC$ אז בהכרח $B = C$.

פתרון:

1. ראשית, נשים לב כי אם $A \in \mathbb{R}^{a \times b}$, $B \in \mathbb{R}^{c \times d}$ אז בשביל שנוכל לדבר על AB דרוש ש $b = c = \alpha$, ובשביל שנוכל לדבר על BA דרוש ש $d = a = \beta$ ואז $AB \in \mathbb{R}^{\beta \times \beta}$ ו $BA \in \mathbb{R}^{\alpha \times \alpha}$, אבל בשביל להשוות בין מטריצות דרוש שהן יהיו מאותו סדר, כלומר $\alpha = \beta$, כלומר $a = b = c = d = n$. כעת, נראה דוגמא נגדית:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$$

אבל:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2. נראה דוגמא נגדית:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

3. נשים לב כי:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ * & * \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

לכל מספר שנציב במקום $*$, למשל:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2025 & 2025 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 10 & 10 \end{pmatrix}$$

וזו כמובן דוגמא נגדית.

תזכורת

נסמן ב- $I_n \in \mathbb{R}^{n \times n}$ את המטריצה הבאה:

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

כלומר, 1 על האלכסון הראשי ואפס אחרת. לכל $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ מתקיים:

$$AI_n = I_n A = A$$

תזכורת

מטריצה A ריבועית נקראת אלכסונית אם היא מהצורה:

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$$

כלומר מטריצה עם אפס בכל מקום פרט לאלכסון הראשי, לפעמים נסמן גם $A = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$. מטריצה אלכסונית עם איבר זהה על האלכסון, כלומר:

$$\text{diag}(\lambda, \dots, \lambda) = \lambda I_n$$

נקראת מטריצה סקלרית.

תרגיל 3.5.

הוכיחו כי:

$$\text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \cdot \text{diag}(\eta_1, \dots, \eta_n) = \text{diag}(\lambda_1 \eta_1, \dots, \lambda_n \eta_n)$$

פתרון:

נסמן $A = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, $B = \text{diag}(\eta_1, \dots, \eta_n)$ אז:

$$(AB)_{i,i} = \sum_{k=1}^n A_{i,k} B_{k,i} = A_{i,i} B_{i,i} = \lambda_i \eta_i$$

ועבור $j \neq i$:

$$(AB)_{i,j} = \sum_{k=1}^n A_{i,k} B_{k,j} = 0$$

תרגיל 3.6.

חשבו את:

$$\begin{pmatrix} \pi & 0 & 0 \\ 0 & e & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}^{2025}$$

פתרון:

בעזרת התרגיל הקודם:

$$\begin{pmatrix} \pi & 0 & 0 \\ 0 & e & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}^{2025} = \begin{pmatrix} \pi^{2025} & 0 & 0 \\ 0 & e^{2025} & 0 \\ 0 & 0 & (\sqrt{2})^{2025} \end{pmatrix}$$

תזכורת

נאמר כי מטריצות A, B מתחלפות אם $AB = BA$.

תרגיל 3.7.

הוכיחו כי מטריצה סקלרית $A = \lambda I_n$ מתחלפת עם כל מטריצה ריבועית $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$.

פתרון:

תהא $B = (b_{i,j}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$, ויהיו i, j כלשהם בין 1 ל- n , אז:

$$\begin{aligned} (AB)_{i,j} &= \sum_{k=1}^n A_{i,k} B_{k,j} \\ &= \left(\overset{0}{\cancel{A_{i,1}}} B_{1,j} + \dots + \overset{0}{\cancel{A_{i,i-1}}} B_{i-1,j} \right) + A_{i,i} B_{i,j} + \left(\overset{0}{\cancel{A_{i,i+1}}} B_{i+1,j} + \dots + \overset{0}{\cancel{A_{i,n}}} B_{n,j} \right) \\ &= A_{i,i} B_{i,j} = \lambda B_{i,j} \end{aligned}$$

ומצד שני:

$$(BA)_{i,j} = \sum_{k=1}^n B_{i,k} A_{k,j} = B_{i,j} A_{j,j} = \lambda B_{i,j}$$

כלומר, לכל i, j מתקיים $(AB)_{i,j} = (BA)_{i,j}$, כלומר $AB = BA$.

תרגיל 3.8.

תהא A מטריצה ריבועית המתחלפת עם כל מטריצה ריבועית אחרת, הוכיחו כי A סקלרית.

פתרון:

נסמן את המטריצה $E^{i,j}$ להיות המטריצה עם 1 במקום i, j ואפס אחרת כלומר,

$$(E^{i,j})_{a,b} = \begin{cases} 1 & a = i \text{ וגם } b = j \\ 0 & \text{אחרת} \end{cases}$$

למשל, אם $n = 3$,

$$E_{1,2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

תהא A המקיימת את הנתון.

• יהיו i, j עם $i \neq j$, נחשב את האיבר i, i של המטריצה $AE^{i,j}$.

$$(AE^{i,j})_{i,i} = \sum_{k=1}^n A_{i,k} E_{k,i}^{i,j} = 0$$

אבל, $AE^{i,j} = E^{i,j}A$, אז בפרט $(AE^{i,j})_{i,i} = (E^{i,j}A)_{i,i}$, כלומר:

$$(E^{i,j}A)_{i,i} = \sum_{k=1}^n E_{i,k}^{i,j} A_{k,i} = A_{j,i} = 0$$

כלומר לכל $i \neq j$ מתקיים $A_{j,i} = 0$.

• כעת, נחשב את האיבר i, j של המטריצה $AE^{i,j}$.

$$(AE^{i,j})_{i,j} = \sum_{k=1}^n A_{i,k} E_{k,j}^{i,j} = A_{i,i}$$

וגם:

$$(E^{i,j}A)_{i,j} = \sum_{k=1}^n E_{i,k}^{i,j} A_{k,j} = A_{j,j}$$

כלומר, $A_{i,i} = A_{j,j}$ לכל $i \neq j$.

קיבלנו כי A היא אפס מחוץ לאלכסון הראשי, ומספר יחיד על האלכסון הראשי, כלומר A סקלרית.

תרגיל 3.9.

תהא $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ מטריצה, המקיימת את התכונה הבאה:

$$\forall v \in \mathbb{R}^{3 \times 1}, \quad Av = 0$$

כאשר $Av \in \mathbb{R}^{3 \times 1}$. הוכיחו כי A היא מטריצת האפס.

פתרון:

נסמן $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$, לפי הנתון:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{pmatrix}$$

כלומר $a_{11} = a_{21} = a_{31} = 0$. באופן דומה:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \end{pmatrix}$$

וגם:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{13} \\ a_{23} \\ a_{33} \end{pmatrix}$$

כלומר $A = 0$.

תרגול עצמי: הכלילו את התרגיל הזה לכל n , כלומר הראו כי:

$$A \in \mathbb{R}^{n \times n}, \forall v \in \mathbb{R}^{n \times 1}, Av = 0 \implies A = 0$$

3.1.3 | שחלוף, ומטריצות סימטריות ואנטי-סימטריות

תזכורת

תהא $A = (a_{i,j}) \in \mathbb{R}^{n \times m}$ אז $A^t \in \mathbb{R}^{m \times n}$ היא המטריצה עם רכיבים:

$$(A^t)_{i,j} = a_{j,i}$$

דוגמא 3.10

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$$

תזכורת

מספר תכונות חשובות של שחלוף הן:

$$1. (A^t)^t = A$$

$$2. (A + B)^t = A^t + B^t$$

$$3. (\alpha A)^t = \alpha A^t$$

$$4. (AB)^t = B^t A^t$$

תזכורת

מטריצה ריבועית $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ נקראת סימטרית אם:

$$\forall i, j, \quad A_{i,j} = A_{j,i}$$

מטריצה ריבועית $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ נקראת אנטי-סימטרית אם:

$$\forall i, j, \quad B_{i,j} = -B_{j,i}$$

תרגיל 3.11

הוכיחו כי מטריצה ריבועית $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ היא סימטרית אם $A = A^t$ ואנטי-סימטרית אם $A = -A^t$.

פתרון:

תהא A מטריצה סימטרית, נשים לב כי השוויון $A = A^t$ שקול לטענה:

$$\forall i, j, \quad A_{i,j} = (A^t)_{i,j} = A_{j,i}$$

כלומר, $A_{i,j} = A_{j,i}$ לכל i, j , כלומר, השוויון $A = A^t$ שקול לכך ש A סימטרית. המקרה של אנטי-סימטרית דומה:

$$A = -A^t \iff \forall i, j, A_{i,j} = (-A^t)_{i,j} = (-A)_{j,i} = -A_{j,i}$$

תרגיל 3.12.

תהא A מטריצה ריבועית, הוכיחו כי $B = A + A^t$ סימטרית, וכי $C = A - A^t$ אנטי-סימטרית.

פתרון:

נחשב ישירות:

$$B^t = (A + A^t)^t = A^t + (A^t)^t = A^t + A = A + A^t = B$$

$$C^t = (A - A^t)^t = A^t - A = -(A - A^t) = -C$$

תרגיל 3.13.

תהא A מטריצה ריבועית, הוכיחו כי קיימת דרך 'יחידה' לכתוב את A כסכום של מט' סימטרית ואנטי-סימטרית.

פתרון:

ראשית, נשים לב כי:

$$A = \underbrace{\frac{1}{2}(A + A^t)}_{\text{סימטרית}} + \underbrace{\frac{1}{2}(A - A^t)}_{\text{אנטי-סימטרית}}$$

כעת נוכיח יחידות, נניח כי $A = B + C$ כאשר B סימטרית ו- C אנטי-סימטרית, אז:

$$A^t = B^t + C^t = B - C$$

אז:

$$\frac{1}{2}A^t + \frac{1}{2}A = \frac{1}{2}(B - C) + \frac{1}{2}(B + C) = B$$

ובאופן דומה:

$$\frac{1}{2}A - \frac{1}{2}A^t = \frac{1}{2}(B + C) - \frac{1}{2}(B - C) = C$$

תרגיל 3.14.

יהיו, $A \in \mathbb{R}^{m \times k}$, $B \in \mathbb{R}^{k \times n}$, הוכיחו כי

$$(AB)^t = B^t A^t$$

פתרון:

ראשית, נשים לב כי המימדים מתאימים, ואכן, גם $(AB)^t$ וגם $B^t A^t$ מסדר $n \times m$. יהיו $1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq m$, נראה כי $[(AB)^t]_{i,j} = [B^t A^t]_{i,j}$. ראשית:

$$[(AB)^t]_{i,j} = [AB]_{j,i} = \sum_{l=1}^k A_{j,l} B_{l,i}$$

שנית:

$$[B^t A^t]_{i,j} = \sum_{l=1}^k [B^t]_{i,l} [A^t]_{l,j} = \sum_{l=1}^k B_{l,i} A_{j,l} = \sum_{l=1}^k A_{j,l} B_{l,i}$$

כלומר, לכל i, j מתקיים:

$$[(AB)^t]_{i,j} = \sum_{l=1}^k A_{j,l} B_{l,i} = [B^t A^t]_{i,j}$$

ולכן $(AB)^t = B^t A^t$.

3.2 | תרגילים לתרגול עצמי

תזכורת

מטריצה $A = (a_{i,j})$ נקראת משולשת עליונה אם כל האיברים מתחת לאלכסון הראשי שלה הם אפס, כלומר:

$$i > j \Rightarrow a_{i,j} = 0$$

ומשולשת תחתונה אם כל האיברים מעל לאלכסון הראשי שלה הם אפס, כלומר:

$$i < j \Rightarrow a_{i,j} = 0$$

דוגמה 3.15

המטריצות

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

משולשת עליונה ותחתונה בהתאמה.

תרגיל 3.16

אם A, B משולשת עליונה, אז גם $AB, A + B$.פתרון:

יהיו $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ משולשות עליונות, את ההוכחה כי $A + B$ משולשת עליונה נשאר כתרגיל. תהא $C = AB$, נרצה להוכיח כי C משולשת עליונה, כלומר לכל $i > j$ מתקיים:

$$C_{i,j} = 0$$

כלומר:

$$C_{i,j} = \sum_{k=1}^n A_{i,k} B_{k,j} = 0$$

משום ש A, B משולשות עליונות מתקיים:

$$\forall l > k, \quad A_{l,k} = B_{l,k} = 0$$

נחשב ישירות את $C_{i,j}$: לכן:

$$(C)_{ij} = \sum_{k=1}^n A_{i,k} B_{k,j} = \sum_{k=1}^i \overset{0}{A_{i,k} B_{k,j}} + \sum_{k=i+1}^n \overset{0}{A_{i,k} B_{k,j}} = 0$$

תרגיל 3.17.

אם A, B משולשת תחתונה, אז גם $AB, A+B$.**פתרון:**יהיו A, B משולשת תחתונה, אז:

$$A+B = ((A+B)^t)^t = (A^t + B^t)^t$$

שהיא שחלוף של מט' משולשת עליונה ולכן משולשת תחתונה.
הוכחה עבור AB זהה.

תרגיל 3.18.

יהיו A, B מטריצות ריבועיות מסדר n , הוכיחו כי אם A סימטרית, B אנטי-סימטרית, ו $C = B^2 - A$ אנטי-סימטרית, אז $B^2 = A$.**פתרון:**נחשב את C^t , משום ש C אנטי-סימטרית אז $C^t = -C$.

$$C^t = (B^2 - A)^t = (B^2)^t - A^t = (B^t)^2 - A = (-B)^2 - A = B^2 - A$$

כלומר:

$$C^t = B^2 - A = -C = -B^2 + A \Rightarrow 2B^2 = 2A \Rightarrow B^2 = A$$



תרגיל 3.19.

תהא A מטריצה כך ש:

$$A \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 7 \\ 8 & 8 \\ 9 & 9 \end{pmatrix}$$

מצאו את סדר המטריצה A והוכיחו כי $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ מקיים $Av = 0$.

פתרון:

נסמן את הסדר של A ב- $m \times n$. מכללי כפל מטריצות $m = 3, n = 3$.
נבחין כי כפל של מטריצה בעמודות מקיים:

$$A \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix} \text{ וגם } A \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix}$$

וכן מלינאריות של כפל במטריצה:

$$A \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} \right) = A \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} - A \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ובפרט:

$$-3A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ -3 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} 1-4 \\ 2-5 \\ 3-6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

כלומר:

$$A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

תרגול רביעי

4.1 | מערכת משוואות לינאריות

תזכורת

מערכת משוואות לינאריות (ממ"ל) היא מערכת משוואות מהצורה:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

נשים לב שאם נסמן:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

אז כל המערכת ניתנת לכתיבה בצורה הקומפקטית:

$$A\vec{x} = \vec{b}$$

נקרא ל- A מטריצת המקדמים של הממ"ל, לפעמים נרצה לדבר גם על מטריצת המקדמים המורחבת:

$$(A|b) = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

לפעמים גם נסמן:

$$(A|b) = \left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array} \right)$$

נשים לב כי:

$$A \in \mathbb{R}^{m \times n}, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad b \in \mathbb{R}^m, \quad (A|b) \in \mathbb{R}^{m \times (n+1)}$$



תזכורת

נזכיר, $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{n \times 1}$, כלומר מטריצות מסדר $n \times 1$.

תרגיל 4.1

תהא מערכת המשוואות:

$$\begin{cases} 3x + 2y = 1 \\ x + y = 3 \end{cases}$$

1. מצאו את כל ה $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ המקיימים את הממ"ל (כלומר, פתרו את המערכת).

2. כתבו מטריצת המקדמים של הממ"ל, ואמתו את הפתרון מהסעיף הקודם.

פתרון:

1. נשים לב כי:

$$x = 3x + 2y - 2(x + y) = 1 - 2(3) = -5$$

נציב $x = -5$ במשוואה השנייה:

$$x + y = 3 \Rightarrow -5 + y = 3 \Rightarrow y = 8$$

אז פתרון הממ"ל הינו:

$$(x, y) = (-5, 8)$$

2.

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

ואכן:

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -5 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3(-5) + 2(8) \\ 1(-5) + 1(8) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

4.1.1 שיטת החילוך של גאוס

תזכורת

בהינתן ממ"ל $Ax = b$, מרחב הפתרונות שלו הוא קבוצת כל הווקטורים x המקיימים את המערכת; לפתור ממ"ל פירושו למצוא את מרחב הפתרונות שלה. פעולה אלמנטרית על ממ"ל היא פעולה על ממ"ל שמשנה את הממ"ל אבל לא משנה את מרחב הפתרונות שלה. הפעולות האלמנטריות הן:

1. הכפלת שורה בסקלר שאינו אפס, למשל:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array} \right) \xrightarrow{R_1 \rightarrow 3R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 3 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array} \right)$$

2. הוספת שורה (או כפולה של שורה בסקלר) לשורה אחרת.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array} \right) \xrightarrow{R_1 \rightarrow R_1 + 3R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 7 & 12 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array} \right)$$

3. החלפת זוג שורות.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array} \right) \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array} \right)$$

אז בהנתן ממ"ל הטקטיקה שלנו לפתרונה תהיה להפעיל על הממ"ל פעולות אלמנטריות, להביא את הממ"ל לצורה שקל יותר לפתור, ואז, היות והשתמשנו רק בפעולות אלמנטריות, מרחב הפתרונות של הממ"ל החדשה הוא אותו מרחב פתרונות של הממ"ל המקורית.
הצורה הקלה הזאת נקראת **מטריצה מדורגת קנונית**.

תזכורת

מטריצה מדורגת קנונית היא מטריצה המקיימת את התנאים הבאים:

1. המטריצה היא מדורגת, כלומר, בכל שורה, מתחת לאיבר הפותח (האיבר הראשון משמאל שאינו אפס) כל האיברים הם אפסים.

2. האיבר הפותח של כל שורה הוא 1.

3. בכל עמודה של האיבר הפותח, הוא היחיד שאינו אפס.

לדוגמא:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

יש לנו אלגוריתם להבאת כל מטריצה מדורגת לצורה קנונית, ע"י פעולות אלמנטריות בלבד, הוא נקרא **שיטת החילוץ של גאוס**. (על שם **קרל פרדריך גאוס**).
מטריצה המקיימת רק את התנאי הראשון נקראת **מטריצה מדורגת**.

דוגמא 4.2

נדגים את שיטת החילוף של גאוס. תהא המערכת:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 6 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 3 \\ 2x_1 + 2x_2 + 1x_3 = 5 \end{cases}$$

נרשום את המטריצה המורחבת:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 1 & 5 \end{array} \right)$$

נביא את המערכת לצורה המדורגת כלומר לצורה:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \star \\ 0 & 1 & 0 & \star \\ 0 & 0 & 1 & \star \end{array} \right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 1 & 5 \end{array} \right) \xrightarrow{R_2 \rightarrow R_2 - R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \\ 2 & 2 & 1 & 5 \end{array} \right) \xrightarrow{R_2 \rightarrow -R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 1 & 5 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow{R_3 \rightarrow R_3 - 2R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & -5 & -7 \end{array} \right) \xrightarrow{R_3 \rightarrow -\frac{1}{2}R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & \frac{5}{2} & \frac{7}{2} \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow{R_3 \rightarrow R_3 - R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array} \right) \xrightarrow{R_3 \rightarrow 2R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow{R_2 \rightarrow R_2 - 2R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{R_1 \rightarrow R_1 - 2R_2 - 3R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right)$$

נמיר את המטריצה המורחבת חזרה לממ"ל:

$$\begin{cases} 1 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 = 1 \\ 0 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 = 1 \\ 0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 1 \cdot x_3 = 1 \end{cases}$$

כלומר, הפתרון שלנו הינו:

$$x_1 = x_2 = x_3 = 1$$

תרגיל 4.3

פתרו את המערכת:

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x + 2y + 3z = 4 \\ y + 2z = 2 \end{cases}$$

פתרון:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \end{array} \right) \xrightarrow{R_2 \rightarrow R_2 - R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \end{array} \right) \xrightarrow{R_3 \rightarrow R_3 - R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array} \right)$$

נשים לב כי שורה 3 מתאימה למשוואה

$$0 \cdot x + 0 \cdot y + 0 \cdot z = -1 \Rightarrow 0 = -1$$

כמובן שאין אף x, y, z המקיימים את המשוואה הזאת, ולכן אין לממ"ל הנ"ל (ולכן גם לממ"ל המקורית!) פתרון. נקרא לשורה כזאת *שורת סתירה*.

תרגיל 4.4

פתרו את המערכת:

$$\begin{cases} x + y + z + w = 4 \\ y + z + w = 3 \\ z + w = 2 \end{cases}$$

פתרון:

נביא את המערכת לצורה הקנונית:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \end{array} \right) \xrightarrow{R_1 \rightarrow R_1 - R_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \end{array} \right) \xrightarrow{R_2 \rightarrow R_2 - R_3} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \end{array} \right)$$

המטריצה מדורגת קנונית, נמיר חזרה לממ"ל:

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \\ z + w = 2 \end{cases}$$

כלומר, אם נסמן $w = t$, אז מרחב הפתרונות שלנו הוא:

$$S = \{(1, 1, 2 - t, t) | t \in \mathbb{R}\}$$

כלומר, כל

$$(x, y, z, w) \in S = \{(1, 1, 2 - t, t) | t \in \mathbb{R}\}$$

פתרון.

4.1.2 | דרגה של מטריצה

תזכורת

בהינתן מטריצה $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, כלומר מטריצה עם m שורות ו- n עמודות. $\text{rank}(A)$ (לפעמים גם מסומן $r(A)$) הוא מספר השורות שאינן שורות אפסים בצורה המדורגת הקנונית של A . אם יש לנו ממ"ל $Ax = b$, אז יש קשר בין מספר הפתרונות של הממ"ל לדרגות של A , $(A|b)$.

1. אין לממ"ל פתרון $\Leftrightarrow$ יש שורת סתירה $\Leftrightarrow \text{rank}(A) < \text{rank}(A|b)$.

2. יש לממ"ל פתרון יחיד $\Leftrightarrow$ אין שורת סתירה וגם אין משתנה חופשי $\Leftrightarrow \text{rank}(A) = \text{rank}(A|b) = n =$ מספר העמודות.

3. יש לממ"ל אינסוף פתרונות $\Leftrightarrow$ אין שורת סתירה וגם יש משתנה חופשי $\Leftrightarrow \text{rank}(A) = \text{rank}(A|b) < n =$ מספר העמודות.

דוגמא 4.5

נזכר במטריצות המדורגות מהסעיפים הקודמים:

1.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 1 & 5 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right)$$

המטריצה הזאת היא מדרגה 3, ובממ"ל 3 משתנים (יש למטריצה המצומצמת 3 עמודות) ולכן יש לממ"ל פתרון יחיד.

2.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array} \right)$$

המטריצה הזאת היא מדרגה 2, בעוד שלממ"ל 3 משתנים, ולכן אין פתרון לממ"ל.

3.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \end{array} \right)$$

המטריצה הזאת היא מדרגה 3, בעוד שלממ"ל 4 משתנים, ולכן יש אינסוף פתרונות לממ"ל.

תרגיל 4.6.

נתונה ממ"ל עם פתרון יחיד

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y = b_2 \end{cases}$$

האם קיימים $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ כך ש:

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = c_1 \\ a_{21}x + a_{22}y = c_2 \end{cases}$$

אין פתרון?

פתרון:מאחר ולממ"ל יש פתרון יחיד מתקיים $\text{rank} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = 2$ אז גם לכל $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ מתקיים:

$$\text{rank} \left(\begin{array}{cc|c} a_{11} & a_{12} & c_1 \\ a_{21} & a_{22} & c_2 \end{array} \right) = 2$$

ולכן יש למערכת פתרון יחיד (לכל $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$).

תרגיל 4.7.

יהא $k \in \mathbb{R}$ והממ"ל:

$$\begin{cases} -5x + ky + z = 8 \\ -x + y + z = 2 \\ y + kz = 2 \end{cases}$$

1. מצאו עבור אילו ערכים של k יש למערכת פתרון יחיד, אין פתרונות או ∞ פתרונות.2. פתרו את המערכת עבור $k = 0$.פתרון:

1. נדרג את הממ"ל:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -5 & k & 1 & 8 \\ -1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & k & 2 \end{array} \right) \xrightarrow[R_2 \rightarrow -R_2]{R_1 \leftrightarrow R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & -2 \\ -5 & k & 1 & 8 \\ 0 & 1 & k & 2 \end{array} \right) \xrightarrow{R_2 \rightarrow 5R_1 + R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & -2 \\ 0 & k-5 & -4 & -2 \\ 0 & 1 & k & 2 \end{array} \right)$$

נרצה לחלק ב- $k-5$, כדאי להמשיך את הדירוג, כלומר נצטרך להניח כי $k \neq 5$, נעשה זאת, אבל נזכור בסוף התרגיל שצריך לבדוק מה קורה כאשר $k = 5$, ובשביל זה נצטרך לחזור לנקודה הזאת של

המטריצה, להציב $k = 5$ ולראות מה קורה.

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -2 \\ 0 & k-5 & -4 & -2 \\ 0 & 1 & k & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 \rightarrow \frac{1}{k-5} R_2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & \frac{-4}{k-5} & \frac{-2}{k-5} \\ 0 & 1 & k & 2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_3 \rightarrow R_3 - R_2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & \frac{-4}{k-5} & \frac{-2}{k-5} \\ 0 & 0 & k + \frac{4}{k-5} & 2 + \frac{2}{k-5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & \frac{-4}{k-5} & \frac{-2}{k-5} \\ 0 & 0 & \frac{4+k(k-5)}{k-5} & \frac{2+2(k-5)}{k-5} \end{pmatrix}$$

זהו, קיבלנו מטריצה מדורגת, הדבר הראשון שנרצה לראות הוא מתי האיברים הפותחים של השורות מתאפסים, כלומר מתי:

$$\frac{4+k(k-5)}{k-5} = 0 \iff 4+k(k-5) = 4+k^2-5k = 0$$

כלומר:

$$k_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{25-16}}{2} = \frac{5 \pm 3}{2} = 4, 1$$

אז דבר ראשון, אם $k \neq 4, 1, 5$ יש לנו פתרון יחיד, נצטרך להציב כל מספר בנפרד ולראות מה קורה למערכת.

כאשר $k = 1$:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & \frac{-4}{k-5} & \frac{-2}{k-5} \\ 0 & 0 & \frac{4+k(k-5)}{k-5} & \frac{2+2(k-5)}{k-5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & \frac{-4}{1-5} & \frac{-2}{1-5} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2+2(1-5)}{1-5} \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & \frac{-4}{1-5} & \frac{-2}{1-5} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{2+2(1-5)}{1-5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & \frac{-4}{1-5} & \frac{-2}{1-5} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

בשורה 3 נקבל סתירה ולכן אין פתרון.

כאשר $k = 4$:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & \frac{-4}{k-5} & \frac{-2}{k-5} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{2+2(k-5)}{k-5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

אז יש אינסוף פתרונות.

כאשר $k = 5$: נחזור ללפני שחילקנו ב- $k-5$ ונציב $k = 5$:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -2 \\ 0 & k-5 & -4 & -2 \\ 0 & 1 & k & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -4 & -2 \\ 0 & 1 & 5 & 2 \end{pmatrix}$$

וברור שיש פתרון יחיד.

כלומר כאשר $k \neq 1, 4$ יש פתרון יחיד, כאשר $k = 1$ אין פתרון וכאשר $k = 4$ יש אינסוף פתרונות.

2. נחזור למטריצה המדורגת ונציב $k = 0$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & \frac{-4}{k-5} & \frac{-2}{k-5} \\ 0 & 0 & \frac{4+k(k-5)}{k-5} & \frac{2+2(k-5)}{k-5} \end{array} \right) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & \frac{-4}{-5} & \frac{-2}{-5} \\ 0 & 0 & \frac{4}{-5} & \frac{-8}{-5} \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow[R_2 \rightarrow -5R_2]{R_3 \rightarrow -5R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & -2 \\ 0 & -5 & -4 & -2 \\ 0 & 0 & 4 & -8 \end{array} \right) \xrightarrow[R_3 \rightarrow \frac{1}{4}R_3]{R_3 \rightarrow R_3 + R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & -2 \\ 0 & -5 & 0 & -10 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array} \right)$$

מהשורה השלישית נקבל $z = -2$, מהשנייה $y = 2$, ואז מהשורה הראשונה:

$$x - y - z = -2 \Rightarrow x = -2$$

אז הפתרון שלנו הוא:

$$(x, y, z) = (-2, 2, -2)$$

תרגיל 4.8

תהא $A = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, כאשר $\lambda_k \neq 0$ לכל k . מצאו פתרון למערכת $Ax = b$, לכל $b \in \mathbb{R}^n$.

פתרון:

נשים לב כי המערכת שלנו קרובה למדורגת:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \lambda_1 & \dots & 0 & b_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & \lambda_n & b_n \end{array} \right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \dots & 0 & \frac{b_1}{\lambda_1} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & \frac{b_n}{\lambda_n} \end{array} \right)$$

אז הפתרון למערכת הוא:

$$x_1 = \frac{b_1}{\lambda_1}, \dots, x_n = \frac{b_n}{\lambda_n}$$

4.1.3 ממ"ל הומוגנית ואי-הומוגנית

תזכורת

נניח ויש לנו ממ"ל $A\vec{x} = \vec{b}$, ויש לנו פתרון מסוים $\vec{v}_p$ (כלומר $A\vec{v}_p = \vec{b}$). נתבונן במערכת ההומוגנית $A\vec{x} = \vec{0}$, ונניח שיש לה פתרון כלשהו $\vec{w}$ (כלומר $A\vec{w} = \vec{0}$). נשים לב כי $\vec{u} = \vec{v}_p + \vec{w}$ הוא גם פתרון של הממ"ל האי-הומוגנית, היות ומתקיים:

$$A\vec{u} = A(\vec{v}_p + \vec{w}) = A\vec{v}_p + A\vec{w} = \vec{b} + \vec{0} = \vec{b}$$

כלומר, כל וקטור שהוא סכום של $\vec{v}_p$ עם פתרון של המערכת ההומוגנית הוא פתרון של המערכת המקורית.

נשים לב שגם ההפך הוא נכון, שאם $\vec{a}$ פתרון של הממ"ל האי-הומוגנית, אז בהכרח קיים פתרון $\vec{c}$ של הממ"ל ההומוגנית כך ש $\vec{a} = \vec{v}_p + \vec{c}$, ואכן, $\vec{c} = \vec{a} - \vec{v}_p$ מקיים $\vec{c} = \vec{a} - \vec{v}_p = \vec{b} - \vec{b} = \vec{0}$. $A\vec{c} = A(\vec{a} - \vec{v}_p) = A\vec{a} - A\vec{v}_p = \vec{b} - \vec{b} = \vec{0}$. כלומר, בהנתן פתרון $\vec{v}_p$ של הממ"ל, אוסף הפתרונות של הממ"ל האי-הומוגנית הוא בדיוק הקבוצה:

$$\{\vec{v}_p + \vec{w} | A\vec{w} = \vec{0}\}$$

תרגיל 4.9

פתרו את הממ"ל:

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ 2x + 2y = 2 \end{cases}$$

פתרון:

ננחש את הפתרון $(x, y) = (1, 0)$, ואז נתבונן במערכת ההומוגנית:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{R_2 \rightarrow R_2 - 2R_1} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

כלומר $x + y = 0$, כלומר $x = t, y = -t$ אז הפתרון הכללי הוא:

$$(x, y) = (t, -t) + (1, 0) = (t + 1, -t), \quad t \in \mathbb{R}$$

תרגיל 4.10

פתרו את הממ"ל:

$$\begin{cases} x + y = 2 \\ x + 2y = 3 \end{cases}$$

פתרון:

ננחש את הפתרון $(x, y) = (1, 1)$, ואז נתבונן במערכת ההומוגנית:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{R_2 \rightarrow R_2 - R_1} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{array} \right)$$

כלומר לממ"ל ההומוגנית המתאימה יש פתרון יחיד והוא טריוויאלי, ולכן הפתרון הכללי הוא מהצורה:

$$(x, y) = (0, 0) + (1, 1) = (1, 1)$$

במילים אחרות, יש למערכת פתרון יחיד, $(1, 1)$.

4.1.4 | תרגילים לתרגול עצמי

תרגיל 4.11

נתונה מערכת המשוואות הבאה:

$$\begin{cases} ax + ay + az = a \\ -x + y - az = 2 \\ 2x - ay + az = 1 \end{cases}$$

עבור מספר $a \in \mathbb{R}$.1. עבור אילו ערכי a למערכת יש פתרון יחיד, אינסוף פתרונות או אין פתרון?

2. כמה משתנים חופשיים יש למערכת? אילו משתנים הם החופשיים?

פתרון:

נעביר את הממ"ל לצורה מטריציונית ונדרג:

$$\begin{pmatrix} a & a & a & a \\ -1 & 1 & -a & 2 \\ 2 & -a & a & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} -1 & 1 & -a & 2 \\ a & a & a & a \\ 2 & -a & a & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & a & -2 \\ a & a & a & a \\ 2 & -a & a & 1 \end{pmatrix}$$

נניח כי $a \neq 0$, ונחלק את השורה השנייה ב- a :

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & a & -2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & -a & a & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & a & -2 \\ 0 & 2 & 1-a & 3 \\ 2 & -a & a & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & a & -2 \\ 0 & 2 & 1-a & 3 \\ 0 & 2-a & -a & 5 \end{pmatrix}$$

כלומר:

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & a & -2 \\ 0 & 1 & \frac{1-a}{2} & 1.5 \\ 0 & 2-a & -a & 5 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & a & -2 \\ 0 & 1 & \frac{1-a}{2} & 1.5 \\ 0 & 0 & -a - (2-a)\frac{1-a}{2} & 5 - (2-a)\frac{3}{2} \end{pmatrix} \rightsquigarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & a & -2 \\ 0 & 1 & \frac{1-a}{2} & 1.5 \\ 0 & 0 & \frac{2-a+a^2}{-2} & \frac{4+3a}{2} \end{pmatrix}$$

נבחין כי לכל $a \in \mathbb{R}$, $\frac{2-a+a^2}{-2} \neq 0$ (מדוע?) כלומר לכל $a \neq 0$ דרגת המטריצה מלאה, ולכן יש פתרון יחיד. נותר לבדוק את המקרה ש- $a = 0$:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -2 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 0 & 0.5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0.5 \\ 1 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0.5 \\ 0 & -1 & 0 & -2.5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

נבחין כי למערכת יש אינסוף פתרונות. סה"כ:

1. $a \neq 0$ יש פתרון יחיד
2. $a = 0$ יש אינסוף פתרונות

תרגיל 4.12

יהי $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$ פתרון של המערכת הבאה:

$$\begin{cases} y + z + t = 0 \\ x - y + z - t = 0 \\ -x + z - t = 0 \end{cases}$$

שמקיים $xyz = 8$. מצאו את ערך הביטוי:

$$x + y + z + t$$

פתרון:

נבין כיצד נראים פתרונות כלליים של המערכת, ואז נמצא אחד מבוקש. לשם כך, נדרג את המטריצה המתאימה לה:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

לכן פתרון נראה מהצורה:

$$\begin{pmatrix} -2t \\ -2t \\ t \\ t \end{pmatrix}$$

לכן עבור פתרון שמקיים:

$$4t^3 = xyz = 8 \Rightarrow t^3 = 2 \Rightarrow t = 2^{\frac{1}{3}}$$

לכן:

$$x + y + z + t = -2t - 2t + t + t = -2t = -2^{\frac{4}{3}}$$

תרגיל 4.13

הוכיחי או הפריכי את הטענות הבאות:

1. נתונה מערכת משוואות לינאריות $Ax = 0$, x_1, x_2 פתרונות שלה. אזי גם $x_1 - x_2$ פתרון של המערכת.
2. נתונה מערכת משוואות לינאריות $Cy = d$ כך ש y_1, y_2 פתרונות שלה, אזי לכל α, β כך ש $\alpha + \beta = 1$

מתקיים ש:

$$\alpha y_1 + \beta y_2$$

גם פתרון של המערכת.

פתרון:1. נוכיח. תהא $Ax = 0$ ממ"ל ויהיו x_1, x_2 פתרונות שלה. אזי מתקיים:

$$A(x_1 - x_2) = Ax_1 - Ax_2 = 0 - 0 = 0$$

ולכן מהגדרה גם ההפרש פתרון שלה.

2. נוכיח. תהא $Cy = d$ ממ"ל ויהיו y_1, y_2 פתרונות שלה. אזי, לכל α, β שסכומם 1, מתקיים:

$$C(\alpha y_1 + \beta y_2) = C(\alpha y_1) + C(\beta y_2) = \alpha Cy_1 + \beta Cy_2 = \alpha d + \beta d = (\alpha + \beta)d = d$$

כלומר, זה פתרון למערכת, כרצוי.

תרגיל 4.14

תהא הממ"ל:

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ \lambda x + \alpha y = 0 \end{cases}$$

הראי כי למערכת הבאה יש פתרון יחיד אם $\lambda \neq \alpha$.פתרון:

נעביר את המערכת למטריצת מקדמים.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \lambda & \alpha \end{pmatrix}$$

נפצל למקרים:

1. נניח כי $\lambda = 0$, ולכן הממ"ל הינו:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}$$

נשים לב כי אם $\alpha \neq 0$ המטריצה מדרגה מלאה (דרגה 2), ולכן יש פתרון יחיד, אך אם $\alpha = 0$ אזי הדרגה של המטריצה הינה 1, ויש אינסוף פתרונות. כלומר, יש פתרון יחיד אם $\lambda = 0 \neq \alpha$.

2. נניח כי $\lambda \neq 0$,

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & \frac{\alpha}{\lambda} \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & \frac{\alpha}{\lambda} - 1 \end{pmatrix}$$

ושב כדי שיהיה פתרון יחיד האיבר בשורה השנייה בעמודה השנייה צריך לא להתאפס, כלומר:

$$\frac{\alpha}{\lambda} - 1 \neq 0 \Leftrightarrow \frac{\alpha}{\lambda} \neq 1 \Leftrightarrow \alpha \neq \lambda$$

תרגיל 4.15.

תהא הממ"ל:

$$\begin{cases} ax + by = 0 \\ cx + dy = 0 \end{cases}$$

כאשר $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ שונים מאפס, הוכיחי כי אם $ad = cb = 1$ קיימים לממ"ל אינסוף פתרונות, ומצאי פתרון שאינו טריוויאלי.

פתרון:

נניח כי $ad = cb = 1$, כלומר $d = \frac{1}{a}$, $c = \frac{1}{b}$ אז הממ"ל הינו:

$$\begin{cases} ax + by = 0 \\ cx + dy = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ax + by = 0 \\ \frac{1}{b}x + \frac{1}{a}y = 0 \end{cases}$$

נכפיל את המשוואה השנייה ב ab ונקבל:

$$\begin{cases} ax + by = 0 \\ cx + dy = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ax + by = 0 \\ ax + by = 0 \end{cases}$$

כלומר, כל x, y המקיימים $ax + by = 0$ פתרון של הממ"ל, אז $ax = -by$, כלומר $x = -\frac{b}{a}y$, יש למשוואה הזו אינסוף פתרונות, דוגמא אפשרית הינה $x = -\frac{b}{a}$, $y = 1$.

תרגיל 4.16.

מצאו פולינום ממעלה 2 כך ש:

$$p(2) = 4, p(1) = 2, p(0) = 2$$

פתרון:

אכן, יהיה פולינום ממעלה 2:

$$p(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0$$

נרצה שהוא יקיים את ההצבות הדרושות, כלומר:

$$\begin{cases} 4 = p(2) = a_22^2 + a_12 + a_0 = 4a_2 + 2a_1 + a_0 \\ 2 = p(1) = a_2 + a_1 + a_0 \\ 2 = p(0) = a_20 + a_10 + a_0 = a_0 \end{cases}$$

כלומר קיבלנו מערכת משוואות ליניארית! נפתור אותה ונדרג:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 2 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array} \right)$$

שלאחר דירוג נותנת את:

$$\begin{cases} a_2 = 1 \\ a_1 = -1 \\ a_0 = 2 \end{cases}$$

4.2 | מבוא ללוגיקה - קריאה עצמית

לאורך הקורס נראה מספר "תבניות הוכחה" להוכיח טיעונים לוגיים, כעת, נתמקד בהדגמת השיטות דרך טענות בחומר שלמדנו.

4.2.1 | טענת לכל

טענת לכל היא טענת גרירה מהסוג "כל אובייקט המקיים x מקיים y ". להוכיח טענה כזאת, ניקח איבר כללי המקיים x , כלומר, איבר שלא הנחנו עליו דבר פרט לכך שהוא מקיים x , ונראה שההנחות הללו גוררות ש- y מתקיים גם כן.

תרגיל 4.17

כל $v \in \mathbb{R}^2$ המקיים:

$$\exists \lambda \in \mathbb{R}, \quad \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} v = 2v$$

הוא כפל בסקלר של הווקטור $w = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, כלומר קיים $\mu \in \mathbb{R}$ כך ש- $v = \mu w$.

פתרון:

נבחר וקטור כללי $v = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$, נניח כי הוא מקיים $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} v = 2v$ עבור קבוע כלשהו $\lambda \in \mathbb{R}$. נראה מה הנתון הזה מכתוב לנו על x, y :

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} v = 2v \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2x \\ x + 3y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \end{pmatrix}$$

כלומר, $x + 2y = 2y \Rightarrow x = -y$, כלומר הווקטור v הוא מהצורה:

$$v = \begin{pmatrix} -y \\ y \end{pmatrix} = y \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = yw$$

עבור $y \in \mathbb{R}$.

4.2.2 | טענת קיום

טענת קיים היא עוד סוג טענה שנראה הרבה, היא טענה מסוג "קיים x המקיים y ", הוכחה היא לכתוב את x ולהראות כי הוא מקיים את y .

תרגיל 4.18

קיימת מטריצה $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ שהיא גם סימטרית וגם אנטי-סימטרית.

פתרון:

נשים לב כי המטריצה $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ היא גם סימטרית, כי $A^t = 0 = A$, וגם אנטי-סימטרית, כי $A^t = 0 = -A$.

4.2.3 | שוויון קבוצות

בהינתן שתי קבוצות, A, B , נגדיר $A = B$ אם $A \subseteq B$ וגם $B \subseteq A$. במילים אחרות, אם נרצה להראות כי $A = B$, נראה כי:

$$\forall a \in A, \quad a \in B, \quad \text{וגם} \quad \forall b \in B, \quad b \in A$$

תרגיל 4.19

יהיו הקבוצות:

$$A = \left\{ v \in \mathbb{R}^2 \mid \exists w \in \mathbb{R}^2, v = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} w \right\}, \quad B = \left\{ \begin{pmatrix} \nu \\ \nu \end{pmatrix} \mid \nu \in \mathbb{R} \right\}$$

הראו כי $A = B$.

פתרון:

נראה כי $A \subseteq B$ וגם $B \subseteq A$.

• נראה כי $A \subseteq B$: יהא $v \in A$, לפי הגדרה, קיים $w = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ כך ש- $v = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} w = \begin{pmatrix} x \\ x \end{pmatrix}$.

נשים לב כי v הוא מהצורה $\begin{pmatrix} \nu \\ \nu \end{pmatrix}$ כאשר $\nu = x \in \mathbb{R}$, כלומר לפי הגדרת B , $v \in B$.

• נראה כי $B \subseteq A$: יהא $v \in B$, לפי הגדרה, קיים $\nu \in \mathbb{R}$ כך ש- $v = \begin{pmatrix} \nu \\ \nu \end{pmatrix}$.

נשים לב כי אם נבחר $w = \begin{pmatrix} \nu \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$, אז:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} w = \begin{pmatrix} \nu \\ \nu \end{pmatrix} = v$$

כלומר לפי הגדרת A , $v \in A$.

4.2.4 | הוכחה בשלילה

הוכחה בשלילה של טענה מתמטית מסתמכת על הנחה כי מטענה נכונה אפשר להסיק רק טענות נכונות. לכן, אם נניח כי הטענה שלנו שקרית, ונצליח להסיק מכך טענה שאנו יודעים שהיא שקרית, לא ייתכן כי ההנחה המקורית שלנו נכונה, כלומר הטענה המקורית שלנו לא יכולה להיות שקרית (ולכן היא אמת).

תרגיל 4.20.

הראו כי אין מטריצה $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ המקיימת:

$$A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad A \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

פתרון:

נניח בשלילה כי קיימת מטריצה $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ המקיימת את שלושת התנאים. מצד אחד אנו יודעים כי:

$$A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

מצד שני אנו יודעים כי כפל מטריצות מקיים את חוק הפילוג, ולכן:

$$A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = A \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + A \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

כלומר:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

זו כמובן טענה שקרית, ולכן ההנחה שלנו כי קיימת מטריצה A המקיימת את שלושת התנאים לא יכולה להיות נכונה. כלומר, אין מטריצה A המקיימת את שלושת התנאים.

4.2.5 | הוכחה באינדוקציה

הוכחה באינדוקציה היא שיטה מוכרת להוכחת טענות התלויות במספר טבעי n . ראשית, נוכיח את הטענה עבור $n = 1$. לאחר מכן, נניח כי הטענה מתקיימת עבור $n = k$, ונראה כי מכך נובע כי הטענה מתקיימת גם עבור $n = k+1$. מכיוון שהטענה מתקיימת עבור $n = 1$, ומכיוון שהוכחנו כי אם היא מתקיימת עבור $n = k$ אז היא מתקיימת גם עבור $n = k+1$, נוכל להסיק כי הטענה מתקיימת לכל מספר טבעי n .

נראה שקילות בין 2 גרסאות של המשפט היסודי של האלגברה.

תזכורת

המשפט היסודי של האלגברה (ניסוח 1):

לכל פולינום מרוכב לא קבוע $p(z)$ קיים שורש אחד לפחות.

המשפט היסודי של האלגברה (ניסוח 2):

לכל פולינום מרוכב $p(z)$ מדרגה $n \geq 1$, קיימים $\alpha, \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{C}$ כך ש:

$$p(z) = \alpha(z - \lambda_1)(z - \lambda_2) \dots (z - \lambda_n)$$

ברור כי (1) $\Rightarrow$ (2), נראה כי גם (2) $\Rightarrow$ (1).

תרגיל 4.21

הראו כי (2) $\Rightarrow$ (1), כלומר הניחו את גרסא (1) של המשפט היסודי של האלגברה, והראו כי: לכל פולינום מרוכב $p(z)$ מדרגה $n \geq 1$, קיימים $\alpha, \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{C}$ כך ש:

$$p(z) = \alpha(z - \lambda_1)(z - \lambda_2) \dots (z - \lambda_n)$$

פתרון:

נוכיח זאת באינדוקציה על n .

בסיס האינדוקציה: עבור $n = 1$, הפולינום הוא מהצורה:

$$p(z) = a_1 z + a_0 = a_1 \left(z - \left(-\frac{a_0}{a_1} \right) \right) = \alpha(z - \lambda_1), \quad a_1 \neq 0$$

כאשר $\alpha = a_1, \lambda_1 = -\frac{a_0}{a_1}$.

צעד האינדוקציה: נניח כי הטענה מתקיימת עבור $n = k$. יהא $p(z)$ פולינום מדרגה $k + 1$. לפי המשפט היסודי של האלגברה, קיים לו שורש אחד לפחות, נסמן אותו λ_1 . לפי משפט החילוק לפולינומים, קיים פולינום $q(z)$ מדרגה k כך ש:

$$p(z) = (z - \lambda_1)q(z)$$

לפי הנחת האינדוקציה, קיימים $\alpha, \lambda_2, \dots, \lambda_{k+1} \in \mathbb{C}$ כך ש:

$$q(z) = \alpha(z - \lambda_2)(z - \lambda_3) \dots (z - \lambda_{k+1})$$

ולכן:

$$p(z) = (z - \lambda_1)\alpha(z - \lambda_2)(z - \lambda_3) \dots (z - \lambda_{k+1}) = \alpha(z - \lambda_1)(z - \lambda_2) \dots (z - \lambda_{k+1})$$

והוכחנו את צעד האינדוקציה.

לכן, לפי עקרון האינדוקציה, הטענה מתקיימת לכל $n \geq 1$.

תרגול חמישי

5.1 | מרחבים וקטורים ותתי מרחבים וקטורים

תזכורת

הקבוצה V , יחד עם פעולת החיבור, וכפל בסקלר ב $\mathbb{R}$ נקראת מרחב וקטורי מעל שדה $\mathbb{R}$ אם מתקיים:

- סגירות לחיבור: $\forall u, v \in V, u + v \in V$.
 - סגירות לכפל בסקלר: $\forall \lambda \in \mathbb{R}, v \in V, \lambda v \in V$.
 - אסוציאטיביות בחיבור: $\forall v, u, w \in V, u + (v + w) = (u + v) + w$.
 - אסוציאטיביות בכפל בסקלר: $\forall v \in V, \lambda, \mu \in \mathbb{R}, (\lambda\mu)v = \mu(\lambda v)$.
 - חילופיות בחיבור: $\forall v, u \in V, u + v = v + u$.
 - כפל ביחידת השדה: $\forall v \in V, 1_R \cdot v = v$.
 - קיום וקטור האפס: $\exists 0 \in V, \forall v \in V, 0 + v = v + 0 = v$.
 - קיום נגדי חיבורי: $\forall v \in V, \exists (-v) \in V, (-v) + v = v + (-v) = 0$.
 - פילוג של חיבור בסקלר: $\forall v \in V, \lambda, \mu \in \mathbb{R}, (\lambda + \mu)v = \lambda v + \mu v$.
 - פילוג של חיבור הווקטורים: $\forall u, v \in V, \lambda \in \mathbb{R}, \lambda(u + v) = \lambda u + \lambda v$.
- כאשר איברי השדה נקראים סקלרים ואיברי המרחב נקראים וקטורים.

דוגמא 5.1

נראה כמה דוגמאות למרחבים וקטורים:

1. מרחב המטריצות $\mathbb{R}^{n \times m}$ מעל $\mathbb{R}$ עם חיבור וכפל בסקלר כמו שהגדרנו בתרגול הקודם.
2. $\mathbb{R}^n$ מעל השדה $\mathbb{R}$ כלומר n -ניות עם כפל בסקלר וחיבור איבר איבר.
3. מרחב הפולינומים $\mathbb{R}[x]$ מעל השדה $\mathbb{R}$ עם הפעולות שהגדרנו בתרגול 1 של חיבור פולינומים וכפל בסקלר.
4. מרחב הפולינומים עד מעלה n עם הפעולות כמו בסעיף הקודם, נסמן זאת $\mathbb{R}_{\leq n}[x]$ או $\mathbb{R}_n[x]$.
5. מרחב הפונקציות הממשיות מעל $\mathbb{R}$ עם פעולות החיבור והכפל בסקלר הרגילות של פונקציות.

תזכורת

יהי V מ"ו מעל שדה $\mathbb{R}$ ותהי $W \subset V$ תת קבוצה לא ריקה של V . נאמר כי W הוא תמ"ו מעל $\mathbb{R}$ אם הוא מ"ו עם אותן פעולות חיבור וקטורים וכפל בסקלר כמו V .

ראינו בהרצאה משפט:

תת קבוצה $W \subset V$ היא תת-מרחב וקטורי של V אם ומתקיימים שלושת התנאים הבאים:

$$1. \quad 0 \in W$$

2. W סגור לחיבור.

$$\forall w_1, w_2 \in W, \quad w_1 + w_2 \in W$$

3. W סגור לכפל בסקלר.

$$\forall w \in W, \lambda \in \mathbb{R}, \quad \lambda w \in W$$

תרגיל 5.2

בכל סעיף הוכיחו או הפריכו, האם הקבוצה הנתונה תמ"ו:

1.

$$A = \left\{ \begin{pmatrix} t \\ 1 \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{R} \right\} \subset \mathbb{R}^2$$

2.

$$A = \{p(x) \mid \deg(p) \in \mathbb{N}_{\text{odd}} \text{ או } p(x) = 0\} \subset \mathbb{R}[x]$$

3.

$$A = \left\{ \begin{pmatrix} t \\ 2t \\ 3t \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{R} \right\} \subset \mathbb{R}^3$$

4.

$$A = \left\{ p(x) \in \mathbb{R}[x] \mid \int_{-1}^1 p(x) dx = 0 \right\} \subset \mathbb{R}[x]$$

פתרון:

1. נשים לב כי וקטור האפס, $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, לא בא, A , אז A לא תת-מרחב.

2. נראה כי A אינה סגורה לחיבור:

$$2x^3 + x + \in A$$

$$-2x^3 - 4x^2 + 3 \in A$$

אבל:

$$2x^3 + x + 1 + (-2x^3 - 4x^2 + 3) = -4x^2 + x + 4 \notin A$$

3. נראה כי A תמ"ו של $\mathbb{R}^3$, נבדוק את שלושת התנאים:

$$\cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \cdot 0 \\ 3 \cdot 0 \end{pmatrix} \in A$$

• סגירות לחיבור: נניח ש $v_1, v_2 \in A$, כלומר קיימים $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$ כך ש:

$$v_1 = \begin{pmatrix} t_1 \\ 2t_1 \\ 3t_1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} t_2 \\ 2t_2 \\ 3t_2 \end{pmatrix}$$

אז:

$$(v_1 + v_2) = \begin{pmatrix} t_1 \\ 2t_1 \\ 3t_1 \end{pmatrix} + v_2 = \begin{pmatrix} t_2 \\ 2t_2 \\ 3t_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t_1 + t_2 \\ 2(t_1 + t_2) \\ 3(t_1 + t_2) \end{pmatrix} \in A$$

• סגירות לכפל בסקלר: נניח ש $v = \begin{pmatrix} t \\ 2t \\ 3t \end{pmatrix} \in A$, $\lambda \in \mathbb{R}$, אז:

$$\lambda v = \begin{pmatrix} \lambda t \\ 2(\lambda t) \\ 3(\lambda t) \end{pmatrix} \in A$$

אז A אכן תמ"ו של $\mathbb{R}^3$.

4. נבדוק את שלושת התנאים:

- פולינום האפס $p(x) = 0$ אכן מקיים $\int_{-1}^1 0 dx = 0$, ולכן $0 \in A$.
- סגירות לחיבור: נניח ש $p(x), q(x) \in A$, כלומר:

$$\int_{-1}^1 p(x) dx = 0, \quad \int_{-1}^1 q(x) dx = 0$$

אז:

$$\int_{-1}^1 (p(x) + q(x)) dx = \int_{-1}^1 p(x) dx + \int_{-1}^1 q(x) dx = 0 + 0 = 0$$

כלומר $p(x) + q(x) \in A$.

• סגירות לכפל בסקלר: נניח ש $p(x) \in A$, $\lambda \in \mathbb{R}$, אז:

$$\int_{-1}^1 \lambda p(x) dx = \lambda \int_{-1}^1 p(x) dx = \lambda \cdot 0 = 0$$

כלומר $\lambda p(x) \in A$.אז A אכן תמ"ו של $\mathbb{R}[x]$.

תרגיל 5.3

תהא $v \in \mathbb{R}^n$, הוכיחו כי הקבוצה:

$$W = \{\lambda v | \lambda \in \mathbb{R}\}$$

תמ"ו של $\mathbb{R}^n$.

פתרון:

נבדוק את שלושת התנאים:

• וקטור האפס: נבחר $\lambda = 0$, אז $0 \cdot v = \vec{0} \in W$.

• סגירות לחיבור: נניח ש $\lambda_1 v, \lambda_2 v \in W$, אז:

$$\lambda_1 v + \lambda_2 v = (\lambda_1 + \lambda_2)v \in W$$

• סגירות לכפל בסקלר: נניח ש $\lambda v \in W$, $\alpha \in \mathbb{R}$, אז:

$$\alpha(\lambda v) = (\alpha\lambda)v \in W$$

תרגיל 5.4

יהא $W \subset \mathbb{R}^2$ תמ"ו, הוכיחו כי W הוא בהכרח אחד משלושת הצורות הבאות:

1. $W = \{\vec{0}\}$.

2. $W = \{\lambda v | \lambda \in \mathbb{R}\}$ עבור וקטור $v \neq \vec{0}$ כלשהו.

3. $W = \mathbb{R}^2$.

פתרון:

יהא $W \subset \mathbb{R}^2$ תת-מרחב וקטורי, משום שהוא תמ"ו הוא מכיל את וקטור האפס. אם $W = \{\vec{0}\}$, אז הגענו למקרה הראשון, אחרת, קיים $v_1 \in W$, $v_1 \neq \vec{0}$, היות ו $v_1 \in W$ סגור לכפל בסקלר, אז $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \lambda v_1 \in W$. אם $W = \{\lambda v_1 | \lambda \in \mathbb{R}\}$, הגענו למקרה השני, אחרת, קיים $v_2 \in W$ כך ש $v_2 \notin \{\lambda v_1 | \lambda \in \mathbb{R}\}$, נראה כי זה מוביל למקרה השלישי - כלומר $W = \mathbb{R}^2$. נסמן $v_1 = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$, אנו יודעים כי v_2 אינו כפל בסקלר של v_1 . נפריד למקרים:

1. אם $a = 0$, אז $b \neq 0$, כי $v_1 \neq \vec{0}$, מסגירות בכפל בסקלר נקבל כי $\frac{1}{b}v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in W$.

2. אם $a \neq 0$, אז מסגירות לחיבור נקבל כי:

$$\frac{c}{a} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{cb}{a} - d \end{pmatrix} \in W$$

נשים לב כי $\frac{cb}{a} - d \neq 0$, כי אחרת היינו מקבלים:

$$\frac{c}{a}v_1 - v_2 = 0 \Rightarrow v_2 = \frac{c}{a}v_1$$

בסתירה להנחתינו (כי v_2 לא כפל בסקלר של v_1). מסגירות לכפל בסקלר נקבל כי:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in W$$

בכל מקרה, קיבלנו כי $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in W$. נשים לב כי לא ייתכן כי $a = 0$ וגם $c = 0$, כי אז v_2 יהיה כפל בסקלר של v_1 (מדוע?). בה"כ נניח כי $a \neq 0$, מסגירות לחיבור וכפל בסקלר נקבל כי:

$$\frac{1}{a} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} - \frac{b}{a} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in W$$

קיבלנו כי $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in W$, ולכן, מסגירות לחיבור וכפל בסקלר נקבל כי:

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in W$$

כלומר, $W = \mathbb{R}^2$.

תרגול עצמי: פתרו את התרגיל הזה בדרך קצרה יותר,

הראו כי אם $v_2 = \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} \notin \{\lambda v_1 \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$, כאשר $v_1 = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$, וכמובן $v_1, v_2 \neq \vec{0}$, אז לכל $x, y \in \mathbb{R}$ יש לממ"ל:

$$\left(\begin{array}{cc|c} a & c & x \\ b & d & y \end{array} \right)$$

פתרון יחיד, והסבירו מדוע זה גורר כי $W = \mathbb{R}^2$.

תרגיל 5.5.

יהא $W \subset \mathbb{R}_{\leq 1}[x]$ תמ"ו כך ש $p_1(x) = x + 1, p_2(x) = 2x + 1 \in W$, הוכיחו כי $W = \mathbb{R}_{\leq 1}[x]$.

פתרון:

נראה כי $W = \mathbb{R}_{\leq 1}[x]$. נשים לב כי אם $p_1(x) \in W$, אז לכל סקלר $\alpha \in \mathbb{R}$, גם $\alpha p_1(x) \in W$, ובדומה ל $p_2(x)$, יותר מכך, היות ו W סגור לחיבור, אז:

$$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \quad \alpha p_1(x) + \beta p_2(x) \in W$$

יהא $p(x) = ax + b$ כלשהו, נרצה להראות כי $p(x) \in W$, נוכל לעשות זאת אם נמצא $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ כך



ש $\alpha p_1(x) + \beta p_2(x) = p(x)$ כלומר:

$$p(x) = ax + b = \alpha(x + 1) + \beta(2x + 1) = (\alpha + 2\beta)x + (\alpha + \beta) \Rightarrow \begin{cases} a = \alpha + 2\beta \\ b = \alpha + \beta \end{cases}$$

קיבלנו ממ"ל:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

כלומר:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & | & a \\ 1 & 1 & | & b \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 \rightarrow R_2 - R_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & | & a \\ 0 & -1 & | & b - a \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 \rightarrow -R_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & | & a \\ 0 & 1 & | & a - b \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1 \rightarrow R_1 - 2R_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & | & 2b - a \\ 0 & 1 & | & a - b \end{pmatrix}$$

כלומר:

$$p(x) = ax + b = \alpha p_1(x) + \beta p_2(x) = (2b - a)p_1(x) + (a - b)p_2(x)$$

5.2 | איחוד וחיתוך תתי מרחבים וקטוריים

תרגיל 5.6.

יהא V מרחב וקטורי ו W_1, W_2 שני תמ"ו שלו. הוכיחו כי, $W_1 \cap W_2$ תמ"ו של V כאשר:

$$W_1 \cap W_2 = \{v | v \in W_1 \text{ וגם } v \in W_2\}$$

פתרון:

נבדוק את שלושת התנאים:

- היות ו W_1, W_2 תמ"ו, אז $0 \in W_1$ וגם $0 \in W_2$, ולכן $0 \in W_1 \cap W_2$.
- יהיו $v_1, v_2 \in W_1 \cap W_2$, אז $v_1, v_2 \in W_1$ וגם $v_1, v_2 \in W_2$. מאחר ו W_1, W_2 תמ"ו, אז:

$$v_1 + v_2 \in W_1 \quad \text{וגם} \quad v_1 + v_2 \in W_2$$

$$\text{כלומר } v_1 + v_2 \in W_1 \cap W_2.$$

- יהא $v \in W_1 \cap W_2$ ו $\lambda \in \mathbb{R}$, אז $v \in W_1$ וגם $v \in W_2$. מאחר ו W_1, W_2 תמ"ו, אז:

$$\lambda v \in W_1 \quad \text{וגם} \quad \lambda v \in W_2$$

$$\text{כלומר } \lambda v \in W_1 \cap W_2.$$

תרגיל 5.7.

יהא V מרחב וקטורי ו W_1, W_2 שני תמ"ו שלו. הוכחו או הפריכו, כי $W_1 \cup W_2$ תמ"ו של V כאשר:

$$W_1 \cup W_2 = \{v | v \in W_1 \text{ או } v \in W_2\}$$

פתרון:

נראה שזה לא נכון, יהא $V = \mathbb{R}^2$ ותתי המרחבים הבאים:

$$W_1 = \left\{ \begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{R} \right\}, \quad W_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ t \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{R} \right\}$$

ראינו פעמים רבות כי W_1, W_2 הם תתי מרחבים וקטוריים של $\mathbb{R}^2$. נסמן $W = W_1 \cup W_2$, אז נשים לב כי

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in W, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in W$$

אבל:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \notin W$$

כלומר, W לא סגור לחיבור ולכן לא תת מרחב וקטורי של V .

תרגיל 5.8.

יהיו V מרחב וקטורי ו W_1, W_2 שני תמ"ו שלו. הוכיחו כי, $W_1 \cup W_2$ תמ"ו של V אם ורק אם $W_1 \subset W_2$ או $W_2 \subset W_1$.

פתרון:

הכיוון הראשון:

בה"כ $W_1 \subset W_2$, אז יש להראות כי $W_1 \cup W_2$ תמ"ו של V , ואכן, $W_1 \cup W_2 = W_2$ שהוא תמ"ו של V . הכיוון השני:

נראה כי אם W_1 לא מוכלל ב W_2 וגם W_2 לא מוכלל ב W_1 , אז $W_1 \cup W_2$ לא תמ"ו. במקרה הנ"ל, קיים $v_1 \in W_1$, אבל $v_1 \notin W_2$ וגם $v_2 \in W_2$, $v_2 \notin W_1$, נראה כי $v_1 + v_2 \notin W_1 \cup W_2$, נניח בשלילה כי $v_1 + v_2 \in W_1 \cup W_2$, אבל אז מסגירות החיבור של W_1 מתקיים:

$$\underbrace{v_1 + v_2}_{\in W_1} + \underbrace{(-v_1)}_{\in W_1} = v_2 \in W_1$$

שזו סתירה להנחתנו.

ובאותה צורה, אם $v_1 + v_2$ היה ב W_2 היה מתקיים:

$$\underbrace{v_1 + v_2}_{\in W_2} + \underbrace{(-v_2)}_{\in W_2} = v_1 \in W_2$$

שזו גם סתירה, כלומר $v_1 + v_2$ לא ב V_1 וגם לא ב V_2 , אז הוא לא ב $V_1 \cup V_2$, כלומר $V_1 \cup V_2$ לא סגור לחיבור.

5.3 | סכום של תתי מרחבים

תזכורת

יהיו W_1, W_2 תמ"ו של מרחב וקטורי V . נסמן:

$$W_1 + W_2 = \{w_1 + w_2 \mid w_1 \in W_1, w_2 \in W_2\}$$

אז $W_1 + W_2$ הוא תמ"ו של V .

תרגיל 5.9

נסמן:

$$W_1 = \left\{ \begin{pmatrix} t \\ t \\ s \end{pmatrix} \mid t, s \in \mathbb{R} \right\}, \quad W_2 = \left\{ \begin{pmatrix} s \\ t \\ 2t \end{pmatrix} \mid s, t \in \mathbb{R} \right\}$$

W_1, W_2 תתי מרחבים של $\mathbb{R}^3$ (אין צורך להוכיח זאת). הוכיחו כי $W_1 + W_2 = \mathbb{R}^3$.

פתרון:

נראה כי כל וקטור ב- $\mathbb{R}^3$ ניתן לכתוב בתור סכום של וקטור מ- W_1 ווקטור מ- W_2 .
יהא

$$v = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

נרצה למצוא $w_1 \in W_1, w_2 \in W_2$ כך ש- $v = w_1 + w_2$. נרצה לחפש $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ כך ש:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} a \\ a \\ b \end{pmatrix}}_{\in W_1} + \underbrace{\begin{pmatrix} c \\ d \\ 2d \end{pmatrix}}_{\in W_2} = \begin{pmatrix} a+c \\ a+d \\ b+2d \end{pmatrix}$$

נקבל ממ"ל:

$$\begin{cases} a+c=x \\ a+d=y \\ b+2d=z \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

כלומר:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & x \\ 1 & 0 & 0 & 1 & y \\ 0 & 1 & 0 & 2 & z \end{array} \right) \Rightarrow \dots \Rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & y \\ 0 & 1 & 0 & 2 & z \\ 0 & 0 & 1 & -1 & x-y \end{array} \right)$$

למערכת הזו יש (אינסוף!) פתרונות; נבחר למשל $a=y, b=z, c=x-y, d=0$, ונקבל:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ a \\ b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c \\ d \\ 2d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x-y \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

שימו לב כי מצאנו זאת לכל וקטור ב- $\mathbb{R}^3$, למשל:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}}_{\in W_1} + \underbrace{\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\in W_2}$$

5.4 | סכום ישר של תתי מרחבים

תזכורת

יהיו W_1, W_2 תמ"ו של מרחב וקטורי V . מקרה מיוחד, בו נקרא ל- W_1, W_2 סכום ישר ונסמן $W_1 + W_2 = W_1 \oplus W_2$ הוא כאשר:

$$W_1 \cap W_2 = \{0\}$$

תרגיל 5.10

יהא V מ"ו בעל זוג תמ"ו W_1, W_2 אז $W_1 \cap W_2 = \{0\}$ (כלומר $W_1 + W_2 = W_1 \oplus W_2$) אם ורק אם לכל $v \in W_1 + W_2$ קיימים ביחידות $w_1 \in W_1, w_2 \in W_2$ כך ש- $v = w_1 + w_2$.

פתרון:

נניח כי קיים פירוק יחיד, ונניח בשלילה כי $0 \neq u \in W_1 \cap W_2$, יהא $v \in W_1 + W_2$ עם פירוק $v = w_1 + w_2$, אבל אז:

$$v = \underbrace{w_1 + u}_{\in W_1} + \underbrace{w_2 - u}_{\in W_2}$$

בסתירה להצגה היחידה של v .

נניח כי $W_1 \cap W_2 = \{0\}$, יהא $v \in W_1 + W_2$ כאשר $w_1, u_1 \in W_1, w_2, u_2 \in W_2$ אז נקבל:

$$W_1 \ni w_1 - u_1 = u_2 - w_2 \in W_2$$

כלומר $0 = w_1 - u_1$ או $w_1 = u_1$ וכנ"ל עבור $w_2 = u_2$ ולכן קיימת הצגה יחידה.

תרגיל 5.11

- הראו כי אוסף המטריצות מסדר $n \times n$ הסימטריות, אותם נסמן Sym_n , תמ"ו של $\mathbb{R}^{n \times n}$.
- הראו כי אוסף המטריצות מסדר $n \times n$ האנטי-סימטריות, אותם נסמן ASym_n , תמ"ו של $\mathbb{R}^{n \times n}$.
- הוכיחו כי $\mathbb{R}^{n \times n} = \text{Sym}_n \oplus \text{ASym}_n$.

פתרון:

1. נבדוק את הקריטריונים:

(א) מטריצת האפס היא סימטרית,

(ב) יהיו $A, B \in \text{Sym}_n$, כלומר $A^t = A, B^t = B$, אז:

$$(A + B)^t = A^t + B^t = (A + B)$$

כלומר $(A + B) \in \text{Sym}_n$.

(ג) יהא $A \in \text{Sym}_n$, כלומר $A = A^t, \lambda \in \mathbb{R}$, אז:

$$(\lambda A)^t = \lambda A^t = \lambda A$$

כלומר $(\lambda A) \in \text{Sym}_n$.

2. ההוכחה זהה למקרה של Sym_n ומושאתרת כתרגיל.

3. יש לנו שני דברים להוכיח, ראשית ש $\mathbb{R}^{n \times n} = \text{Sym}_n + \text{ASym}_n$, ושנית שמדובר בסכום ישר.

• נזכר שבתרגול קודם ראינו שלכל מטריצה $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, מתקיים:

$$A = \underbrace{\frac{1}{2}(A + A^t)}_{\text{סימטרית}} + \underbrace{\frac{1}{2}(A - A^t)}_{\text{אנטי-סימטרית}}$$

כלומר, $\mathbb{R}^{n \times n} = \text{Sym}_n + \text{ASym}_n$.

• יש לנו שתי דרכים שקולות להראות שמדובר בסכום ישר, אחת כבר ראינו בעבר, שכל מטריצה ריבועית ניתן לכתוב בתור סכום של מטריצה סימטרית ואנטי-סימטרית בצורה יחידה. הדרך השנייה היא להראות ש $\text{Sym}_n \cap \text{ASym}_n = \{0\}$, כלומר שהמטריצה היחידה שהיא גם סימטרית וגם אנטי-סימטרית היא מטריצת האפס, זו גם עובדה שראינו מספר פעמים.

5.5 | תרגילים לתרגול עצמי**תרגיל 5.12.**

האם המרחבים הבאים, עם הפעולות המוגדרות מ"ו מעל $\mathbb{R}$?

$$1. (x, y) \oplus (z, w) = (x + z, y + w), \lambda \odot (x, y) = (0, 0), V = \mathbb{R}^2.$$

$$2. V_2 = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid a, b, c, d \in \mathbb{R}, a \cdot b = 0 \right\} \text{ במטריצות.}$$

$$3. \lambda \odot x = x^\lambda, x \oplus y = xy, V_3 = \{x \in \mathbb{R} | x > 0\}$$

פתרון:

1. V_1 לא מ"ו כי למשל $(1, 1) \neq (0, 0) = 1 \cdot (1, 1)$, וזו סתירה לאקסיומות "כפל ביחידת השדה".

2. נראה כי V_2 לא סגור לחיבור, ולכן לא מ"ו, למשל:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in V_2$$

אבל:

$$A + B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \notin V_2$$

3. נבדוק כל אקסיומה:

- סגירות לחיבור: נניח ש $x, y \in V_3$, כלומר $x > 0, y > 0$, אז:

$$x \oplus y = xy > 0 \Rightarrow x \oplus y \in V_3$$
 - סגירות לכפל בסקלר: נניח ש $x \in V_3, \lambda \in \mathbb{R}$, כלומר $x > 0$, אז:

$$\lambda \odot x = x^\lambda > 0 \Rightarrow \lambda \odot x \in V_3$$
 - אסוציאטיביות בחיבור: נניח ש $x, y, z \in V_3$, כלומר $x, y, z > 0$, אז:

$$x \oplus (y \oplus z) = x \oplus (yz) = x(yz) = (xy)z = (x \oplus y) \oplus z$$
 - אסוציאטיביות בכפל בסקלר: נניח ש $x \in V_3, \lambda, \mu \in \mathbb{R}$, כלומר $x > 0$, אז:

$$(\lambda\mu) \odot x = x^{\lambda\mu} = x^{\mu\lambda} = (x^\mu)^\lambda = \mu \odot (\lambda \odot x)$$
 - חילופיות בחיבור: נניח ש $x, y \in V_3$, כלומר $x, y > 0$, אז:

$$x \oplus y = xy = yx = y \oplus x$$
 - כפל ביחידת השדה: נניח ש $x \in V_3$, כלומר $x > 0$, אז:

$$1 \odot x = x^1 = x$$
 - קיום וקטור האפס: נבחר $1 \in V_3$ כוקטור האפס, כי $\forall x \in V_3, x \oplus 1 = x \cdot 1 = x$.
 - קיום נגדי חיבורי: נניח ש $x \in V_3$, כלומר $x > 0$, אז $x^{-1} = \frac{1}{x} \in V_3$ כי $x^{-1} > 0$, ומתקיים:

$$x \oplus x^{-1} = x \cdot x^{-1} = 1$$
- וראינו כי 1 הוא וקטור האפס של המרחב.
- פילוג של חיבור בסקלר: נניח ש $x \in V_3, \lambda, \mu \in \mathbb{R}$, כלומר $x > 0$, אז:

$$(\lambda + \mu) \odot x = x^{\lambda+\mu} = x^\lambda \cdot x^\mu = (\lambda \odot x) \oplus (\mu \odot x)$$
 - פילוג של חיבור הווקטורים: נניח ש $x, y \in V_3, \lambda \in \mathbb{R}$, כלומר $x, y > 0$, אז:

$$\lambda \odot (x \oplus y) = \lambda \odot (xy) = (xy)^\lambda = x^\lambda y^\lambda = (\lambda \odot x) \oplus (\lambda \odot y)$$
- לכן, V_3 הוא מ"ו מעל $\mathbb{R}$.

תרגיל 5.13

תהא $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$, נסמן:

$$N(A) = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^m \mid A\vec{x} = \vec{0}\}$$

הראו כי $N(A)$ הוא תת-מרחב של $\mathbb{R}^m$.

פתרון:

יש לנו 3 תנאים לבדוק:

1. וקטור האפס: $A\vec{0} = \vec{0}$, אז $\vec{0} \in N(A)$.

2. סגירות לחיבור: נניח ש $\vec{u}, \vec{v} \in N(A)$, כלומר $A\vec{u} = \vec{0}$ ו $A\vec{v} = \vec{0}$, אז:

$$A(\vec{u} + \vec{v}) = A\vec{u} + A\vec{v} = \vec{0} + \vec{0} = \vec{0}$$

כלומר, $\vec{u} + \vec{v} \in N(A)$.

3. סגירות לכפל בסקלר: נניח ש $\vec{u} \in N(A)$, $\lambda \in \mathbb{R}$, כלומר $A\vec{u} = \vec{0}$, אז:

$$A(\lambda\vec{u}) = \lambda A\vec{u} = \lambda \cdot \vec{0} = \vec{0}$$

כלומר, $\lambda\vec{u} \in N(A)$.

לכן, $N(A)$ הוא תת-מרחב של $\mathbb{R}^m$.

תרגיל 5.14

בכל סעיף, קבעו האם U תמ"ו של V . האם המרחבים הבאים תתי מרחבים וקטורים? אם U תמ"ו של V מצאו ביטוי מפורש לאיבר כללי ב U .

1.

$$U := \left\{ \begin{pmatrix} t \\ t^2 \\ 0 \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{R} \right\}, \quad V = \mathbb{R}^3$$

2. עבור $A = \text{diag}(2, 3, 4)$,

$$U := \{B \in \mathbb{R}^{3 \times 3} \mid BA = AB\}, \quad V = \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

3. עבור $A = \text{diag}(2, 3, 4)$,

$$U := \{C \in \mathbb{R}^{3 \times 3} \mid (CA)_{11} = 2C_{11}, (CA)_{22} = 3C_{22}, (CA)_{33} = 4C_{33}\}, \quad V = \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

פתרון:

1. נשים לב כי U לא סגורה לחיבור, ולכן לא תמ".

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} \in U$$

אבל:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} \notin U$$

2. נראה כי U הוא תת מרחב וקטורי של $\mathbb{R}^{3 \times 3}$.

- מטריצת האפס אכן מקיימת $0A = A0$ ולכן $0 \in U$.
- יהיו $B_1, B_2 \in U$, כלומר $B_1A = AB_1$ ו $B_2A = AB_2$, נבחן את הסכום:
 $(B_1 + B_2)A = B_1A + B_2A = AB_1 + AB_2 = A(B_1 + B_2)$
- לכן הסכום $B_1 + B_2$ מתחלף עם A כלומר שייך ל U .
- נראה סגירות לכפל בסקלר, תהא $\lambda \in \mathbb{R}$ ו $B \in U$ כלומר $BA = AB$, אז:

$$(\lambda B)A = \lambda(BA) = \lambda(AB) = A(\lambda B)$$

כלומר גם λB מתחלף עם A ולכן שייך ל U .

נמצא איבר כללי ב U , נסמן:

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}$$

נחשב את BA ו AB :

$$BA = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2b_{11} & 3b_{12} & 4b_{13} \\ 2b_{21} & 3b_{22} & 4b_{23} \\ 2b_{31} & 3b_{32} & 4b_{33} \end{pmatrix}$$

$$AB = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2b_{11} & 2b_{12} & 2b_{13} \\ 3b_{21} & 3b_{22} & 3b_{23} \\ 4b_{31} & 4b_{32} & 4b_{33} \end{pmatrix}$$

נרצה ש $BA = AB$, כלומר:

$$\begin{pmatrix} 2b_{11} & 3b_{12} & 4b_{13} \\ 2b_{21} & 3b_{22} & 4b_{23} \\ 2b_{31} & 3b_{32} & 4b_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2b_{11} & 2b_{12} & 2b_{13} \\ 3b_{21} & 3b_{22} & 3b_{23} \\ 4b_{31} & 4b_{32} & 4b_{33} \end{pmatrix}$$

נקבל את המערכת:

$$\begin{cases} 3b_{12} = 2b_{12} \\ 4b_{13} = 2b_{13} \\ 2b_{21} = 3b_{21} \\ 4b_{23} = 3b_{23} \\ 2b_{31} = 4b_{31} \\ 3b_{32} = 4b_{32} \end{cases} \iff \begin{cases} b_{12} = 0 \\ b_{13} = 0 \\ b_{21} = 0 \\ b_{23} = 0 \\ b_{31} = 0 \\ b_{32} = 0 \end{cases}$$

כלומר:

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix} \mid b_{12} = b_{13} = b_{21} = b_{23} = b_{31} = b_{32} = 0, b_{11}, b_{22}, b_{33} \in \mathbb{R} \right\}$$

או:

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$$

3. נתחיל בלמצוא מפורשת את U .

נניח כי $C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ הוא ב U אמ"מ:

$$(CA)_{11} = 2C_{11} = 2c_{11}, (CA)_{22} = 3C_{22} = 3c_{22}, (CA)_{33} = 4C_{33} = 4c_{33}$$

אבל:

$$CA = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2c_{11} & 3c_{12} & 4c_{13} \\ 2c_{21} & 3c_{22} & 4c_{23} \\ 2c_{31} & 3c_{32} & 4c_{33} \end{pmatrix}$$

אז מתקיים:

$$(CA)_{11} = 2c_{11}, (CA)_{22} = 3c_{22}, (CA)_{33} = 4c_{33}$$

כלומר, כל מטריצה ב $\mathbb{R}^{3 \times 3}$ מקיימת את התנאים, ולכן היא ב U , כלומר:

$$\mathbb{R}^{3 \times 3} \subseteq U \subseteq \mathbb{R}^{3 \times 3} \implies \mathbb{R}^{3 \times 3} = U$$

וכמובן ש $U = V$ הוא תת מרחב וקטורי של V .

תרגול שישי

6.1 | צירופים לינאריים

תזכורת

יהא V מ"ו מעל $\mathbb{R}$, נאמר כי $v \in V$ הוא צירוף לינארי של $w_1, \dots, w_n \in V$ אם קיימים $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ כך ש:

$$v = a_1 w_1 + a_2 w_2 + \dots + a_n w_n$$

דרך נוספת לכתוב זאת היא:

$$v = \sum_{i=1}^n a_i w_i$$

6.1. תרגיל

בדקו האם:

$$w = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

צ"ל של:

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$$

פתרון:

נחפש $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ כך ש $w = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3$:

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 + \lambda_2 \\ \lambda_2 + 3\lambda_3 \\ \lambda_2 + 4\lambda_3 \\ \lambda_2 + 5\lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

אז יש לנו ממ"ל:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 5 & 4 \end{array} \right) \xrightarrow{\text{דירוג}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right)$$

לממ"ל הזה פתרון יחיד:

$$\lambda_1 = 2, \quad \lambda_2 = -1, \quad \lambda_3 = 1$$

כלומר w אכן צ"ל של v_1, v_2, v_3 :

$$2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

תרגיל 6.2

בדקו האם:

$$p(x) = x^3 + 2x^2 + 3$$

צ"ל של:

$$q_1(x) = x^2$$

$$q_2(x) = x^3 + 1$$

$$q_3(x) = x^3 + x^2 + x$$

מעל השדה $\mathbb{R}$.

פתרון:

נחפש $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ כך ש:

$$\lambda_1 q_1(x) + \lambda_2 q_2(x) + \lambda_3 q_3(x) = p(x)$$

אז:

$$x^3(\lambda_2 + \lambda_3) + x^2(\lambda_1 + \lambda_3) + x(\lambda_3) + (\lambda_2) = x^3 + 2x^2 + 3$$

כלומר:

$$\begin{cases} \lambda_2 + \lambda_3 = 1 \\ \lambda_1 + \lambda_3 = 2 \\ \lambda_3 = 0 \\ \lambda_2 = 3 \end{cases}$$

מהמשוואה הראשונה, השלישית ורביעית אנו כבר רואים שאין פתרון, כלומר $p(x)$ לא צ"ל של q_1, q_2, q_3 .

6.2 | מרחב הפרוש

תזכורת

יהיו $W = \{w_1, \dots, w_n\} \subset V$ נסמן:

$$\text{span}_{\mathbb{F}}(W) = \text{span}_{\mathbb{F}}(w_1, \dots, w_n) = \{a_1 w_1 + a_2 w_2 + \dots + a_n w_n \mid a_1, \dots, a_n \in \mathbb{F}\}$$

אם $\text{span}_{\mathbb{F}}(W) = V$ נאמר כי W פורשת את V .

תרגיל 6.3

נסמן:

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

הראו כי $\text{span}(v_1, v_2, v_3) = \mathbb{R}^3$.

פתרון:

יהא $v = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$, נראה כי $v \in \text{span}(v_1, v_2, v_3)$, כלומר נרצה למצוא $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ כך ש:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 + \lambda_2 \\ \lambda_3 \\ \lambda_1 \end{pmatrix}$$

זהו הממ"ל:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & x \\ 0 & 0 & 1 & y \\ 1 & 0 & 0 & z \end{array} \right)$$

קל לנחש את הפתרון:

$$\lambda_1 = z, \quad \lambda_2 = x - z, \quad \lambda_3 = y$$

כלומר, לכל $x, y, z \in \mathbb{R}$,

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = z \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + (x - z) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in \text{span}(v_1, v_2, v_3)$$

ולכן $\text{span}(v_1, v_2, v_3) = \mathbb{R}^3$.

תרגיל 6.4.

יהא V מ"ו מעל $\mathbb{R}$. יהיו $v_1, \dots, v_n \in V$, הראו כי $W = \text{span}(v_1, \dots, v_n)$ הוא תת-מרחב של V .

פתרון:

נבדוק את שלושת התנאים:

- וקטור האפס הוא צ"ל של $v_1, \dots, v_n$ כאשר כל המקדמים הם אפס, כלומר:

$$\vec{0} = 0 \cdot v_1 + 0 \cdot v_2 + \dots + 0 \cdot v_n \in \text{span}(v_1, \dots, v_n)$$

- יהא $u, v \in \text{span}(v_1, \dots, v_n)$, כלומר קיימים $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n \in \mathbb{R}$ כך ש:

$$u = a_1 v_1 + a_2 v_2 + \dots + a_n v_n$$

$$v = b_1 v_1 + b_2 v_2 + \dots + b_n v_n$$

אז:

$$u + v = (a_1 + b_1)v_1 + (a_2 + b_2)v_2 + \dots + (a_n + b_n)v_n \in \text{span}(v_1, \dots, v_n)$$

- יהא $v \in \text{span}(v_1, \dots, v_n)$, כלומר קיימים $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ כך ש:

$$v = a_1 v_1 + a_2 v_2 + \dots + a_n v_n$$

אז עבור כל $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$\lambda v = (\lambda a_1)v_1 + (\lambda a_2)v_2 + \dots + (\lambda a_n)v_n \in \text{span}(v_1, \dots, v_n)$$

תרגיל 6.5.

יהא V מ"ו מעל $\mathbb{R}$ ויהיו תתי קבוצות שלו:

$$S := \{w_1, \dots, w_n\} \quad T := \{u_1, \dots, u_m\}$$

הוכיחו כי:

$$\text{span}(S \cup T) = \text{span}(S) + \text{span}(T)$$

פתרון:

נרצה להראות הכלה דו כיוונית.

- נראה כי $\text{span}(S \cup T) \subseteq \text{span}(S) + \text{span}(T)$, יהא $v \in \text{span}(S \cup T)$, אז קיימים $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_m \in \mathbb{R}$ כך ש:

$$v = a_1 w_1 + \dots + a_n w_n + b_1 u_1 + \dots + b_m u_m$$

כמובן כי:

$$a_1 w_1 + \dots + a_n w_n \in \text{span}(S) \quad b_1 u_1 + \dots + b_m u_m \in \text{span}(T)$$

כלומר:

$$v = \underbrace{(a_1 w_1 + \dots + a_n w_n)}_{\in \text{span}(S)} + \underbrace{(b_1 u_1 + \dots + b_m u_m)}_{\in \text{span}(T)} \in \text{span}(S) + \text{span}(T)$$

• נראה כי $\text{span}(S) + \text{span}(T) \subseteq \text{span}(S \cup T)$, יהא $v \in \text{span}(S) + \text{span}(T)$, אז קיימים:

$$v_S \in \text{span}(S) \quad v_T \in \text{span}(T)$$

כלומר, קיימים $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_m \in \mathbb{R}$ כך ש:

$$v_S = a_1 w_1 + \dots + a_n w_n \quad v_T = b_1 u_1 + \dots + b_m u_m$$

ולכן:

$$v = v_S + v_T = a_1 w_1 + \dots + a_n w_n + b_1 u_1 + \dots + b_m u_m \in \text{span}(S \cup T)$$

תרגיל 6.6.

מצאו קבוצה פורשת לתמ"ו הבאים (אין צורך להוכיח כי הם תתי מרחבים).

1. $W = \{p(x) \in \mathbb{R}_3[x] \mid p(1) = p(-1)\}$ עבור $V = \mathbb{R}_3[x]$.

2. אוסף הוקטורים $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$ שפתורים את הממ"ל:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 0 \\ -x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

3.

$$W = \{M \in \mathbb{R}^{2 \times 2} \mid M^t = M\}$$

פתרון:

1. איבר כללי ב V הוא מהצורה:

$$p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$$

נשים לב כי:

$$p(1) = p(-1) \iff a_0 + a_1 + a_2 + a_3 = a_0 - a_1 + a_2 - a_3 \iff 2a_1 + 2a_3 = 0$$

כלומר:

$$W = \{a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 \mid a_0, a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}, 2a_1 + 2a_3 = 0\}$$

כלומר:

$$W = \{a_0 + a_1x + a_2x^2 + (-a_1)x^3 \mid a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}\} = \{s(1) + t(x - x^3) + u(x^2) \mid s, t, u \in \mathbb{R}\} \\ = \text{span}(\{1, x - x^3, x^2\})$$

בפרט, הקבוצה $\{1, x - x^3, x^2\}$ פורשת את W .

2. נרשום את הממ"ל במטריצה ונדרג:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 3 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{\text{דירוג}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right)$$

כלומר:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_4 = 0 \\ x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$$

נסמן $x_2 = s, x_4 = t$ אז:

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} s-t \\ s \\ -t \\ t \end{pmatrix} \mid s, t \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ s \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \mid s, t \in \mathbb{R} \right\} = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

כלומר, הקבוצה $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ פורשת את W .

הערה: נשים לב לקשר בין מספר האיברים הפורשים את W ומספר המקדמים החופשיים, בשבועות הבאים, כאשר נדבר על מימדים, ועל מרחבי שורות ועמודות של מטריצות, נדע להגיד באופן פורמלי מדוע מתקיים הקשר הזה.

3. אם נסמן:

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

אז:

$$M^t = M \iff \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \iff b = c$$

כלומר:

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix} \mid a, b, d \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ s \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + u \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid s, t, u \in \mathbb{R} \right\}$$

כלומר, הקבוצה

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

פורשת את W .

6.3 | תלות ואי-תלות לינארית

תזכורת

יהי V מ"ו מעל השדה $\mathbb{R}$. הוקטורים $v_1, \dots, v_n$ (או לחילופין הקבוצה $T = \{v_1, \dots, v_n\}$) נקראים תלויים לינארית אם קיימים $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$, לא כולם אפסים, כך ש:

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i v_i = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n = \vec{0}$$

הוקטורים $v_1, \dots, v_n$ (או לחילופין הקבוצה T) יקראו בלתי תלויים לינארית אם אינם תלויים לינארית, כלומר:

$$\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n = \vec{0} \iff \alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$$

תרגיל 6.7

עבור אילו ערכי x הקבוצה הבאה תלויה לינארית מעל $\mathbb{R}$?

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ x \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \\ 11 \end{pmatrix} \right\}$$

פתרון:

נזכר כי אוסף הוקטורים ת"ל אם קיימים $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ כך ש:

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 = \vec{0}$$

כלומר:

$$\vec{0} = \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ x \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \\ 11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 + \lambda_2 + 5\lambda_3 \\ 2\lambda_1 + \lambda_2 + 8\lambda_3 \\ x\lambda_1 + \lambda_2 + 11\lambda_3 \end{pmatrix}$$

וכמובן כי:

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 + \lambda_2 + 5\lambda_3 \\ 2\lambda_1 + \lambda_2 + 8\lambda_3 \\ x\lambda_1 + \lambda_2 + 11\lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 2 & 1 & 8 \\ x & 1 & 11 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix}$$

כלומר, אנו מתעניינים בממ"ל:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 5 & 0 \\ 2 & 1 & 8 & 0 \\ x & 1 & 11 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{\text{דירוג}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3-x & 0 \end{array} \right)$$

נסיק כי כאשר $x \neq 3$ הפתרון היחיד הוא $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$, ולכן הקבוצה בלתי תלויה לינארית. כאשר $x = 3$ יש למערכת אינסוף פתרונות, ולכן הקבוצה תלויה לינארית.



לדוגמא, כאשר $x = 3$ נקבל:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3-x & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{x=3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{\text{דירוג}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

אז למשל $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = -2, \lambda_3 = -3$ ונקבל:

$$-3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} - 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \\ 11 \end{pmatrix} = \vec{0}$$

תרגיל 6.8.

יהא V מ"ו מעל $\mathbb{R}$, $S = \{v_1, \dots, v_n\} \subset V$ תת קבוצה שלו, אם $\vec{0} \in S$ אז היא תלויה לינארית.

פתרון:

בה"כ $v_1 = \vec{0}$. נבחר מקדמים באופן הבא:

$$\alpha_1 = 1, \quad \forall 1 \leq i \leq n, \quad \alpha_i = 0$$

אזי מתקיים:

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i v_i = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n = \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i = 1v_1 + 0v_2 + \dots + 0v_n = v_1 = 0$$

כלומר, מצאנו צ"ל לא טריוויאלי (כלומר צירוף לינארי בו לא כל המקדמים הם אפס) שמתאפס, בפרט הקבוצה ת"ל.

תרגיל 6.9.

בדקו האם הקבוצה הבאה תלויה לינארית במרחב $V = \mathbb{R}^2$:

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix}$$

פתרון:

נבדוק האם קיימים $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4 \in \mathbb{R}$ לא כולם אפסים כך ש:

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda_4 \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\lambda_1 + \lambda_2 - 3\lambda_3 + \lambda_4 \\ 2\lambda_2 + 2\lambda_3 - 4\lambda_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

כלומר:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \\ \lambda_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

או הממ"ל:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & -4 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{\text{דירוג}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -2 & \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & 0 \end{array} \right)$$

זו ממ"ל עם אינסוף פתרונות, בפרט, קיים צ"ל לא טריוויאלי שלא מתאפס, ולכן הקבוצה תלויה לינארית.

תרגיל 6.10

בדקו האם הקבוצה $\{x-1, x+1, x^2-1\} \subset \mathbb{R}[x]$ שבמרחב הפולינומים מעל $\mathbb{R}$ תלויה לינארית.

פתרון:

נניח כי קיימים $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}$ כך ש:

$$a_1(x-1) + a_2(x+1) + a_3(x^2-1) = 0$$

כלומר:

$$a_3x^2 + (a_1 + a_2)x + (a_2 - a_1 - a_3) = a_1x - a_1 + a_2x + a_2 + a_3x^2 - a_3 = 0$$

פולינומים שווים אם המקדמים שלהם שווים, לכן:

$$\begin{cases} a_3 = 0 \\ a_1 + a_2 = 0 \\ a_2 - a_1 - a_3 = 0 \end{cases}$$

נרשום את המערכת בצורה מטריציונית:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{\text{דירוג}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right)$$

לכן הפתרון היחיד למערכת הוא $a_1 = a_2 = a_3 = 0$, כלומר הקבוצה בלתי תלויה לינארית.

תרגיל 6.11

יהא V מ"ו מעל $\mathbb{R}$, הראו כי הקבוצה $S = \{v_1, v_2\} \subset V$ ת"ל אמ"מ v_1, v_2 כפולה בסקלר אחד של השני.

פתרון:

יש לנו 2 כיוונים להראות.

• אם v_1, v_2 כפל בסקלר אחד של השני, כלומר:

$$v_1 = \alpha v_2 \quad \text{או} \quad v_2 = \beta v_1$$

אזי הקבוצה ת"ל, כי למשל $1v_1 - \alpha v_2 = 0$ צ"ל לא טריוויאלי שמתאפס.• אם הקבוצה ת"ל, קיימים $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ לא כולם אפסים כך ש:

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 = 0$$

נניח בה"כ ש $\lambda_1 \neq 0$, אזי:

$$v_1 = -\frac{\lambda_2}{\lambda_1} v_2$$

כלומר הם כפולה בסקלר אחד של השני.

6.4 | תרגילים לתרגול עצמי**תרגיל 6.12**1. הוכיחו כי $W = \left\{ p(x) \in \mathbb{R}_3[x] \mid \int_{-1}^1 p(x) dx = 0 \right\}$ תת-מרחב של $R_{\leq 3}[x]$ ומצאו קבוצה פורשת.2. באופן כללי, נסמן $U = \left\{ p(x) \in \mathbb{R}_n[x] \mid \int_{-1}^1 p(x) dx = 0 \right\}$.
 U הוא תמ"ו של $\mathbb{R}_n[x]$. מצאו K תמ"ו של $\mathbb{R}_n[x]$ כך ש $U \oplus K = \mathbb{R}_n[x]$.תזכורת:

$$\int_{-1}^1 x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} \Big|_{x=-1}^{x=1} = \frac{1^{n+1}}{n+1} - \frac{(-1)^{n+1}}{n+1}$$

פתרון:1. ראשית נראה כי מדובר בתמ"ו, ברור כי פולינום האפס ב W , יהיו $p(x), q(x) \in W$ אז:

$$\int_{-1}^1 p(x) + q(x) dx = \int_{-1}^1 p(x) dx + \int_{-1}^1 q(x) dx = 0$$

ויהא $\lambda \in \mathbb{R}$ אז:

$$\int_{-1}^1 \lambda p(x) dx = \lambda \int_{-1}^1 p(x) dx = 0$$

נבדוק עבור פולינום כללי $p(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$ מתי $p(x) \in W$ ואכן:

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 dx &= a_3 \left. \frac{x^4}{4} \right|_{x=-1}^{x=1} + a_2 \left. \frac{x^3}{3} \right|_{x=-1}^{x=1} + a_1 \left. \frac{x^2}{2} \right|_{x=-1}^{x=1} + a_0 \left. x \right|_{x=-1}^{x=1} \\ &= a_2 \frac{2}{3} + 2a_0 = 0 \end{aligned}$$

כלומר:

$$a_0 = -\frac{1}{3}a_2$$

נשים לב כי אין שום הגבלה על a_1, a_3 , כלומר $p(x) \in W$ אמ"מ:

$$p(x) = sx^3 - \frac{1}{3}tx^2 + ux + t$$

לכל $s, t, u \in \mathbb{R}$ אז:

$$p(x) = sx^3 + t \left(1 - \frac{1}{3}x^2 \right) + ux$$

ולכן הקבוצה:

$$p_1(x) = x^3$$

$$p_2(x) = 1 - \frac{1}{3}x^2$$

$$p_3(x) = x$$

פורשת את W .

2. נסמן $p(x) = 1$ ו- $K = \text{span}(p(x))$, נראה כי $U \oplus K = \mathbb{R}_n[x]$.

(א) נראה כי $U + K = \mathbb{R}_n[x]$, יהא $q(x) \in \mathbb{R}_n[x]$ נסמן $c = \int_{-1}^1 q(x) dx$ נשים לב כי:

$$\int_{-1}^1 \left(q(x) - \frac{c}{2} \right) dx = \int_{-1}^1 q(x) dx - \int_{-1}^1 \frac{c}{2} dx = c - c = 0$$

כלומר:

$$q(x) = \underbrace{q(x) - \frac{c}{2}}_{\in U} + \underbrace{\frac{c}{2}}_{\in K}$$

(ב) נראה כי $U \cap K = \{0\}$, אם $p(x) \in K$ אז $p(x) = a \cdot 1$ עבור $a \in \mathbb{R}$, אם בנוסף $p(x) \in U$ אז:

$$\int_{-1}^1 a \cdot 1 dx = a \cdot 2 = 0 \Rightarrow a = 0$$

כלומר $p(x) = 0$ ולכן $U \cap K = \{0\}$.

תרגול שביעי

7.1 | בסיס ומימד

תזכורת

יהא V מ"ו, קבוצה:

$$B = \{v_1, \dots, v_n\}$$

קבוצה שהיא גם פורשת את V וגם בת"ל נקראת בסיס של V .
מרחב וקטורי V נקרא נוצר סופית אם קיימת קבוצה סופית שפורשת אותו, במקרה זה, קיים לו בסיס סופי, ונסמן:

מספר האיברים בבסיס של $V = \dim(V) = n$

נקרא ל- $\dim(V)$ המימד של V .

תזכורת

מספר תכונות חשובות.

1. אם B_1, B_2 זוג בסיסים של V , אז יש בהם את אותו מספר איברים.

2. אם $W = \{w_1, \dots, w_m\} \subset V$, בת"ל, אז:

$$m \leq \dim(V)$$

3. אם $W = \{w_1, \dots, w_m\} \subset V$, פורשת את V , כלומר $V = \text{span}(W)$, אז:

$$m \geq \dim(V)$$

4. אם W מרחב n ממדי, ויש לנו קבוצה של n וקטורים בת"ל, אז הקבוצה הזאת היא בסיס של W (כלומר היא גם פורשת את W).

5. אם W מרחב n ממדי, ויש לנו קבוצה של n וקטורים שפורשים את W , אז הקבוצה הזאת היא בסיס של W (כלומר היא גם בת"ל).

6. לכל קבוצה נוצרת סופית קיים בסיס סופי, יותר מכך, אם V נוצרת סופית, אז כל תמ"ו של V נוצרת סופית.

תרגיל 7.1

הוכיחו כי:

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

בסיס של $\mathbb{R}^3$.

פתרון:

נשים לב כי עלינו להוכיח 2 דברים, אי-תלות ופרישה, אבל משום ש $\dim \mathbb{R}^3 = 3$ וב W יש 3 וקטורים, אז אם W או בת"ל או פורשת את $\mathbb{R}^3$, אז היא אוטומטית מקיימת את 2 התכונות. נוכיח אי-תלות, יהיו $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ כך ש:

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 = 0$$

אז:

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 + \lambda_2 + 2\lambda_3 \\ 2\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 \\ 3\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

נדרג את המטריצה המתאימה:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{\text{דירוג}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right)$$

למערכת הזאת יש פתרון יחיד, $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$ וסיימנו.

תרגיל 7.2

הוכיחו כי הקבוצה:

$$M = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid a + b + c + d = 0 \right\}$$

תמ"ו של $\mathbb{R}^{2 \times 2}$ ומצאו בסיס עבורה.

פתרון:

ראשית נוכיח כי מדובר בתמ"ו:

• ברור כי $0 \in M$.• יהיו $M_1 = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix}, M_2 = \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix} \in M$ אז:

$$M_1 + M_2 = \begin{pmatrix} a_1 + a_2 & b_1 + b_2 \\ c_1 + c_2 & d_1 + d_2 \end{pmatrix}$$

ומתקיים:

$$a_1 + a_2 + b_2 + b_2 + c_1 + c_2 + d_1 + d_2 = (a_1 + b_1 + c_1 + d_1) + (a_2 + b_2 + c_2 + d_2) = 0$$

$$\bullet \text{ אם } \lambda M_1 = \begin{pmatrix} \lambda a_1 & \lambda b_1 \\ \lambda c_1 & \lambda d_1 \end{pmatrix} \text{ אז } \lambda \in \mathbb{R}, M_1 = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix} \in M \text{ ומתקיים:}$$

$$\lambda a_1 + \lambda b_1 + \lambda c_1 + \lambda d_1 = \lambda(a_1 + b_1 + c_1 + d_1) = 0$$

$$\text{אז } \lambda M_1 \in M$$

כעת אנו יודעים כי מדובר בתמ"ו של $\mathbb{R}^{2 \times 2}$, אנו יודעים כי $M \neq \mathbb{R}^{2 \times 2}$, אז $\dim M < 4$. נחפש איברים בת"ל ב- M , אז ניחוש טוב הוא:

$$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, M_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, M_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

ברור כי $M_1, M_2, M_3 \in M$, אם נראה כי הם בת"ל אז אוטומטית נקבל שהם בסיס, ואכן:

$$\lambda_1 M_1 + \lambda_2 M_2 + \lambda_3 M_3 = \begin{pmatrix} \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 & -\lambda_1 \\ -\lambda_2 & -\lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$$

תרגיל 7.3

הוכיחו כי $\mathbb{R}[x]$ אינה נוצרת סופית.

פתרון:

נניח בשלילה כי $\mathbb{R}[x]$ נוצרת סופית, כלומר קיים ל- $\mathbb{R}[x]$ בסיס:

$$B = \{p_1(x), \dots, p_n(x)\}$$

נסמן:

$$M = \max \{\deg(p_1(x)), \deg(p_2(x)), \dots, \deg(p_n(x))\}$$

אז x^{M+1} לא צ"ל של אברי B , בשלילה לכך ש B פורשת את $\mathbb{R}[x]$.

תרגיל 7.4

יהא $W \subset \mathbb{R}^2$ תמ"ו, הוכיחו כי W הוא בהכרח אחד משלושת הצורות הבאות:

$$1. W = \{\vec{0}\}$$

$$2. W = \{\lambda v \mid \lambda \in \mathbb{R}\} \text{ עבור וקטור } v \neq \vec{0} \text{ כלשהו.}$$

$$3. W = \mathbb{R}^2$$

פתרון:

זה תרגיל שראינו בעבר, ועבדנו מאוד קשה עליו! נשים לב כי בשפה של בסיס ומימד הפתרון מאוד פשוט. יהא W תמ"ו של $\mathbb{R}^2$, היות והוא תמ"ו של $\mathbb{R}^2$, אז בהכרח $\dim(W) \leq 2$, אם $\dim(W) = 0$ אז הוא מרחב האפס, אם $\dim(W) = 2$ אז הוא כל $\mathbb{R}^2$, ואם $\dim(W) = 1$ אז קיים לו בסיס $B = \{v\}$, כאשר $v \neq 0$, כלומר $W = \text{span}(v)$, וסיימנו.

תרגיל 7.5.

(תרגיל ממבחן עבר - מועד א' ינואר 2022)

תהא:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ויהיו:

$$U = \{X \in \mathbb{R}^{3 \times 3} \mid AX - XA = 0\}$$

$$V = \{Y \in \mathbb{R}^{3 \times 3} \mid AY + YA = 0\}$$

תמ"ו של $\mathbb{R}^{3 \times 3}$ (איו צורך להוכיח כי מדובר בתמ"ו), מצאו בסיס ומימד ל $U \cap V$.

פתרון:

תהא $Z \in U \cap V$, אז:

$$\begin{cases} AZ - ZA = 0 \\ AZ + ZA = 0 \end{cases} \Rightarrow ZA = AZ = 0$$

$$\text{תהא } M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}, \text{ אז:}$$

$$AM = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 5d & 5e & 5f \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$MA = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 5b & 0 \\ d & 5e & 0 \\ g & 5h & 0 \end{pmatrix}$$

כלומר, $MA = AM = 0 \iff a = b = c = d = e = f = g = h = 0$, אז:

$$U \cap V = \text{span} \left(\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$$

אז $\dim(U \cap V) = 1$, והמטריצה היחידה ב span היא הבסיס למרחב.

7.2 | משפט המימדים

תזכורת

יהא V מ"ו נוצר סופית ויהיו זוג תמ"ו U, W של V אז משפט המימדים קובע כי:

$$\dim(U + W) = \dim(U) + \dim(W) - \dim(U \cap W)$$

תזכורת

תזכורת רלוונטית:
יהא V מ"ו, ויהיו $S = \{v_1, \dots, v_n\}, T = \{w_1, \dots, w_m\}$ תתי-קבוצות של V אז:

$$\text{span}(T) + \text{span}(S) = \text{span}(S \cup T)$$

7.6. תרגיל

יהיו זוג תתי המרחבים של $\mathbb{R}^{2 \times 2}$,

$$\mathcal{U} := \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ c & 0 \end{pmatrix} \mid a, c \in \mathbb{R} \right\}, \quad \mathcal{V} := \left\{ \begin{pmatrix} 0 & b \\ d & 0 \end{pmatrix} \mid b, d \in \mathbb{R} \right\}$$

1. מצאי בסיס ל-2 תתי המרחבים.

2. מצאי מימד לחיתוך $\mathcal{U} \cap \mathcal{V}$.

פתרון:

1. נשאיר כתרגיל להראות כי:

$$B_{\mathcal{U}} = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right)$$

$$B_{\mathcal{V}} = \left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right)$$

בסיסים ל-2 תתי המרחבים.

2. כדי למצוא את המימד של החיתוך יש כמה דרכים. נרצה להעזר במשפט המימדים, ולשם כך נחשב

את מימד הסכום. נזכר כי:

$$\begin{aligned}\mathcal{U} + \mathcal{V} &= \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\} + \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\} \\ &= \text{span} \left\{ \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\} \cup \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\} \right\} \\ &= \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}\end{aligned}$$

נשים לב כי הקבוצה הזאת בת"ל כי:

$$\vec{0} = \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 \\ \lambda_3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \iff \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$$

כלומר זו קבוצה בת"ל, ולכן היא בסיס של $\mathcal{U} + \mathcal{V}$, ומכאן:

$$\dim(\mathcal{U} + \mathcal{V}) = 3$$

כעת נשתמש במשפט המימדים:

$$\dim(\mathcal{U} + \mathcal{V}) = \dim(\mathcal{U}) + \dim(\mathcal{V}) - \dim(\mathcal{U} \cap \mathcal{V})$$

נציב את המימדים שמצאנו:

$$3 = 2 + 2 - \dim(\mathcal{U} \cap \mathcal{V})$$

ונקבל:

$$\dim(\mathcal{U} \cap \mathcal{V}) = 1$$

תרגיל 7.7.

יהא V מ"ו מעל $\mathbb{R}$ ממימד 5, ויהיו U, W תמ"ו של V כך ש $\dim(U) = \dim(W) = 3$, הראו כי $U \cap W \neq \{\vec{0}\}$.

פתרון:

שימו לב, זו טענה שנראית "ברורה", אבל עד עכשיו לא לגמרי היו לנו את הכלים להראות אותה, כעת, זה תרגיל טריוויאלי:

$$\dim(U \cap W) = \dim(V) + \dim(U) - \dim(U + W) = 3 + 3 - \dim(U + W) \geq 3 + 3 - 5 = 1$$

כאשר השתמשנו בכך ש $\dim(U + W) \leq \dim(V) = 5$, היות ו $U \cap W$ מרחב ממימד שאינו אפס, הוא לא שווה ל $\{\vec{0}\}$.



תרגיל 7.8.

יהא V מ"ו מעל $\mathbb{R}$. יהיו U, W תמ"ו של V כך ש:

$$\dim V = 6, \quad \dim U = 4, \quad \dim W = 5$$

בנוסף, נתון כי U לא מוכל ב- W . הראו כי:

$$\dim(U \cap W) = 3$$

פתרון:

U, W תתי-מרחבים של V ולכן גם סכומם תת-מרחב של V . לכן:

$$U + W \subseteq V \Rightarrow \dim(U + W) \leq 6$$

ממשפט המימדים:

$$\dim(U + W) = \dim(U) + \dim(W) - \dim(U \cap W)$$

נציב את ההנחות שלנו:

$$6 \geq \dim(U + W) = 4 + 5 - \dim(U \cap W)$$

כלומר:

$$\dim(U \cap W) \geq 3$$

נזכר כי $U \cap W$ הוא תמ"ו של U (וגם של W), בפרט:

$$\dim(U \cap W) \leq \dim(U) = 4$$

כלומר, סה"כ:

$$4 \geq \dim(U \cap W) \geq 3$$

מצד שני, אם $\dim(U \cap W) = 4$, אז $U \cap W = U$ ואז נקבל:

$$U = U \cap W \subseteq W$$

וזו סתירה להנחה ש- U לא מוכל ב- W . לכן, $\dim(U \cap W) \neq 4$, ולכן $\dim(U \cap W) = 3$, כרצוי.

7.3 | מרחבי שורות ועמודות

תזכורת

תהא $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ מטריצה מסדר $m \times n$, נסמן:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \ddots & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

יש לנו 2 מרחבים חשובים:

1. אם נסמן ב- $C_1, \dots, C_n$ את עמודות A , אז:

$$\text{Col}(A) = \text{span}(C_1, \dots, C_n) = \text{span} \left(\begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} \right) \subset \mathbb{R}^m$$

2. אם נסמן ב- $R_1, \dots, R_m$ את שורות A , אז:

$$\text{Row}(A) = \text{span}(R_1, \dots, R_m) = \text{span}((a_{11} \ \dots \ a_{1n}), \dots, (a_{m1} \ \dots \ a_{mn})) \subset \mathbb{R}^n$$

הערה חשובה: כדאי להקל על הכתיבה, לפעמים נסמן וקטורים במרחב השורות כוקטורי עמודה:

$$\text{Row}(A) = \text{span}(R_1, \dots, R_m) = \text{span} \left(\begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{1n} \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} a_{m1} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} \right) \subset \mathbb{R}^n$$

לא להתבלבל עם מרחב העמודות!

7.9. תרגיל

תהא $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 4 \\ 1 & 2 & 4 & 4 \end{pmatrix}$ מצאו בסיס ל $\text{Col}(A)$, $\text{Row}(A)$.

פתרון:

נתחיל מ- $\text{Row}(A)$.
שלוש שורות A הן:

$$R_1 = (1 \ 2 \ 3 \ 4)$$

$$R_2 = (1 \ 3 \ 4 \ 4)$$

$$R_3 = (1 \ 2 \ 4 \ 4)$$

נבדוק אי-תלות:

$$\lambda_1 R_1 + \lambda_2 R_2 + \lambda_3 R_3 = (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 \quad 2\lambda_1 + 3\lambda_2 + 2\lambda_3 \quad 3\lambda_1 + 4\lambda_2 + 4\lambda_3 \quad 4\lambda_1 + 4\lambda_2 + 4\lambda_3)$$

כלומר:

$$\lambda_1 R_1 + \lambda_2 R_2 + \lambda_3 R_3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ 2\lambda_1 + 3\lambda_2 + 2\lambda_3 = 0 \\ 3\lambda_1 + 4\lambda_2 + 4\lambda_3 = 0 \\ 4\lambda_1 + 4\lambda_2 + 4\lambda_3 = 0 \end{cases}$$

מהמשוואה הראשונה והשנייה נקבל $\lambda_2 = 0$, אז מהמשוואה הראשונה והשלישית נקבל:

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_3 = 0 \\ 3\lambda_1 + 4\lambda_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_3 = 0$$

אז הקבוצה בת"ל ונקבל כי R_1, R_2, R_3 בסיס ל $\text{Row}(A)$. עבור $\text{Col}(A)$, ישר נשים לב כי $C_4 = 4C_1$, אז נבדוק האם C_1, C_2, C_3 בת"ל ולכן בסיס, כלומר האם:

$$\eta_1 C_1 + \eta_2 C_2 + \eta_3 C_3 = 0 \Leftrightarrow \eta_1 = \eta_2 = \eta_3 = 0$$

ואכן:

$$\eta_1 C_1 + \eta_2 C_2 + \eta_3 C_3 = \begin{pmatrix} \eta_1 + 2\eta_2 + 3\eta_3 \\ \eta_1 + 3\eta_2 + 4\eta_3 \\ \eta_1 + 2\eta_2 + 4\eta_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

אז מהמשוואה הראשונה והשנייה נקבל $\eta_3 = 0$, אז מהמשוואה הראשונה והשנייה נקבל:

$$\begin{cases} \eta_1 + 2\eta_2 \\ \eta_1 + 3\eta_2 \end{cases} = \vec{0} \Leftrightarrow \eta_1 = \eta_2 = 0$$

כלומר, C_1, C_2, C_3 בסיס ל $\text{Col}(A)$.

תזכורת

אם $A, B \in \mathbb{R}^{m \times n}$ שקולות-שורה, כלומר ניתן לדרג את A ל- B (ולכן גם את B ל- A), אז:

$$\text{Row}(A) = \text{Row}(B)$$

תרגיל 7.10

תהא $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ותהא B שקולת שורות ל- A . הוכיחו או הפריכו:

$$\text{Col}(A) = \text{Col}(B)$$

פתרון:

נראה כי טענה זו לא נכונה, בניגוד למקרה של Row.
נשים לב כי:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

אבל:

$$\text{Col} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \text{span} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Col} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \text{span} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

וכמובן ש:

$$\text{span} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \neq \text{span} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

תרגיל 7.11

נסמן:

$$W_1 = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$$W_2 = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ -6 \\ -8 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 8 \\ 12 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \\ 2 \\ -8 \end{pmatrix} \right\}$$

האם מתקיים $W_1 = W_2$?

פתרון:

נרצה להעביר את W_1, W_2 לצורות שיהיה נוח יותר להשוות. נשים לב כי:

$$W_1 = \text{Row} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

כלומר, אם נדרג את המטריצה הזו:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 2 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{דרג}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{12}{5} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{13}{5} \end{pmatrix}$$

אז נקבל כי:

$$W_1 = \text{Row} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{12}{5} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{13}{5} \end{pmatrix} = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -\frac{12}{5} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ \frac{13}{5} \end{pmatrix} \right\}$$

נפעל באופן דומה עבור W_2 . קודם כל, נשים לב כי:

$$W_2 = \text{Row} \begin{pmatrix} -2 & -4 & -6 & -8 \\ 2 & 1 & -1 & -3 \\ 8 & 12 & 8 & 0 \\ 6 & 8 & 2 & -8 \end{pmatrix}$$

נדרג:

$$\begin{pmatrix} -2 & -4 & -6 & -8 \\ 2 & 1 & -1 & -3 \\ 8 & 12 & 8 & 0 \\ 6 & 8 & 2 & -8 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{דירוג}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{12}{5} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{13}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

כלומר:

$$\begin{aligned} W_2 &= \text{Row} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{12}{5} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{13}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -\frac{12}{5} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ \frac{13}{5} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \\ &= \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -\frac{12}{5} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ \frac{13}{5} \end{pmatrix} \right\} \end{aligned}$$

קיבלנו כי $W_1 = W_2$.

7.4 | תרגילים לתרגול עצמי

תרגיל 7.12

יהיו W, U_1, U_2 תמ"ו של V . הוכיחו או הפריכו:

1. אם:

$$W + U_1 = W + U_2$$

$$U_1 = U_2 \text{ אז}$$

2. אם:

$$W \oplus U_1 = W \oplus U_2$$

$$U_1 = U_2 \text{ אז}$$

פתרון:

1. נראה דוגמא נגדית, אם $V = \mathbb{R}^2$, $W = \mathbb{R}^2$, $U_1 = \mathbb{R}^2$, $U_2 = \text{span} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, אז באמת:

$$\underbrace{\mathbb{R}^2}_W + \underbrace{\mathbb{R}^2}_{U_1} = \underbrace{\mathbb{R}^2}_W + \underbrace{\text{span} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{U_2}$$

אבל כמובן:

$$\mathbb{R}^2 \neq \text{span} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

2. שוב נראה דוגמא נגדית, נגדיר:

$$W = \text{span} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad U_1 = \text{span} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad U_2 = \text{span} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

אז בדיקה מהירה תראה כי $W \oplus U_1 = W \oplus U_2 = \mathbb{R}^2$, אבל $U_1 \neq U_2$, כי למשל $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in U_2$, אבל $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \notin U_1$.

תרגיל 7.13

מצאו בסיס ומימד לתמ"ו (אין צורך להוכיח כי הוא אכן תמ"ו):

$$W = \{p \in \mathbb{R}_{\deg \leq 3} \mid x^2 p''(x) - 4xp'(x) + 6p(x) = 0\}$$

פתרון:

נסמן $p(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$, ונציב בתנאי $0 = x^2p''(x) - 4xp'(x) + 6p(x)$

$$0 = x^2(6a_3x + 2a_2) - 4x(3a_3x^2 + 2a_2x + a_1) + 6(a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0)$$

כלומר:

$$0 = 6a_3x^3 + 2a_2x^2 - 12a_3x^3 - 8a_2x^2 - 4a_1x + 6a_3x^3 + 6a_2x^2 + 6a_1x + 6a_0$$

או:

$$0 = x^3(6a_3 - 12a_3 + 6a_3) + x^2(2a_2 - 8a_2 + 6a_2) + x(-4a_1 + 6a_1) + 1(6a_0) = x(2a_1) + 1(6a_0)$$

כלומר, $a_1 = a_0 = 0$, כלומר:

$$W = \{a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 \in \mathbb{R}_{\deg \leq 3}[x] \mid a_1 = a_0 = 0\} = \{a_3x^3 + a_2x^2 \mid a_3, a_2 \in \mathbb{R}\}$$

ברור כי זהו מרחב ממימד 2, ולו בסיס (x_3, x_2) .

תרגיל 7.14.

יהא V מ"ו ממימד $n \geq 2$, עם זוג בסיסים, $B_1 = (v_1, \dots, v_n)$, $B_2 = (w_1, \dots, w_n)$, הוכיחו או הפריכו, (נמקו!)

1. $B = (v_1, w_2, \dots, w_k, v_{k+1}, \dots)$ בהכרח בסיס של V .

2. הקבוצה $B = (v_1 - w_1, \dots, v_1 - w_n)$ בהכרח בסיס של V .

פתרון:

1. דוגמא נגדית:

$$V = \mathbb{R}^2, v_1 = w_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, v_2 = w_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

אז אנו יודעים כי $(v_1, v_2), (w_1, w_2)$ בסיסים של $\mathbb{R}^2$, אבל (w_1, v_2) לא.

2. דוגמא נגדית היא $\mathbb{R}^2$ כאשר $B_1 = B_2$ הבסיס הסטנדרטי.

תרגול שמיני

8.1 | השלמה לבסיס

תזכורת

הנה טענה נורא חשובה:
יהא V מ"ו מעל $\mathbb{R}$, ויהיו

$$S = \{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k\} \subset V, \quad T = \{\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_k\} \subset V$$

2 קבוצות בת"ל המקיימות: $\text{span}(S) = \text{span}(T)$, במילים אחרות, גם S וגם T הן בסיסים של אותו תת-מרחב של V . יהא $\vec{w} \in V$, כך שהקבוצה $S \cup \{\vec{w}\} = \{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k, \vec{w}\}$ בת"ל, אז:

1. גם הקבוצה $T \cup \{\vec{w}\} = \{\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_k, \vec{w}\}$ בת"ל.

2. $\text{span}(S \cup \{\vec{w}\}) = \text{span}(T \cup \{\vec{w}\})$.

הטענה הזאת נותנת לנו לענות על שאלות מהסוג הבא (שאלות השלמה לבסיס):
נניח כי $\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k\} \subset V$, מצאו וקטורים $\vec{v}_{k+1}, \dots, \vec{v}_n$ כך ש:

$$B = \{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k, \vec{v}_{k+1}, \dots, \vec{v}_n\}$$

בסיס ל- V . נדגים את השיטה בתרגיל הבאה.

תרגיל 8.1

יהיו $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. מצאו וקטור $\vec{v}_3$ כך ש:

$$B = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$$

בסיס ל- $\mathbb{R}^3$.

פתרון:

ראשית יש לבדוק כי $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$ היא קבוצה בת"ל, אבל זה מיידי כי זוג הוקטורים לא כפל בסקלר אחד של השני.



כעת, נרצה למצוא קבוצה

$$\{\vec{u}_1, \vec{u}_2\}$$

בת"ל כך ש: $\text{span}\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\} = \text{span}(\vec{u}_1, \vec{u}_2)$, ועבורן יהיה יותר קל למצוא את $\vec{v}_3$.
נשתמש במרחב שורות:

$$\text{span}\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\} = \text{Row} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

ומתקיים:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{דירוג}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

כלומר,

$$\vec{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \vec{u}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \text{span}\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\} = \text{span}\{\vec{u}_1, \vec{u}_2\}$$

כמובן ש $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2\}$ בת"ל, כעת, לפי התזכורת, $\vec{v}$ משלים את $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$ לבסיס של $\mathbb{R}^3$ אם ורק אם הוא משלים את $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2\}$ לבסיס של $\mathbb{R}^3$.
ובאמת נורא קל להשלים את $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2\}$ לבסיס של $\mathbb{R}^3$, למשל עם:

$$\vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

כלומר, ברור כי $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{v}_3$ בסיס של $\mathbb{R}^3$, ולכן גם:

$$B = \left\{ \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}}_{\vec{v}_1}, \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\vec{v}_2}, \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\vec{v}_3} \right\}$$

בסיס של $\mathbb{R}^3$.

תרגיל 8.2.

השלימו את הוקטורים הבאים לבסיס של $\mathbb{R}^5$:

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

פתרון:

נפעל באופן זהה לתרגיל האחרון, נשים לב כי:

$$\text{span}\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\} = \text{Row} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

נדרג:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{דירוג}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{4}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

והשלמה ברורה היא:

$$\vec{v}_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{v}_5 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

במילים אחרות:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{4}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{דירוג}} I_5$$

בפרט, הקבוצה:

$$B = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_4, \vec{v}_5\}$$

היא בסיס של $\mathbb{R}^5$.

תרגיל 8.3

יהיו:

$$v_1 = \begin{pmatrix} -12 \\ 6 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 10 \\ 20 \\ 30 \\ 40 \end{pmatrix}$$

מצאו v_3, v_4 כך ש:

1. $B_1 = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ בסיס של $\mathbb{R}^4$.
2. ב- v_3 יש רק מספרים שלמים אי זוגיים.
3. ב- v_4 יש רק מספרים שלמים זוגיים.
4. סכום האיברים ב- v_3 שווה לסכום האיברים ב- v_4 .

פתרון:

כמו בתרגילים הקודמים, נתחיל בלמצוא $\{u_1, u_2\}$ פשוטים יותר המקיימים $\text{span}\{v_1, v_2\} = \text{span}\{u_1, u_2\}$.

$$\text{span}(v_1, v_2) = \text{Row} \begin{pmatrix} -12 & 6 & 3 & 3 \\ 10 & 20 & 30 & 40 \end{pmatrix} = \text{Row} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{2}{5} & \frac{3}{5} \\ 0 & 1 & \frac{13}{10} & \frac{17}{10} \end{pmatrix}$$

כאשר השוויון נובע מדירוג. כעת, קל לראות כי למשל:

$$v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad v_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$$

מקיימים את התנאים, בפרט:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{2}{5} & \frac{3}{5} \\ 0 & 1 & \frac{13}{10} & \frac{17}{10} \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{דירוג}} I_4$$

לכן, הקבוצה:

$$B = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$$

בסיס ל- $\mathbb{R}^4$.

8.2 | משפט הדרגה

תזכורת

תהא $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ מטריצה, אז לפי משפט הדרגה:

$$\text{rank}(A) = \dim(\text{Row}(A)) = \dim(\text{Col}(A))$$

הערה: מזכר כי $\text{Row}(A), \text{Col}(A)$ תתי מרחבים של $\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m$, ובכל זאת, משפט המימדים קובע כי המימדים שלהם שווים.

תרגיל 8.4

עבור כל ערכי $s, t \in \mathbb{R}$ מצאו בסיס למרחב השורות ועמודות ל-:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & s+t \\ 0 & 1 & 2 & st \\ 0 & 0 & 1 & e^t \end{pmatrix}$$

פתרון:

נשים לב כי העמודה הראשונה, השנייה והשלישית בת"ל (לכל s, t) ולכן לכל s, t הדרגה של A היא 3, ולכן לכל s, t בסיס למרחב השורות הוא פשוט שלושת העמודות, ומרחב השורות הוא כל $\mathbb{R}^3$, אז נבחר פשוט את הבסיס הסטנדרטי:

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

תרגיל 8.5

תהא $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$, נסמן:

$$K = \{A\vec{v} | v \in \mathbb{R}^m\} \subset \mathbb{R}^n$$

הראו כי $K = \text{Col}(A)$.

פתרון:

נשתמש בעובדה הבאה:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 a_{11} + \lambda_2 a_{12} + \dots + \lambda_m a_{1m} \\ \lambda_1 a_{21} + \lambda_2 a_{22} + \dots + \lambda_m a_{2m} \\ \vdots \\ \lambda_1 a_{n1} + \lambda_2 a_{n2} + \dots + \lambda_m a_{nm} \end{pmatrix}$$

$$= \lambda_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{n2} \end{pmatrix} + \dots + \lambda_m \begin{pmatrix} a_{1m} \\ a_{2m} \\ \vdots \\ a_{nm} \end{pmatrix}$$

כלומר, אם $\vec{v} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_m \end{pmatrix}$ והעמודות של A הן $C_1, \dots, C_m$, אז:

$$A\vec{v} = \lambda_1 C_1 + \dots + \lambda_m C_m$$

כלומר, $K \subset \text{Col}(A)$. מצד שני, אם $u \in \text{Col}(A)$, אז $u = \eta_1 C_1 + \dots + \eta_m C_m$, ולכן:

$$A \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \vdots \\ \eta_m \end{pmatrix} = u$$

ולכן $u \in K$, ומכאן $\text{Col}(A) \subset K$, ולכן $K = \text{Col}(A)$.

8.3 | המרחב המאפס

תזכורת

תהא $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$, נסמן:

$$N(A) = \{\vec{v} \in \mathbb{R}^m \mid A\vec{v} = \vec{0}\}$$

זהו תמ"ו של $\mathbb{R}^m$, וראינו בעבר כי המימד שלו הוא בדיוק מספר האיברים החופשיים בדירוג הקנוני של A , ומספר זה הוא בדיוק $n - \text{rank}(A)$, כלומר:

$$\dim(N(A)) = n - \text{rank}(A).$$

תרגיל 8.6.

יהיו $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$, כך ש $AB = 0$, הוכיחו כי $\text{Col}(B) \subset N(A)$.

פתרון:

יהא $\vec{v} \in \text{Col}(B)$, מהתרגיל הקודם קיים $\vec{w} \in \mathbb{R}^n$ כך ש $\vec{v} = B\vec{w}$, אז מתקיים:

$$A\vec{v} = AB\vec{w} = 0\vec{w} = 0$$

כלומר $\vec{v} \in N(A)$ ולכן $\text{Col}(B) \subset N(A)$.

תרגיל 8.7

תהא $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ כך ש $B^{2025} = I_n$, הוכיחו כי $N(B) = \{0\}$.

פתרון:

אם $w \in N(B)$, אז $Bw = 0$. בפרט $B^{2025}w = 0$, אבל אז:

$$0 = B^{2025}w = I_n w = w$$

כלומר $N(B) = \{0\}$.

תרגיל 8.8

תהא:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & 3 & -6 \end{pmatrix}$$

מצאו בסיס ומימד ל $\text{Row}(A), \text{Col}(A), N(A) = \{v \in \mathbb{R}^3 | Av = 0\}$.

פתרון:

• ראשית, נתחיל ממרחב השורות. ברור כי $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -6 \end{pmatrix} \right\}$ בת"ל, היות והם אינם כפל בסקלר אחד של השני, בפרט הם גם בסיס ל- $\text{Row}(A)$.

• עבור מרחב העמודות, אנו יודעים כי $\dim(\text{Col}(A)) = \dim(\text{Row}(A)) = 2$, כלומר $\text{Col}(A)$ הוא תת-מרחב של $\mathbb{R}^2$ מימד 2, ולכן הוא חייב להיות $\mathbb{R}^2$ כולו. נבחר לו את הבסיס הסטנדרטי: $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$.

• עבור $N(A)$, אנו יודעים כי מימד מרחב הפתרונות של מערכת הומוגנית הוא מספר הנעלמים (מספר העמודות) מינוס דרגה המטריצה, אז $3 - 2 = 1$. כלומר, אם נמצא וקטור $\vec{v} \neq 0$ ב- $N(A)$, אז הוא יהיה בסיס של $N(A)$ (בפרט $N(A) = \text{span}(\vec{v})$).

נחפש וקטור המקיים:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = Av = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & 3 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + 2y - 3z \\ 3x + 3y - 6z \end{pmatrix}$$

ובאמת נשים לב כי $x = y = z = 1$ פתרון, כלומר:

$$N(A) = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

8.4 | תרגול נוסף

תרגיל 8.9

מצאו בסיס ומימד למרחב הבא:

$$W = \text{span}(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_4, \vec{v}_5)$$

כאשר:

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_5 = \begin{pmatrix} -3 \\ -6 \\ -9 \\ -12 \\ -15 \\ -18 \end{pmatrix}$$

פתרון:

נפתור את התרגיל ב-2 דרכים על מנת להמחיש 2 שיטות שונות.

1. נמצא את כל הצירופים הלינאריים שמתאפסים, ואז נוכל להוריד מהspan וקטורים מיותרים, לדוגמא:

$$\vec{u}_1 = \vec{u}_2 - \vec{u}_3 \Rightarrow \text{span}(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3) = \text{span}(\vec{u}_2, \vec{u}_3)$$

נמצא צירופים לינאריים שמתאפסים:

$$\vec{0} = \lambda_1 \vec{v}_1 + \lambda_2 \vec{v}_2 + \lambda_3 \vec{v}_3 + \lambda_4 \vec{v}_4 + \lambda_5 \vec{v}_5 = \begin{pmatrix} \lambda_1 + 2\lambda_2 + \lambda_3 - 3\lambda_5 \\ \lambda_1 + 2\lambda_2 + 2\lambda_3 - 6\lambda_5 \\ \lambda_1 + 2\lambda_2 + 3\lambda_3 - 9\lambda_5 \\ \lambda_1 + 4\lambda_3 + 5\lambda_4 - 12\lambda_5 \\ \lambda_1 + 5\lambda_3 + 5\lambda_4 - 15\lambda_5 \\ \lambda_1 + 6\lambda_3 + 5\lambda_4 - 18\lambda_5 \end{pmatrix}$$

כלומר, קיבלנו את הממ"ל:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 & -3 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 0 & -6 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & -9 & 0 \\ 1 & 0 & 4 & 5 & -12 & 0 \\ 1 & 0 & 5 & 5 & -15 & 0 \\ 1 & 0 & 6 & 5 & -18 & 0 \end{array} \right)$$

נרשום את הממ"ל כמטריצה ונדרג:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 & -3 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 0 & -6 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & -9 & 0 \\ 1 & 0 & 4 & 5 & -12 & 0 \\ 1 & 0 & 5 & 5 & -15 & 0 \\ 1 & 0 & 6 & 5 & -18 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{\text{דירוג}} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{5}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

כלומר:

$$\begin{cases} \lambda_1 + 5\lambda_4 = 0 \\ \lambda_2 - \frac{5}{2}\lambda_4 = 0 \\ \lambda_3 - 3\lambda_5 = 0 \end{cases}$$

יש לנו 2 משתנים חופשיים, נבחר $\lambda_4 = t$, $\lambda_5 = s$, אז מרחב הפתרונות שלנו הוא:

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \\ \lambda_4 \\ \lambda_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5t \\ \frac{5}{2}t \\ 3s \\ t \\ s \end{pmatrix}$$

כלומר, קיבלנו שני צירופים לינאריים (יחד עם כל הכפולות בסקלר שלהם) שמתאפסים:

$$3\vec{v}_3 + \vec{v}_5 = 0, \quad 5\vec{v}_1 - \frac{5}{2}\vec{v}_2 + \vec{v}_4 = 0$$

נסיק בעצם כי:

$$\text{span}(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_4, \vec{v}_5) = \text{span}(\vec{v}_2, \vec{v}_4, \vec{v}_5) = \text{span}(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3) = \text{span}(\vec{v}_1, \vec{v}_4, \vec{v}_5) = \dots$$

נשים לב כי למשל, $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ בת"ל, כי מהבדיקה מעלה, לא מצאנו אף פתרון לא טריוואלי לשוויון:

$$\eta_1 \vec{v}_1 + \eta_2 \vec{v}_2 + \eta_3 \vec{v}_3 = 0$$

כלומר, קיבלנו את הבסיס:

$$B_1 = (\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3) = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} \right)$$

כלומר, $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ בת"ל, ולכן הוא בסיס מרחב W , ומימד המרחב הוא 3.

2. נפתור את התרגיל בעוד דרך, נשים לב כי לפי הגדרת מרחב שורות:

$$W = \text{Row} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 5 & 5 \\ -3 & -6 & -9 & -12 & -15 & -18 \end{pmatrix}$$

נדרג את המטריצה:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 5 & 5 \\ -3 & -6 & -9 & -12 & -15 & -18 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{דירוג}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

היות ודירוג משמשר את מרחב השורות, נקבל:

$$W = \text{Row} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 5 & 5 \\ -3 & -6 & -9 & -12 & -15 & -18 \end{pmatrix} = \text{Row} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

כלומר:

$$W = \text{span} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right) = \text{span} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

משום שבדירוג הגענו למטריצה מדורגת קנונית, נסיק ש 3 הוקטורים הללו בת"ל (גם אפשר לראות את זה לפי האיברים הפותחים) כלומר הם בת"ל, ולכן:

$$B_2 = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

בסיס ל W .

תרגיל 8.10

יהיו V, W התתי-מרחבים הבאים של $\mathbb{R}^4$:

$$V = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}, \quad W = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

1. מצאו בסיס ל- $V + W$.2. מצאו בסיס ל- $V \cap W$.

פתרון:

1. אנו יודעים כי:

$$\text{span}(S) + \text{span}(T) = \text{span}(S \cup T)$$

כלומר:

$$V + W = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

כלומר:

$$V + W = \text{Row} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

נדרג את המטריצה:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{דירוג}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

כלומר:

$$V + W = \text{Row} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

ברור כי שלושת הוקטורים הללו בת"ל, ולכן הם בסיס של $V + W$.

2. באופן מפתיע (אולי לא כזה מפתיע), הסעיף הזה קשה יותר מהסעיף הקודם, נזכר שבאופן כללי $\text{span}(S \cap T) \neq \text{span}(S) \cap \text{span}(T)$, אז נצטרך לעבוד קשה יותר. מהסעיף הקודם $\dim(V + W) = 3$, אז אפשר להשתמש במשפט המימדים להסיק כל מיני דברים, אבל לא נעשה

זאת.

לפני שנתחיל, נמצא ייצוג נוח יותר ל- V, W , נשתמש בכך שדירוג משמר מרחב שורות של מטריצה, ולכן:

$$V = \text{Row} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \text{Row} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$$

כאשר השתמשנו בכך ש $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ שקולת שורות ל $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.
באותה צורה, דירוג של $\begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ ייתן לנו כי:

$$W = \text{Row} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \text{Row} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

סה"כ:

$$V = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}, \quad W = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

כעת נמצא את $V \cap W$.

עפ"י הגדרה, $v \in V \cap W$ אם $v \in V$ וגם $v \in W$, כלומר קיימים $\lambda_1, \lambda_2, \eta_1, \eta_2, \eta_3 \in \mathbb{R}$ כך ש:

$$v = \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \eta_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \eta_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \eta_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

כלומר:

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_1 + \lambda_2 \\ \lambda_1 + 2\lambda_2 \\ \lambda_1 + 3\lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \eta_1 + \eta_3 \\ \eta_2 \\ -\eta_1 + 2\eta_2 \\ \eta_3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} \lambda_1 - \eta_1 - \eta_3 \\ \lambda_1 + \lambda_2 - \eta_2 \\ \lambda_1 + 2\lambda_2 + \eta_1 - 2\eta_2 \\ \lambda_1 + 3\lambda_2 - \eta_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

זאת הממ"ל ההומוגנית הבאה:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & -2 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \eta_1 \\ \eta_2 \\ \eta_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

דירוג של המטריצה $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & -2 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ תיתן את: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ אז הפתרון הכללי

הינו:

$$\left\{ \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \eta_1 \\ \eta_2 \\ \eta_3 \end{pmatrix} \middle| \eta_2 := s \in \mathbb{R}, \lambda_1 = \eta_1 = \frac{3}{2}\eta_2, \lambda_2 = -\frac{1}{2}\eta_2, \eta_3 = 0 \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} \frac{3}{2}s \\ -\frac{1}{2}s \\ \frac{3}{2}s \\ s \\ 0 \end{pmatrix} \middle| s \in \mathbb{R} \right\} = \text{span} \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

כלומר, $v \in V \cap W$ אם ורק אם קיים $t \in \mathbb{R}$ כך ש:

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \eta_1 \\ \eta_2 \\ \eta_3 \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v = \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} = \eta_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \eta_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \eta_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

בגלל החישוב שלנו, בהכרח הצבה של λ_1, λ_2 ושל η_1, η_2, η_3 תתן לנו אותו דבר, כלומר:

$$v = 3t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} = 3t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 2t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 0 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3t \\ 2t \\ t \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

סה"כ קיבלנו כי

$$V \cap W = \text{span} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

אז $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ בסיס למרחב $U \cap W$.

תרגול תשיעי

9.1 | מטריצות הפיכות

תזכורת

מטריצה ריבועית $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ נקראת **הפיכה** אם קיימת מטריצה ריבועית $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ כך ש:

$$AB = BA = I_n$$

מספר תכונות חשובות.

1. למטריצה הפיכה A קיימת B יחידה כך ש $AB = BA = I_n$. נקרא ל**ההופכית** של A ונסמן $B = A^{-1}$.

2. אם קיימת מטריצה B כך ש $AB = I_n$ אז בהכרח $BA = I_n$, וגם להפך (אם $BA = I_n$ אז $AB = I_n$).

3. אם $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ הפיכות, אז $C = AB$ גם הפיכה ומתקיים:

$$C^{-1} = (AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1},$$

כי:

$$CC^{-1} = ABB^{-1}A^{-1} = AI_nA^{-1} = AA^{-1} = I$$

4. אם A הפיכה, אז גם A^t הפיכה ומתקיים:

$$(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$$

5. תהא A מטריצה ריבועית, אז:

A הפיכה $\iff A$ שקולת שורה ל $I_n \iff \text{rank}(A) = n \iff$ לממ"ל $\vec{0} = A\vec{x}$ יש פתרון יחיד.

תרגיל 9.1

תהא $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. הראו כי A הפיכה ומצאו את A^{-1} .

פתרון:

תכף נראה דרכים יותר יעילות למצוא את ההופכית, אבל כרגע נחשב ישירות, נניח כי:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_A \underbrace{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}}_{A^{-1}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{I_2}$$

אז:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+c & b+d \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

אז $c=0, d=1$ אז:

$$\begin{pmatrix} a+c & b+d \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b+1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ולכן:

$$a=1, \quad b=-1$$

כלומר:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

תרגיל 9.2

תהא $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, הוכיחו כי:

1. אם B שורת אפסים אז A אינה הפיכה.
2. אם B עמודת אפסים אז A אינה הפיכה.
3. האם במקרה בו B אין שורת ועמודת אפסים A בהכרח הפיכה?

פתרון:

1. אם B שורת אפסים, כלומר קיים k כך ש $(A)_{k,i} = 0$ לכל $1 \leq i \leq k$.
נניח בשלילה שקיימת $B = A^{-1}$ אז $AB = I_n$, אבל נחשב:

$$(AB)_{k,k} = \sum_{i=1}^n A_{k,i} B_{i,k} = 0$$

אבל:

$$(AB)_{k,k} = (I_n)_{k,k} = 1$$

שזו סתירה.

פתרון נוסף: אם A שורת אפסים, אזי $\text{rank}(A) < n$, ולכן A אינה הפיכה.

2. תהא A מטריצה עם עמודת אפסים, נניח בשלילה כי A הפיכה, אז גם A^t , אבל ב A^t שורת אפסים, אז נקבל סתירה לסעיף הקודם.

3. נראה דוגמא נגדית:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

אז $\text{rank}(A) = 1 \neq 2$, אז היא לא הפיכה.

תזכורת

תהא A מטריצה ריבועית, אם A הפיכה, אז ניתן למצוא את A^{-1} על ידי דירוג באופן הבא:
נסמן $P = (A|I_n)$, היות ו- A הפיכה, ניתן לדרג את A ל- I_n בעזרת פעולות שורה, בפרט, גם ניתן לדרג את P באופן הבא:

$$P = (A|I_n) \xrightarrow{\text{דירוג}} (I_n|B)$$

אז $B = A^{-1}$.

תרגיל 9.3

מצאו את המטריצה ההופכית ל:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

פתרון:
נרשום את:

$$P = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

ונדרג:

$$\begin{aligned} & \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{R_2 \rightarrow R_2 - R_1 \\ R_3 \rightarrow R_3 - R_1}} \\ & \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{R_2 \rightarrow R_2 - 2R_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{R_3 \rightarrow R_3 - R_2} \\ & \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -2 & 3 \end{array} \right) \xrightarrow{R_3 \leftrightarrow R_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & -2 \end{array} \right) \end{aligned}$$

אז:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

תזכורת

נשים לב כי אם $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ הפיכה, אז לכל $\vec{b} \in \mathbb{R}^n$, והקטור $\vec{v} = A^{-1}\vec{b} \in \mathbb{R}^n$ הוא פתרון לממ"ל:

$$A\vec{v} = \vec{b}$$

כלומר, אם A הפיכה, אז לכל וקטור $\vec{b}$ קיים פתרון למערכת $A\vec{v} = \vec{b}$, אבל היות ולמערכת $A\vec{v} = \vec{0}$ יש פתרון יחיד (כי A הפיכה) אז גם למערכת $A\vec{v} = \vec{b}$ יש פתרון יחיד. כלומר, אם A הפיכה, אז לממ"ל $A\vec{v} = \vec{b}$ יש פתרון יחיד לכל $\vec{b} \in \mathbb{R}^n$, והוא $\vec{v} = A^{-1}\vec{b}$.

9.4 תרגיל

1. תהא $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ הפיכה, ו v_1, v_2, v_3 ווקטורים בת"ל, הוכיחו כי Av_1, Av_2, Av_3 גם בת"ל.

2. האם הטענה נכונה עבור A שאינה הפיכה?

פתרון:

1. נניח בשלילה כי Av_1, Av_2, Av_3 ת"ל, כלומר קיימים $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ שאינם כולם אפס כך ש:

$$\lambda_1 Av_1 + \lambda_2 Av_2 + \lambda_3 Av_3 = 0$$

אבל:

$$\lambda_1 Av_1 + \lambda_2 Av_2 + \lambda_3 Av_3 = A(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3)$$

כלומר $u = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3$ פתרון של המערכת $Ax = 0$, אבל A הפיכה ולכן הפתרון היחיד של המערכת הוא $u = 0$ אז:

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 = 0$$

בסתירה לכך ש v_1, v_2, v_3 בת"ל.

2. נראה דוגמא נגדית:

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

9.2 | דטרמיננטות

תזכורת

לכל מטריצה ריבועית $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ קיים מספר (סקלר) שנסמן $\det(A) = |A| \in \mathbb{R}$ לפני שנראה כיצד מחשבים אותו, מספר תכונות חשובות הן:

1. A הפיכה אמ"מ $\det(A) \neq 0$.

2. כפליות הדטרמיננטה:

$$\det(AB) = \det(A) \det(B)$$

בפרט, אם A הפיכה אז:

$$\det(A^{-1}) \det(A) = \det(A^{-1}A) = \det(I_n) = 1$$

אז:

$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$$

3.

$$\det(A) = \det(A^t)$$

4.

$$\det(\lambda A) = \lambda^n \det(A)$$

דוגמא 9.5

חישוב דטרמיננטה נעשה באופן ריקורסיבי, ההגדרה המדויקת של דטרמיננטה נלמדה בהרצאות, אנו נראה דוגמאות בלבד.

נתחיל במקרה של 2×2 , אם $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ אז:

$$\det(A) = ad - bc$$

למשל:

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = 1 \cdot 4 - 2 \cdot 3 = -2$$

אם A היא $n \times n$, נבחר שורה או עמודה, ואז לכל איבר בה, נסמן את המינור של איבר זה ע"י מחיקת השורה והעמודה של איבר זה, כלומר, המינורים מטריצות $(n-1) \times (n-1)$ ואז נחבר את הדטרמיננטות שלהן כפול האיבר המחוק כפול הסימן לפי הכלל הבא:

$$\begin{pmatrix} + & - & + & \dots \\ - & + & - & \dots \\ + & - & + & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

למשל:

1.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

אז נפתח על פי השורה הראשונה:

$$\det(A) = (+1) \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} + (-2) \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= 2 - 3 - 2(2 - 1) + 3(3 - 1) = 3$$

2.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

נבחר את העמודה השלישית ונפתח סביבה:

$$\det(A) = +3 \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

את $\det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ נחשב ע"י השורה הראשונה:

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 + 3 - 1 = 4$$

אז:

$$\det(A) = +3 \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 3 \cdot 4 = 12$$

תרגיל 9.6

האם מתקיים $\det(A + B) = \det(A) + \det(B)$?

פתרון:

לא, נראה דוגמה נגדית:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

אז $\det(A) + \det(B) = 2$, אבל:

$$\det(A + B) = \det \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right) = \det \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0$$

תרגיל 9.7.

מצאו עבור אילו $t \in \mathbb{R}$ המטריצה הבאה הפיכה?

$$A = \begin{pmatrix} 1 & t & 3 \\ t & 1 & 2 \\ 0 & t & 4 \end{pmatrix}$$

פתרון:

נחשב את $\det(A)$ בעזרת העמודה הראשונה:

$$\det(A) = 1 \det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ t & 4 \end{pmatrix} - t \det \begin{pmatrix} t & 3 \\ t & 4 \end{pmatrix} = 4 - 2t - t(4t - 3t) = -t^2 - 2t + 4$$

כלומר, A לא הפיכה אם $-t^2 - 2t + 4 = 0$ אם $t = \frac{-2 \pm \sqrt{20}}{-2}$.

תרגיל 9.8.

תהא A_n מטריצה מסדר $n \times n$ עם 2 על האלכסון הראשי ו 1 מתחת/מעל האלכסון הראשי:

$$A_1 = (2), A_2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, A_3 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, A_4 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

חשבו את $\det(A_n)$.

פתרון:

חישוב ישיר ייתן לנו כי:

$$\det(A_1) = 2, \quad \det(A_2) = 3, \quad \det(A_3) = 4$$

וננחש כי $\det(A_n) = n + 1$, נוכיח זאת באינדוקציה, נשים לב כי:

$$A_n = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 2 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & & & \\ \vdots & \vdots & & A_{n-2} & \\ 0 & 0 & & & \end{pmatrix}$$

כלומר:

$$\det(A_n) = 2 \det(A_{n-1}) - \det(A_{n-2})$$

את מקרה הבסיס ראינו, יהא $n \geq 3$, ונניח כי לכל $m < n$ מתקיים:

$$\det A_m = m + 1$$

אז:

$$\det(A_n) = 2 \det(A_{n-1}) - \det(A_{n-2}) = 2((n-1) + 1) - ((n-2) + 1) = 2n - (n-1) = n + 1$$

וסיימו.

9.3 | מטריצות אלמנטריות

תזכורת

ראינו בהרצאה שלכל פעולת דירוג אלמנטריות (החלפת שורה, הכפלת שורה או הוספת שורה כפול סקלר לשורה אחרת) קיימת מטריצה E כך שהפעולה שקולה למכפלה משמאל ב- E , כלומר, אם:

$$A \xrightarrow{\text{פעולת דירוג אלמנטרית}} B$$

אז:

$$B = EA$$

דרך לזכור איך נראות מטריצות אלה הן לראות מה קורה למטריצה I_n , כי אם $B = EI_n$ אז $E = B$, כלומר המטריצה שמייצגת פעולה היא התוצאה של ביצוע הפעולה על מטריצת היחידה. למשל, המטריצה 4×4 שמייצגת החלפת שורה 1 עם שורה 3 היא:

$$E = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

כי $E \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_3} I_4$. יש לנו כמה מסקנות חשובות:

1. אם A שקולה שורות ל I_n , אז:

$$E_n E_{n-1} \cdot \dots \cdot E_1 A = I_n$$

בפרט, A הפיכה ו $A^{-1} = E_n E_{n-1} \cdot \dots \cdot E_1$.

2. אם $A \xrightarrow{\text{פעולת דירוג אלמנטרית}} B$, אז $\det(B) = \det(E) \cdot \det(A)$, כלומר, פעולות דירוג אלמנטריות משפיעות על הדטרמיננטה על ידי כפל בדטרמיננטה של E , בהרצאה חישבנו את הדטרמיננטות של מטריצות אלה:

(א) החלפת שורות: $\det(E) = -1$.

(ב) הכפלת שורה ב $\lambda: \lambda \in \mathbb{R}$: $\det(E) = \lambda$.

(ג) הוספת שורה כפול ל שורה אחרת: $\det(E) = 1$.

במילים אחרים, פעולות דירוג אלמנטריות משפיעות על הדטרמיננטה כך:

(א) החלפת שורות מכפילה את הדטרמיננטה ב-1.

(ב) הכפלת שורה ב $\lambda \in \mathbb{R}$ מכפילה את הדטרמיננטה ב λ .

(ג) הוספת ל שורה כל שורה אחרת כפול כל סקלר לא משנה את הדטרמיננטה.

תרגיל 9.9.

חשבו את

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 6 & 12 \\ 0 & 2 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 3 & 10 \end{pmatrix}$$

פתרון:

נבצע פעולות דירוג:

$$\begin{aligned} \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 6 & 12 \\ 0 & 2 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 3 & 10 \end{pmatrix} &= -\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 & 12 \\ 0 & 0 & 3 & 10 \end{pmatrix} = -2 \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 3 & 10 \end{pmatrix} \\ &= -2 \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 3 & 10 \end{pmatrix} = -2 \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = -2(1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4) = -48 \end{aligned}$$

תרגיל 9.10.

הוכיחו או הפריכו:

1. קיימת $A \in \mathbb{R}^{9 \times 9}$ מטריצה ממשית כך ש:

$$A^{1882} = -2I_9$$

2. קיימת $A \in \mathbb{R}^{5 \times 5}$ מטריצה ממשית כך ש:

$$A^{1883} = -3I_5$$

פתרון:

1. נניח שיש כזאת, אז:

$$\det(A)^{1882} = \det(A^{1882}) = \det(-2I_n) = (-2)^9 \det(I_n) = -512$$

אבל כמובן של קיים מספר ממשי x כך ש $x^{1882} = -512$, בפרט, לא קיימת מטריצה A המקיימת את הנדרש.

2. אם נחזור על מה שעשינו הסעיף הקודם נקבל:

$$\det(A)^{1883} = (-3)^5 \Rightarrow \det(A) = ((-3)^5)^{\frac{1}{1883}} \in \mathbb{R}$$

זו לא סתירה, ננחש מטריצה סקלרית מהצורה $A = \lambda I_5$, ונקבל:

$$\det(A) = \det(\lambda I_5) = \lambda^5 = ((-3)^5)^{\frac{1}{1883}} \Rightarrow \lambda = (-3)^{\frac{1}{1883}}$$

ואכן,

$$A^{1883} = ((-3)^{\frac{1}{1883}} I_5)^{1883} = ((-3)^{\frac{1}{1883}})^{1883} (I_5)^{1883} = -3I_5$$

כדרש.

9.4 | כלל קרמר

תזכורת

כלל קרמר הוא שיטה למציאת פתרון למערכת משוואות לינאריות ריבועית כאשר המטריצה של המערכת הפיכה.

תהא A מטריצה ריבועית הפיכה, ותהא מערכת המשוואות:

$$A\vec{x} = \vec{b}$$

נסמן ב $A_k^{\vec{b}}$ את המטריצה המתקבלת ע"י החלפת עמודה k בוקטור b , נגדיר:

$$d_k = \frac{\det(A_k^{\vec{b}})}{\det A}$$

$$\text{אז } D = \begin{pmatrix} d_1 \\ \vdots \\ d_n \end{pmatrix} \text{ פתרון למערכת.}$$

תרגיל 9.11

פתרו את המשוואה הבאה בעזרת כלל קרמר:

$$\begin{cases} 2x + y - z = 3 \\ x + y + z = 1 \\ x - 2y - 3z = 4 \end{cases}$$

פתרון:



נכתוב כמטרices:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

אז:

$$\det(A) = 5 \neq 0 \Rightarrow \text{הפיכה } A$$

$$\det(A_1) = \det \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 4 & -2 & -3 \end{pmatrix} = 10 \Rightarrow d_1 = \frac{10}{5} = 2$$

$$\det(A_2) = \det \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 4 & -2 & -3 \end{pmatrix} = -5 \Rightarrow d_2 = \frac{-5}{5} = -1$$

$$\det(A_3) = \det \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 4 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow d_3 = \frac{0}{5} = 0$$

אז:

$$D = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

פתרון של המערכת.

9.5 | מטריצת ונדרמונדה - קריאה עצמית

תרגיל 9.12

יהיו $x_0, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ נסמן:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \dots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^n \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(n+1) \times (n+1)}$$

מטריצה זאת נקראת מטריצת Vandermonde ויש לה שימושים רבים. מתקיים כי $\det A = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_i - x_j)$, הוכיחו זאת עבור $n = 2$.

פתרון:

עבור $n = 2$ מתקיים כי:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 \\ 1 & x_1 & x_1^2 \\ 1 & x_2 & x_2^2 \end{pmatrix}$$

נשתמש בפעולות דירוג:

$$\det A = \det \begin{pmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 \\ 1 & x_1 & x_1^2 \\ 1 & x_2 & x_2^2 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 \\ 0 & x_1 - x_0 & x_1^2 - x_0^2 \\ 0 & x_2 - x_0 & x_2^2 - x_0^2 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} x_1 - x_0 & x_1^2 - x_0^2 \\ x_2 - x_0 & x_2^2 - x_0^2 \end{pmatrix}$$

נזכר בכך ש $\det$ כפולית בכל שורה בנפרד ונקבל כי:

$$\begin{aligned} \det(A) &= \det \begin{pmatrix} x_1 - x_0 & (x_1 - x_0)(x_1 + x_0) \\ x_2 - x_0 & (x_2 - x_0)(x_2 + x_0) \end{pmatrix} = (x_1 - x_0) \det \begin{pmatrix} 1 & x_1 + x_0 \\ x_2 - x_0 & (x_2 - x_0)(x_2 + x_0) \end{pmatrix} \\ &= (x_1 - x_0)(x_2 - x_0) \det \begin{pmatrix} 1 & x_1 + x_0 \\ 1 & x_2 + x_0 \end{pmatrix} = (x_1 - x_0)(x_2 - x_0)((x_2 + x_0) - (x_1 + x_0)) \\ &= (x_1 - x_0)(x_2 - x_0)(x_2 - x_1) \end{aligned}$$

תרגיל 9.13.

יהיו $n+1$ נקודות ב $\mathbb{R}^2$, $(x_0, y_0), \dots, (x_n, y_n)$, כך ש $i \neq j \Rightarrow x_i \neq x_j$, הוכיחו כי קיים פולינום ממעלה n :

$$p(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$$

כך ש:

$$\forall i, p(x_i) = y_i$$

פתרון:

נשים לב כי אנו מחפשים $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ כך ש:

$$\begin{cases} p(x_0) = a_0 + a_1x_0 + \dots + a_nx_0^n = y_0 \\ p(x_1) = a_0 + a_1x_1 + \dots + a_nx_1^n = y_1 \\ \vdots \\ p(x_n) = a_0 + a_1x_n + \dots + a_nx_n^n = y_n \end{cases}$$

כלומר:

$$\begin{pmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \dots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^n \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

אנו יודעים כי קיימת למערכת פתרון יחיד אם $\det(A) \neq 0$, אבל ראינו כי:

$$\det A = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_i - x_j)$$

אבל כל ה $x_0, \dots, x_n$ שונים ולכן:

$$\det(A) \neq 0$$

וסיימנו.

9.6 | תרגילים לתרגול עצמי

תרגיל 9.14.

תהא $A = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, הוכיחו כי A הפיכה אם $\lambda_1, \dots, \lambda_n \neq 0$.

פתרון:

ראשית, אם $\lambda_k = 0$ עבור k כלשהו אז AB שורת אפסים ולכן A אינה הפיכה, נראה כי אם $\lambda_1, \dots, \lambda_n \neq 0$ אז A הפיכה, ואכן נזכר כי:

$$\text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \text{diag}(\eta_1, \dots, \eta_n) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \dots & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta_1 & \dots & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & \dots & \eta_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \eta_1 \lambda_1 & \dots & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & \dots & \eta_n \lambda_n \end{pmatrix}$$

אז באמת:

$$B = \text{diag}\left(\frac{1}{\lambda_1}, \dots, \frac{1}{\lambda_n}\right)$$

מקיימת:

$$AB = \text{diag}(1, \dots, 1) = I_n$$

תרגיל 9.15.

תהא $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, כך ש:

$$A^{10} = -I_n$$

הוכיחו כי A הפיכה ומצאו את A^{-1} .

פתרון:

נשים לב כי:

$$A^{20} = (-I_n)(-I_n) = (-1)^2 I_n = I_n$$

אז:

$$A^{20} = AA^{19} = I_n$$

אז:

$$A^{-1} = A^{19}$$

תרגיל 9.16.

תהא $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ כך ש:

$$(A + I_n)^2 = 0$$

הוכיחו כי A הפיכה.

פתרון:

נפתח סוגריים:

$$(A + I_n)^2 = (A + I_n)(A + I_n) = A^2 + A + A + I_n = A^2 + 2A + I_n$$

אז:

$$A^2 + 2A = -I_n \Rightarrow A(A + 2I_n) = -I_n \Rightarrow A(-A - 2I_n) = I_n$$

אז:

$$A^{-1} = -A - 2I_2$$

תרגיל 9.17.

תהא $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ הפיכה, ותהא B מטריצה כך ש:

$$A^2 = B^2$$

הוכיחו כי B הפיכה.**פתרון:**

נשים לב כי:

$$B^2(A^{-1})^2 = A^2(A^{-1})^2 = I_n$$

אז:

$$B(B(A^{-1})^2) = I_n$$

אז:

$$B^{-1} = B(A^{-1})^2$$

תרגול עשירי

10.1 | העתקות לינאריות

תזכורת

יהיו V, W מרחבים וקטוריים מעל אותו שדה $\mathbb{R}$. פונקציה $T : V \rightarrow W$ תקרא העתקה לינארית אם:

1.

$$\forall v_1, v_2 \in V, \quad T(v_1 + v_2) = T(v_1) + T(v_2)$$

2.

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad v \in V, \quad T(\lambda v) = \lambda T(v)$$

או לחילופין:

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad v_1, v_2 \in V, \quad T(\lambda v_1 + v_2) = \lambda T(v_1) + T(v_2)$$

לקבוצת כל האיברים שנשלחים ל-0 נקרא הגרעין של T :

$$\ker(T) = \{v \in V \mid T(v) = 0\} \subset V$$

של ההעתקה, ולאוסף כל האיברים שהתקבלו ב- W ע"י T נקרא התמונה של T , ונסמן:

$$\operatorname{Im}(T) = \{T(v) \mid v \in V\} \subset W$$

$\ker(T)$ הוא תת מרחב של V ו- $\operatorname{Im}(T)$ הוא תת מרחב של W .

תרגיל 10.1.

תהא $T : V \rightarrow W$ העתקה לינארית, הראו כי $T(\vec{0}_V) = \vec{0}_W$.

פתרון:

נשים לב כי:

$$T(\vec{0}_V) = T(0 \cdot \vec{0}_V) = 0 \cdot T(\vec{0}_V) = \vec{0}_W$$

תרגיל 10.2.

עבור העתקות הבאות, בדקו האם מדובר בהעתקה ליניארית, ואם כן מצאו את הגרעין והתמונה.

1.

$$T: \mathbb{R}^{2 \times 2} \rightarrow \mathbb{R}^{2 \times 2}, \quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a & c+d \\ 1 & b \end{pmatrix}$$

2.

$$T: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad T(x) = \begin{pmatrix} x \\ x \\ x \end{pmatrix}$$

3.

$$T: \mathbb{R}^{2 \times 2} \rightarrow \mathbb{R}^{2 \times 2}, \quad A \mapsto A^2$$

4. עבור $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ מטריצה מסדר 2×3 נגדיר את ההעתקה:

$$T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad T(v) = Av$$

5.

$$T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}_3[x]$$

המוגדרת ע"י:

$$T \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = ax^3 + ax^2 + (b+c)x + (a+b+c)$$

6.

$$T: \mathbb{R}^{2 \times 2} \rightarrow \mathbb{R}, \quad T(A) = \det(A)$$

פתרון:

1. זו לא העתקה ליניארית כי $T(0) \neq 0$.

2. ראשית נבדוק שזו העתקה ליניארית. יהיו $\lambda \in \mathbb{F}, x_1, x_2 \in \mathbb{R}$. נחשב:

$$T(\lambda x_1 + x_2) = \begin{pmatrix} \lambda x_1 + x_2 \\ \lambda x_1 + x_2 \\ \lambda x_1 + x_2 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ x_1 \\ x_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 \\ x_2 \\ x_2 \end{pmatrix} = \lambda T(x_1) + T(x_2)$$

נבדוק מהו הגרעין של ההעתקה. מהגדרה אנחנו מחפשים את כל ה $x \in \mathbb{R}$ כך ש:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = T(x) = \begin{pmatrix} x \\ x \\ x \end{pmatrix}$$

זוהי נכון רק עבור $x = 0$, כלומר הגרעין של T הוא $\{0\}$. נחשב את התמונה:

$$\text{Im}(T) = \{T(x) \mid x \in \mathbb{R}\} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ x \\ x \end{pmatrix} \mid x \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ x \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \mid x \in \mathbb{R} \right\} = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

3. זו לא העתקה ליניארית, כי אין ליניאריות בכפל בסקלר:

$$\begin{aligned} T(2I) &= 4I^2 = 4I \\ 2T(I) &= 2I^2 = 2I \end{aligned}$$

4. נבחין כי כפל מטריצות הוא ליניארי, ולכן בפרט גם כפל מטריצה בוקטור ליניארי, כלומר:

$$\forall \lambda \in \mathbb{F}, v_1, v_2 \in V \quad T(\lambda v_1 + v_2) = A(\lambda v_1 + v_2) = \lambda A v_1 + A v_2 = \lambda T(v_1) + T(v_2)$$

נבדוק מהו הגרעין של ההעתקה. מהגדרה אנחנו מחפשים את כל $x \in \mathbb{R}$ כך ש:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 = T \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 + 2\lambda_2 + 3\lambda_3 \\ \lambda_3 \end{pmatrix}$$

זו ממ"ל שהפתרון שלה הוא:

$$\lambda_3 = 0, \lambda_1 = -2\lambda_2$$

כלומר:

$$\begin{aligned} \ker(T) &= \left\{ \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix} \mid \lambda_1 = -2\lambda_2, \lambda_3 = 0 \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} -2\mu \\ \mu \\ 0 \end{pmatrix} \mid \mu \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \mu \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \mid \mu \in \mathbb{R} \right\} = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \end{aligned}$$

נרצה לראות שהתמונה של ההעתקה היא $\mathbb{R}^2$, כלומר שלכל $a, b \in \mathbb{R}$ קיימים $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ כך ש:

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 + 2\lambda_2 + 3\lambda_3 \\ \lambda_3 \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

זו ממ"ל במשתנים $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ שנוכל לפתור ע"י דירוג מטריצת המקדמים המורחבת, או שנבחין כי $\lambda_1 = a - 3b, \lambda_2 = 0, \lambda_3 = b$ הוא פתרון של המערכת.

5. נראה כי ההעתקה ליניארית, יהיו $\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ ו $\lambda \in \mathbb{R}$, נחשב:

$$\begin{aligned} T\left(\lambda \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \end{pmatrix}\right) &= T\begin{pmatrix} \lambda a_1 + a_2 \\ \lambda b_1 + b_2 \\ \lambda c_1 + c_2 \end{pmatrix} = (\lambda a_1 + a_2)x^3 + (\lambda a_1 + a_2)x^2 \\ &\quad + (\lambda b_1 + b_2 + \lambda c_1 + c_2)x + (\lambda a_1 + a_2 + \lambda b_1 + b_2 + \lambda c_1 + c_2) \\ &= \lambda(a_1x^3 + a_1x^2 + (b_1 + c_1)x + (a_1 + b_1 + c_1)) \\ &\quad + (a_2x^3 + a_2x^2 + (b_2 + c_2)x + (a_2 + b_2 + c_2)) = \lambda T\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix} + T\begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

נתחיל מהגרעין, מהגדרה אנחנו מחפשים את כל ה $v \in \mathbb{R}^3$ כך ש:

$$0 = T\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = ax^3 + ax^2 + (b+c)x + (a+b+c)$$

כלומר,

$$\begin{cases} a = 0 \\ a = 0 \\ b + c = 0 \\ a + b + c = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = -c \end{cases}$$

כלומר:

$$\ker(T) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ b \\ -b \end{pmatrix} \mid b \in \mathbb{R} \right\} = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$$

נראה כי:

$$T\left(\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}\right) = ax^3 + ax^2 + (b+c)x + (a+b+c) = a(x^3 + x^2 + x + 1) + b(x+1) + c(x+1)$$

כלומר,

$$\text{Im}(T) = \text{span} \{x^3 + x^2 + x + 1, x + 1\}$$

6. נראה כי ההעתקה אינה ליניארית, למשל:

$$T(2I_n) = 4 \neq 2 = 2T(I_n)$$

10.2 | בניית העתקות לינאריות

תזכורת

יהא $B = (v_1, \dots, v_n)$ בסיס ל V . אם $T : V \rightarrow W$ העתקה לינארית, אז לכל $v \in V$, קיימים (ביחידות!) סקלרים $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ כך ש:

$$v = a_1 v_1 + \dots + a_n v_n$$

אז:

$$T(v) = T(a_1 v_1 + \dots + a_n v_n) = a_1 T(v_1) + \dots + a_n T(v_n)$$

במילים אחרות, אם T עושה לבסיס, T עושה למה היא עושה לכל וקטור ב V .

אפשר גם לנסח טענה הפוכה.

יהא $B = (v_1, \dots, v_n)$ בסיס ל V . לכל $w_1, \dots, w_n \in W$, קיימת העתקה לינארית יחידה $T : V \rightarrow W$ כך ש:

$$T(v_1) = w_1, \dots, T(v_n) = w_n$$

שימו לב - אם משתמשים פה בטענה הבא: לכל וקטור $v \in V$ קיימים סקלרים יחידים $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ כך ש $v = a_1 v_1 + \dots + a_n v_n$, כלומר:

$$a_1 v_1 + \dots + a_n v_n = b_1 v_1 + \dots + b_n v_n \implies a_1 = b_1, \dots, a_n = b_n$$

זו כמובן תכונה של בסיס.

תרגיל 10.3.

מצאו העתקה לינארית $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$ המקיימת

$$\ker T = \text{span} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right), \quad \text{Im } T = \text{span} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$$

פתרון:

נשלים את $f_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ לבסיס של $\mathbb{R}^3$, למשל על ידי:

$$f_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, f_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ונגדיר:

$$T(f_1) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, T(f_2) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, T(f_3) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

וסיימנו! אנחנו יודעים שקיימת העתקה יחידה שמקיימת זאת, והיא תקיים את הנדרש:

$$T(af_1 + bf_2 + cf_3) = aT(f_1) + bT(f_2) + cT(f_3) = b \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

וכמובן:

$$\vec{0} = T(af_1 + bf_2 + cf_3) = b \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b+c \\ 2b \\ 3b \\ 4b \end{pmatrix} \iff b=0, c=0$$

כלומר, $\ker(T) = \text{span}(f_1)$ כנדרש.

נשים לב כי זאת לא העתקה היחידה שמקיימת זאת, וזה בא לידי ביטוי בבחירת הבסיס.

תרגיל 10.4.

האם קיימת העתקה לינארית $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ כך ש:

$$T \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad T \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad T \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ -15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

אם כן מצאו את $\ker T, \text{Im } T$.**פתרון:**

נשים לב כי:

$$\begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ -15 \end{pmatrix} = -5 \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$$

אז אם הייתה קיימת העתקה כזאת, אז מלינאריות:

$$T \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ -15 \end{pmatrix} = T \left(-5 \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \right) = -5T \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + 5T \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = -5 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + 5 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \end{pmatrix}$$

אבל, עפ"י הנתון מתקיים:

$$T \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ -15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

אז לא קיימת העתקה ליניארית כזאת.

10.3 | משפט המימדים של העתקות ליניאריות

תזכורת

תהא $T : V \rightarrow W$ העתקה ליניארית בין מרחבים וקטוריים ממימד סופי מעל השדה $\mathbb{R}$, אז:

$$\dim(\ker(T)) + \dim(\text{Im}(T)) = \dim(V)$$

תרגיל 10.5.

תהא $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ העתקה המוגדרת על ידי:

$$T(v) = Av, \quad A \in \mathbb{R}^{m \times n}$$

1. הראו כי T ליניארית.

2. מהו $\dim(\ker(T))$ ו- $\dim(\text{Im}(T))$?

פתרון:

1. T ליניארית מכללי כפל במטריצות:

$$T(\lambda \vec{v}) = A(\lambda \vec{v}) = \lambda A(\vec{v}) = \lambda T(\vec{v})$$

$$T(\vec{v}_1 + \vec{v}_2) = A(\vec{v}_1 + \vec{v}_2) = A\vec{v}_1 + A\vec{v}_2 = T(\vec{v}_1) + T(\vec{v}_2)$$

2. יש כמה דברים שאפשר לעשות. דרך אחת היא להזכר כי:

$$\text{Col}(A) = \{Av \mid v \in \mathbb{R}^n\} = \{T(v) \mid v \in \mathbb{R}^n\} = \text{Im}(T)$$

כלומר, $\dim(\text{Col}(A)) = \dim(\text{Im}(T)) = \text{rank}(A)$.

$$\dim \mathbb{R}^n = \dim(\ker(T)) + \dim(\text{Im}(T)) \implies n = \dim(\ker(T)) + \text{rank}(A)$$

כלומר:

$$\dim(\ker(T)) = n - \text{rank}(A) = \dim(N(A))$$

תרגיל 10.6.

עבור העתקות הלינאריות הבאות, מצאו את מימד התמונה והגרעין:

$$1. \quad T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 \quad \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 4 \\ 1 & 4 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$$

$$2. \quad T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 \quad \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$$

$$3. \quad T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2 \quad \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$$

$$4. \quad T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^4 \quad \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$$

פתרון:

1. נשים לב כי $\text{rank}(A) = 2$, ולכן:

$$\dim(\text{Im}(T)) = \text{rank}(A) = 2$$

$$\dim(\ker(T)) = 3 - 2 = 1, \text{ ולכן}$$

2. $\text{rank}(A) = 3$, כלומר $\dim(\text{Im}(T)) = 3$ ו- $\dim(\ker(T)) = 0$.

3. $\text{rank}(A) = 2$, כלומר $\dim(\text{Im}(T)) = 2$ ו- $\dim(\ker(T)) = 3 - 2 = 1$.

4. $\text{rank}(A) = 2$, כלומר $\dim(\text{Im}(T)) = 2$ ו- $\dim(\ker(T)) = 2 - 2 = 0$.

תרגיל 10.7.

תהא העתקה:

$$T: \mathbb{R}_{10}[x] \rightarrow \mathbb{R}_9[x], \quad T(p(x)) = p'(x)$$

הוכיחו כי T לינארית, ומצאו את $\ker T$, $\text{Im } T$.

פתרון:

לינאריות מתקבלת מיידיית מחוקי גזירה:

$$(p(x) + \lambda q(x))' = p'(x) + \lambda q'(x)$$

עוד חוק מחדו"א שיעזור לנו הוא ש:

$$p'(x) = 0 \iff p(x) = c, \quad c \in \mathbb{R}$$

כלומר:

$$\ker T = \{c \in \mathbb{R}_{10}[x] \mid c \in \mathbb{R}\} = \text{span}(1)$$

שזה מרחב ממימד 1, אז ממשפט המימדים:

$$\dim \text{Im } T = \dim \mathbb{R}_{10}[x] - \dim \ker T = 11 - 1 = 10$$

אז $\text{Im } T$ תמ"ז של מרחב ממימד 10 מממד 10, ולכן הוא כל $\mathbb{R}_9[x]$.

10.4 | איזומורפיזם

תזכורת

נזכר שפונקציה $f : X \rightarrow Y$ נקראת חח"ע אם:

$$\forall x_1, x_2 \in X, \quad f(x_1) = f(x_2) \implies x_1 = x_2$$

אם T לינארית, אז בפרט $T(v) = T(0) = 0 \iff v = 0$ כלומר, $\ker(T) = \{0\}$.

תרגיל 10.8.

תהא $T : V \rightarrow W$ העתקה לינארית בין מרחבים וקטוריים מממד סופי מעל $\mathbb{R}$.
הראו כי אם $\ker(T) = \{0\}$ אז T חח"ע.
נשים לב כי זה אומר כי T היא חד-חד-אמ"מ $\ker(T) = \{0\}$.

פתרון:

נניח בשלילה כי T אינה חח"ע, ומתקיים $\ker(T) = \{0\}$.
היות ו T אינה חח"ע, קיימים $v_1, v_2 \in V, v_1 \neq v_2$ כך ש $T(v_1) = T(v_2)$, אז:

$$T(v_1) - T(v_2) = T(v_1 - v_2) = 0 \implies (v_1 - v_2) \in \ker(T)$$

אבל כמובן ש $v_1 - v_2 \neq 0$ כי $v_1 \neq v_2$, זו סתירה לכך ש $\ker(T) = \{0\}$.

תזכורת

תהא $T : V \rightarrow W$ העתקה ליניארית בין מרחבים וקטוריים ממימד סופי מעל $\mathbb{R}$.
העתקה T נקראת איזומורפיזם אם היא חד-חד ערכית ועל, נשים לב למספר דברים.

1. אם T איזומורפיזם, אז מתקיים $\dim(W) = \dim(\text{Im}(T))$ ו- $\dim(\ker(T)) = 0$, אז ממשפט המימדים $\dim(V) = \dim(W)$.

2. נזכר שאם פונקציה חח"ע ועל אז היא הפיכה, כלומר, קיימת העתקה $T^{-1} : W \rightarrow V$ כך שלכל $v \in V$:

$$T^{-1}(T(v)) = v \quad T(T^{-1}(w)) = w, \quad \forall w \in W$$

עובדה מפתיעה שהוכחנו בהרצאה היא ש- T^{-1} גם היא ליניארית.

תרגיל 10.9.

תהא $T : V \rightarrow W$ העתקה ליניארית בין מרחבים וקטוריים ממימד סופי מעל $\mathbb{R}$.
הראו כי כל זוג מהתכונות הבאות גורר את השלישית:

1. T חח"ע.

2. T על.

3. $\dim(V) = \dim(W)$.

פתרון:

$$(1) + (2) \Rightarrow (3)$$

ראינו.

$$(1) + (3) \Rightarrow (2)$$

אנו יודעים כי:

$$\dim(W) = \dim(V) = \underbrace{\dim(\ker(T))}_{=0} + \dim(\text{Im}(T)) = \dim(\text{Im}(T))$$

כלומר, $\text{Im}(T) = W$, כלומר, T על.

$$(2) + (3) \Rightarrow (1)$$

אנו יודעים כי:

$$\dim(V) = \dim(\text{Im}(T)) + \dim(\ker(T)) = \dim(W) + \dim(\ker(T)) = \dim(V) + \dim(\ker(T))$$

ולכן $\dim(\ker(T)) = 0$, כלומר, T חח"ע.



תרגיל 10.10.

תהא $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ המוגדרת על ידי:

$$T(\vec{v}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \vec{v}$$

הראו כי T איזומורפיזם, ומצאו את T^{-1} .

פתרון:

T איזומורפיזם אמ"מ $\text{rank}(A) = 3$, כלומר אם A הפיכה. A באמת הפיכה, ואפשר למצוא את A^{-1} בעזרת דירוג:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{\text{דירוג}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

כלומר, $T^{-1}(v) = A^{-1}v$, ובאמת מתקיים:

$$T(T^{-1}v) = A(A^{-1}v) = (AA^{-1})v = Iv = v$$

10.5 | תרגילים לתרגול עצמי

תרגיל 10.11.

תהא $T : \mathbb{R}^{2 \times 2} \rightarrow \mathbb{R}_3[x]$ ההעתקה הליניארית הנתונה על ידי:

$$T \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = (a-d)x^3 + (b+c)x^2 + (a+b+c+d)x + (2a+2b+c)$$

T היא העתקה ליניארית (אין צורך להוכיח זאת).

1. הראו כי T היא איזומורפיזם.

2. מצאו את $T^{-1} : \mathbb{R}_3[x] \rightarrow \mathbb{R}^{2 \times 2}$.

פתרון:

1. נשים לב כי $\dim \mathbb{R}^{2 \times 2} = \dim \mathbb{R}_3[x] = 4$, ולכן, מספיק להראות כי T חח"ע, כלומר, $\ker T = \{0\}$.
נניח כי

$$T \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = (a-d)x^3 + (b+c)x^2 + (a+b+c+d)x + (2a+2b+c) = 0$$

כלומר:

$$\begin{cases} a - d = 0 \\ b + c = 0 \\ a + b + c + d = 0 \\ 2a + 2b + c = 0 \end{cases}$$

מהמשוואה הראשונה נקבל $d = a$, מהשנייה נקבל $c = -b$, נציב במשוואה השלישית:

$$a + b - b + a = 2a = 0 \Rightarrow a = 0 \Rightarrow d = 0$$

נציב במשוואה הרביעית:

$$0 + 2b - b = b = 0 \Rightarrow c = 0$$

כלומר, $a = b = c = d = 0$, ולכן, $\ker T = \{0\}$, כלומר, T חח"ע, ולכן, T איזומורפיזם.

2. היות T איזומורפיזם, קיימת העתקה ליניארית הפוכה $T^{-1} : \mathbb{R}_3[x] \rightarrow \mathbb{R}^{2 \times 2}$.
לכל $p(x) = \alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta \in \mathbb{R}_3[x]$, נרצה למצוא את המטריצה $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ כך ש:
 $T \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = p(x)$, ואז נקבל כי $T^{-1}(p(x)) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. כלומר, נרצה לפתור את המשוואה:

$$T \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = (a-d)x^3 + (b+c)x^2 + (a+b+c+d)x + (2a+2b+c) = \alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta$$

כלומר, את מערכת המשוואות:

$$\begin{cases} a - d = \alpha \\ b + c = \beta \\ a + b + c + d = \gamma \\ 2a + 2b + c = \delta \end{cases}$$

נפתור את מערכת המשוואות:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 & \alpha \\ 0 & 1 & 1 & 0 & \beta \\ 1 & 1 & 1 & 1 & \gamma \\ 2 & 2 & 1 & 0 & \delta \end{array} \right) \xrightarrow{\text{דירוג}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{\alpha+\gamma-\beta}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \delta-\alpha-\gamma \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\delta+\alpha+\beta+\gamma \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{\gamma-\alpha-\beta}{2} \end{array} \right)$$

כלומר:

$$\begin{cases} a = \frac{\alpha+\gamma-\beta}{2} \\ b = \delta-\alpha-\gamma \\ c = -\delta+\alpha+\beta+\gamma \\ d = \frac{\gamma-\alpha-\beta}{2} \end{cases}$$

ולכן:

$$T^{-1}(\alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta) = \begin{pmatrix} \frac{\alpha+\gamma-\beta}{2} & \delta-\alpha-\gamma \\ -\delta+\alpha+\beta+\gamma & \frac{\gamma-\alpha-\beta}{2} \end{pmatrix}$$

תרגול אחד עשר

11.1 | ווקטורי קאורדינטות

תזכורת

אם V מ"ו מממד n מעל שדה $\mathbb{R}$, עם בסיס סדור $B = (v_1, \dots, v_n)$ כלומר אנו מקבעים את אברי הבסיס, אז קיימת העתקה:

$$T: V \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad v = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n \mapsto \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}$$

העתקה הזאת לינארית:

$$v = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n, \quad w = \eta_1 v_1 + \dots + \eta_n v_n, \quad \kappa \in \mathbb{R}$$

אז:

$$T(v + \kappa w) = \begin{pmatrix} \lambda_1 + \kappa \eta_1 \\ \vdots \\ \lambda_n + \kappa \eta_n \end{pmatrix} = T(v) + \kappa T(w)$$

והיא איזומורפיזם, כלומר $\text{Im } T = \mathbb{R}^n$, $\ker T = \{0\}$, היא תלויה בבסיס הסדור B . ונסמן $[v]_B = T(v)$. מסקנה מאוד חשובה מהמשפט הזה היא שכל מרחב וקטורי מממד n מעל שדה $\mathbb{R}$ איזומורפי ל $\mathbb{R}^n$.

תרגיל 11.1.

יהיו זוג בסיסים סדורים (אין צורך לבדוק כי אכן מדובר בבסיסים) של מרחב הפולינומים עד מעלה 2:

$$B_1 = (1, 1 + x, 1 + x^2), \quad B_2 = (2, 4x, 8x^2)$$

יהא $p(x) = 1 + x + x^2$, מצאו את $[p(x)]_{B_1}, [p(x)]_{B_2}$.

פתרון:

עבור כל בסיס ננסה לכתוב את $p(x)$ בתור צ"ל של אברי הבסיס, כמובן שמשום שמדובר בבסיס יש דרך יחידה לכך.

$$p(x) = 1 + x + x^2 = 1 + x^2 + (1 + x) - 1 \implies [p(x)]_{B_1} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$p(x) = 1 + x + x^2 = \frac{1}{2} \cdot 2 + \frac{1}{4} \cdot 4x + \frac{1}{8} \cdot 8x^2 \Rightarrow [p(x)]_{B_2} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} \\ \frac{1}{8} \end{pmatrix}$$

תרגיל 11.2.

יהי B הבסיס הבא (אין צורך להראות כי הוא בסיס):

$$v_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_2 := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_3 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

של $\mathbb{R}^3$. מצאו את וקטורי הקורדינטות לפי בסיס B של הוקטורים הבאים:

$$u_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad 1.$$

$$u_2 := \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 8 \end{pmatrix} \quad 2.$$

פתרון:

1. נבחין כי:

$$u_1 = 1 \cdot v_1 + 1 \cdot v_2 + 0 \cdot v_3$$

לכן מהגדרת וקטור קורדינטות:

$$[u_1]_B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

2. במקרה זה יהיה לנו יותר קשה לנחש. לכן, נרצה להציג את u_2 כצירוף לינארי של איברי הבסיס, בדיוק כמו שעשינו בעבר. כעת, חשוב לנו למצוא את המקדמים של הצירוף (מכיוון שזה בסיס יהיו כאלה, והם יהיו יחידים) ולא לבדוק האם ניתן להציג כצירוף. יהיו $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$ כך ש:

$$\begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 8 \end{pmatrix} = u_2 = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 = \begin{pmatrix} \alpha_1 + \alpha_3 \\ \alpha_1 + \alpha_2 \\ \alpha_1 + \alpha_3 \end{pmatrix}$$

כלומר מהגדרת שיוויון וקטורים איבר איבר נקבל את הממ"ל הבאה:

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_3 = 4 \\ \alpha_1 + \alpha_2 = 6 \\ \alpha_1 + \alpha_3 = 8 \end{cases}$$

נדרג קנונית את מטריצת המקדמים המורחבת! שלה כדי לקבל את המקדמים:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 0 & 6 \\ 1 & 0 & 1 & 8 \end{array} \right) \xrightarrow{\text{דירוג}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array} \right)$$

סה"כ, נקבל:

$$\alpha_1 = 2, \alpha_2 = 4, \alpha_3 = 2$$

ולכן וקטור הקורדינטות יהיה:

$$[u_2]_B = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

11.2 | מטריצה מייצגת של העתקה לינארית

תזכורת

יהיו $B = (v_1, \dots, v_n)$, $C = (w_1, \dots, w_m)$ בסיסים סדורים של המ"ו V, W בהתאמה. תהא $T : V \rightarrow W$ העתקה לינארית, אז קיימת מטריצה $[T]_C^B \in \mathbb{R}^{m \times n}$ כך ש:

$$\forall v \in V, \quad [T(v)]_C = [T]_C^B [v]_B$$

כלומר, $T : V \rightarrow W$ "בשפה של" וקטורי הקורדינטות, מתוארת על ידי כפל במטריצה מתקיים:

$$[T]_C^B = \begin{pmatrix} | & & | \\ [T(v_1)]_C & \dots & [T(v_n)]_C \\ | & & | \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m \times n}$$

הערה: אם $B = C$ ו $V = W$ אז נכתוב פשוט $[T]_B$ במקום $[T]_B^B$.

תרגיל 11.3.

מצאו את $[T]_E$ עבור:

$$T : \mathbb{R}_3[x] \rightarrow \mathbb{R}_3[x], \quad T(p(x)) = p'(x)$$

עם $E = (1, x, x^2, x^3)$ הבסיס הסטנדרטי ובעזרתו חשבו את $(x^2 + 3x + 1)'$.

פתרון:

עלפי הגדרה:

$$[T]_E = \begin{pmatrix} [T(1)]_E & [T(x)]_E & [T(x^2)]_E & [T(x^3)]_E \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [0]_E & [1]_E & [2x]_E & [3x^2]_E \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

אז:

$$[T(x^2 + 3x + 1)]_E = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} [x^2 + 3x + 1]_E = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

כלומר:

$$T(x^2 + 3x + 1) = 3(1) + 2(x) + 0(x^2) + 0(x^3) = 2x + 3$$

תרגיל 11.4.

יהא $B = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$ בסיס ל $\mathbb{R}^3$ (אין צורך לבדוק שמדובר בבסיס).
תהא $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ העתקה ליניארית:

$$T \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + y + z \\ 5z + x \\ x + z \end{pmatrix}$$

מצאו את $[T]_B$ והשתמשו בו למצוא את $T \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

פתרון:

נחשב ישירות:

$$T \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 4 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - 3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow [T(v_1)]_B = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$T \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 0 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow [T(v_2)]_B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$T \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 0 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 0 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow [T(v_3)]_B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

כלומר:

$$[T]_B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

נשים לב כי:

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right]_B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

אז:

$$\left[T \left(\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \right]_B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$$

אז:

$$T \left(\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = 4 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 4 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \\ 4 \end{pmatrix}$$

11.3 | מטריצה מייצגת של הרכבה

תזכורת

יש לנו מספר מסקנות מיידיות וחשובות מהגדרת מטריצה מייצגת של העתקה לינארית:

1. אם יש לנו מרחב וקטורים V_1, V_2, V_3 והעתקות לינאריות:

$$V_1 \xrightarrow{T} V_2 \xrightarrow{S} V_3$$

אז לכל $v \in V_1$ מתקיים:

$$[S \circ T(v)]_{B_3} = [S]_{B_3}^{B_2} [T(v)]_{B_2} = [S]_{B_3}^{B_2} [T]_{B_2}^{B_1} [v]_{B_1}$$

כאשר B_1, B_2, B_3 הם בסיסים סדורים של V_1, V_2, V_3 בהתאמה. מצד שני,

$$[S \circ T(v)]_{B_3} = [S \circ T]_{B_3}^{B_1} [v]_{B_1}$$

ולכן:

$$[S \circ T]_{B_3}^{B_1} = [S]_{B_3}^{B_2} [T]_{B_2}^{B_1}$$

2. אם $T: V \rightarrow V$ העתקה לינארית, ו B בסיס סדור של V , אז לכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים:

$$[T^n]_B = [T]_B^n$$

3. אם $T : V \rightarrow W$ איזומורפיזם, ו B, C בסיסים סדורים של V, W בהתאמה, אז:

$$[T^{-1}]_B^C = ([T]_C^B)^{-1}$$

4. תהא $T : V \rightarrow W$ העתקה ליניארית, B בסיס של V ו C בסיס של W . אזי:

(א) עבור $\ker(T)$:

$$\ker(T) = \{v | T(v) = 0\} = \{v | [T(v)]_C = 0\} = \{v | [T]_C^B [v]_B = 0\} = \{v | [v]_B \in N([T]_C^B)\}$$

כלומר $v \in \ker(T)$ אם ורק אם $[v]_B \in N([T]_C^B)$.

(ב) עבור $\text{Im}(T)$:

$$\text{Im}(T) = \{w | \exists v, T(v) = w\} = \{w | \exists v, [w]_C = [T]_C^B [v]_B\} = \{w | [w]_C \in \text{Col}([T]_C^B)\}$$

כלומר $w \in \text{Im}(T)$ אם ורק אם $[w]_C \in \text{Col}([T]_C^B)$.

תרגיל 11.5.

תהא העתקה ליניארית $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, T(x, y) = (x + y, x)$. חשבו את T^4 .

פתרון:

נחשב את המטריצה המייצגת של T לפי הבסיס הסטנדרטי של $\mathbb{R}^2$, ואז נשתמש בטענה שהוזכרה למעלה כדי לקבל את המטריצה המייצגת של T^4 , משם נסיק את T^4 .
נזכר כי הבסיס הסטנדרטי הוא:

$$E := \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

מתקיים:

$$T(1, 0) = (1 + 0, 1) = (1, 1) = (1, 0) + (0, 1), \quad T(0, 1) = (0 + 1, 0) = (1, 0)$$

מהגדרה:

$$[T(e_1)]_E = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad [T(e_2)]_E = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

לכן, המטריצה המייצגת הינה:

$$[T]_E = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

ולכן:

$$[T^4]_E = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^4 = \dots = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

לכל $v \in \mathbb{R}^2$ מתקיים:

$$[T^4(v)]_E = [T^4]_E [v]_E = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5x + 3y \\ 3x + 2y \end{pmatrix}$$

ומכך שזהו הבסיס הסטנדרטי:

$$T^4 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5x + 3y \\ 3x + 2y \end{pmatrix}$$

תרגיל 11.6.

תהיינה $T, S : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ שתי העתקות ליניאריות כך ש:

$$T(x, y) := (3x + 2y, 2x + y), \quad S(x, y) := (x + y, x)$$

הוכיחו כי העתקות מתחלפות, כלומר: $TS = ST$.

פתרון:

נשים לב כי:

$$TS = ST \iff [TS]_E = [ST]_E \iff [T]_E[S]_E = [S]_E[T]_E$$

כאשר E בסיס כלשהו של $\mathbb{R}^2$, בפרט נשתמש בבסיס הסטנדרטי.

נשים לב כי:

$$[T]_E = \begin{pmatrix} | & | \\ [T(e_1)]_E & [T(e_2)]_E \\ | & | \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

באותו אופן:

$$[S]_E = \begin{pmatrix} | & | \\ [S(e_1)]_E & [S(e_2)]_E \\ | & | \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

ואכן בדיקה ישירה תראה כי:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

לכן, מתקיים:

$$TS = ST$$

כרצוי.

תרגיל 11.7.

יהא $B = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right)$ בסיס ל $\mathbb{R}^{2 \times 2}$. תהי $T : \mathbb{R}^{2 \times 2} \rightarrow \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ההעתקה הליניארית כך ש:

$$[T]_B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

מצאו את $\ker(T)$ ו $\operatorname{Im}(T)$.פתרון:1. נתחיל מ $\operatorname{Im}(T)$, נזכר כי:

$$\operatorname{Im}(T) = \{M | [M]_B \in \operatorname{Col}([T]_B)\} = \left\{ M | [M]_B \in \operatorname{span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \right\}$$

כלומר, $M \in \operatorname{Im}(T)$ אם"מ קיימים $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$ כך ש:

$$[M]_B = \alpha_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 + 2\alpha_2 \\ \alpha_2 + 3\alpha_3 \\ \alpha_3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

כלומר:

$$M = (\alpha_1 + 2\alpha_2) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + (\alpha_2 + 3\alpha_3) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 + 2\alpha_2 & \alpha_2 \\ \alpha_3 & \alpha_2 + \alpha_3 \end{pmatrix}$$

כלומר:

$$\operatorname{Im}(T) = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha_1 + 2\alpha_2 & \alpha_2 \\ \alpha_3 & \alpha_2 + \alpha_3 \end{pmatrix} \mid \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R} \right\} = \operatorname{span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

2. נחשב את $\ker(T)$, נזכר כי:

$$\ker(T) = \{M | [M]_B \in N([T]_B)\}$$

משיקולי מימד ברור כי $\dim(N([T]_B)) = 1$ וברור כי:

$$[T]_B \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \vec{0}$$

לכן:

$$\ker(T) = \left\{ M \mid [M]_B = \alpha \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \alpha \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \alpha \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \alpha \in \mathbb{R} \right\} = \operatorname{span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

11.4 | מטריצות מעבר בסיס

תזכורת

יהא V מ"ו מעל שדה $\mathbb{R}$ מממד n , ויהיו $B = (v_1, \dots, v_n)$, $C = (w_1, \dots, w_n)$ שני בסיסים סדורים של V . נגדיר את המטריצה:

$$P_{C \rightarrow B} = [\text{Id}]_C^B = \begin{pmatrix} | & & | \\ [\text{Id}(v_1)]_C & \dots & [\text{Id}(v_n)]_C \\ | & & | \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} | & & | \\ [v_1]_C & \dots & [v_n]_C \\ | & & | \end{pmatrix}$$

היא מקיימת 2 תכונות חשובות.

1. לכל $v \in V$ מתקיים:

$$[v]_C = [\text{Id}(v)]_C = [\text{Id}]_C^B [v]_B = P_{C \rightarrow B} [v]_B$$

2. $P_{B \rightarrow C}$ הפיכה ומתקיים:

$$P_{B \rightarrow C}^{-1} = P_{C \rightarrow B}$$

אז לכל העתקה ליניארית $T: V \rightarrow V$, ולכל $v \in V$ מתקיים:

$$[T]_C [v]_C = [T(v)]_C = P_{C \rightarrow B} [T(v)]_B = P_{C \rightarrow B} [T]_B [v]_B = P_{C \rightarrow B} [T]_B P_{B \rightarrow C} [v]_C$$

כלומר:

$$[T]_C = P_{C \rightarrow B} [T]_B P_{B \rightarrow C} = P_{B \rightarrow C}^{-1} [T]_B P_{B \rightarrow C}$$

תרגיל 11.8

יהיו $B_1 := (2 + 3x, 1 + x)$, $B_2 = (1 + x, 1 + 3x)$ שני בסיסים של $\mathbb{R}_1[x]$ (אין צורך להוכיח שהם בסיסים). חשבו את $P_{B_2 \rightarrow B_1}$.

פתרון:

נחשב את ההקורדינטות של איברי הבסיס B_1 לפי הבסיס B_2 כלומר נמצא את:

$$[2 + 3x]_{B_2}, [1 + x]_{B_2}$$

נרצה לפתור את המשוואה (ולמצוא את המקדמים של הצירוף הליניארי):

$$2 + 3x = \kappa_1(1 + x) + \kappa_2(1 + 3x) = (3\kappa_2 + \kappa_1)x + (\kappa_1 + \kappa_2)$$

זזה מתאים לממ"ל:

$$\begin{cases} 3\kappa_2 + \kappa_1 = 3 \\ \kappa_2 + \kappa_1 = 2 \end{cases}$$

ולה יש פתרון עבור $\kappa_1 = \frac{3}{2}$, $\kappa_2 = \frac{1}{2}$. כלומר:

$$[2 + 3x]_{B_2} = \begin{pmatrix} \kappa_1 \\ \kappa_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$



עבור האיבר השני בבסיס מתקיים:

$$1 + x = 1(1 + x) + 0(1 + 3x)$$

לכן:

$$[1 + x]_{B_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

כלומר מטריצת המעבר היא:

$$P_{B_2 \rightarrow B_1} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & 1 \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

תרגיל 11.9.

יהיו $B_1 = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$ ו $B_2 = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$ שני בסיסים של $\mathbb{R}^3$.
אם $[v]_{B_1} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$, חשבו את $[v]_{B_2}$.

פתרון:

אנו יודעים כי $[v]_{B_2} = [\text{Id}(v)]_{B_2} = [\text{Id}]_{B_2}^{B_1} [v]_{B_1} = P_{B_2 \rightarrow B_1} [v]_{B_1}$, לכן נחשב את מטריצת המעבר:

$$P_{B_2 \rightarrow B_1} = \begin{pmatrix} \left| \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}_{B_2} \right| & \left| \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}_{B_2} \right| & \left| \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}_{B_2} \right| \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

לכן:

$$[v]_{B_2} = P_{B_2 \rightarrow B_1} [v]_{B_1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -6 \\ 2 \end{pmatrix}$$

נשים לב כי אנו יכולים לאמת את התשובה:

• נחשב את v לפי הבסיס B_1 :

$$v = 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - 1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}$$

• נחשב את v לפי הבסיס B_2 :

$$v = 5 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - 6 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}$$

תרגול שנים עשר

12.1 | ערכים ווקטורים עצמיים

תרגיל 12.1.

נגדיר: $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ על ידי:

$$T \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5x \\ 4x + y \end{pmatrix}$$

חשבו את $T^k \begin{pmatrix} 20 \\ 30 \end{pmatrix}$ עבור כל $k \in \mathbb{N}$.

פתרון:

אם נתבונן בבסיס הבא של $\mathbb{R}^2$: $B = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ בו באמת מתקיים:

$$[T]_B = \left(\left[T \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \right]_B \quad \left[T \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \right]_B \right) = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

אז כמובן ש:

$$\left[T^k \begin{pmatrix} 20 \\ 30 \end{pmatrix} \right]_B = [T]_B^k \cdot \left[\begin{pmatrix} 20 \\ 30 \end{pmatrix} \right]_B = \begin{pmatrix} 5^k & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 20 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 \cdot 5^k \\ 10 \end{pmatrix}$$

כלומר:

$$T^k \begin{pmatrix} 20 \\ 30 \end{pmatrix} = 20 \cdot 5^k \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 10 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 \cdot 5^k \\ 20 \cdot 5^k + 10 \end{pmatrix}$$

בגדול, התרגול היום יהיה על איך למצוא בסיס כזה, הבסיס הזה נקרא בסיס מלכסן של T .

תזכורת

תהא $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ מטריצה ריבועית, הזוג $\lambda \in \mathbb{R}, v_\lambda \in \mathbb{R}^n, v_\lambda \neq 0$ נקראים ווקטור וערך עצמי (ו"ע וע"ע) אם מתקיים:

$$Av_\lambda = \lambda v_\lambda$$

או באופן שקול:

$$(A - \lambda I)v_\lambda = 0$$

לכל ע"ע נגדיר את המרחב העצמי:

$$V_\lambda := \ker(A - \lambda I) = \{v \in V | Av = \lambda v\}$$

נקרא ל $\dim V_\lambda$ הריבוי הגיאומטרי של λ .
נסמן ב $p_A(\lambda)$ את הפולינום האופייני של A :

$$p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I)$$

זהו פולינום במשתנה λ . η ע"ע של A אמ"מ $p_A(\eta) = 0$, כלומר η שורש של $p_A(\lambda)$, לריבוי של η כשורש של $p_A(\lambda)$ נקרא הריבוי האלגברי של η .
ראינו בכיתה כי לכל ע"ע מתקיים:

$$r \leq r^a$$

דוגמא 12.2.

תהא $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, נחשב את הפולינום האופייני של A :

$$A - \lambda I = \begin{pmatrix} 2-\lambda & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2-\lambda & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1-\lambda \end{pmatrix}$$

זוהי מטריצה משולשת עליונה אז:

$$\det(A - \lambda I) = (2 - \lambda)^2 (1 - \lambda)^2$$

כלומר $\lambda = 1$ ע"ע מר"א 2, ו $\lambda = 2$ ע"ע מר"א 2.
נבדוק ר"ג של $\lambda = 1$:

$$A - 1I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

אז הוקטורים העצמיים הם הוקטורים המקיימים:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x + y = 0 \\ -2x - y = 0 \end{cases}$$

כלומר, $x = y = 0, z = s, w = t$ אז:

$$V_1 = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

נבדוק ר"ג של $\lambda = 2$:

$$A - 2I = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

אז:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ -2x - y - z = 0 \\ w = 0 \end{cases}$$

כלומר, $x = w = 0, y = s, z = -s$ אז:

$$V_2 = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

12.2 | לכסון מטריצות

תזכורת

תהא $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, אז לא יכולה להיות תלות לינארית בין וקטורים עצמיים של ערכים עצמיים שונים, כלומר באופן פורמלי, אם A ע"ע $\{\lambda_1, \dots, \lambda_m\}$, ולכל λ_j נבחר בסיס B_j למרחב העצמי V_{λ_j} , אז הקבוצה

$$B = \bigcup_{j=1}^m B_j$$

קבוצה בת"ל. בפרט אם בקבוצה הזאת n וקטורים אז היא בסיס ל- $\mathbb{R}^n$, שנכנה בסיס מלכסן, תכף נחזור לשם הזה, אבל קודם מתי בקבוצה זאת יהיו n וקטורים?

הפ"א הוא פולינום מדרגה n , אז מהמשפט היסודי של האלגברה יש לו לכל היותר n שורשים, כלומר סכום כל הר"א הוא לכל היותר n , ראינו בהרצאה כי לכל ע"ע הר"ג $\geq$ מהר"א, אז כל הדיון הזה מביא אותנו למסקנה הבאה, מטריצה לכסינה אם ורק אם מתקיימים 2 התנאים הבאים:

1. לפ"א של A יש n שורשים (כולל ריבויים) - נשים לב כי תנאי זה תמיד מתקיים כאשר A מטריצה ב- $\mathbb{C}$.

2. לכל ע"ע מתקיים ר"ג = ר"א.

באופן כללי, בסיס מלכסן של A (שלא תמיד קיים!) $\widehat{B} = (v_1, \dots, v_n)$, הוא בסיס שמאוד נוח לעבוד איתו כאשר מסתכלים על A כאופרטור, כי כל איבר בבסיס הוא ו"ע, כלומר קיים לו ע"ע כך ש $Av_j = \lambda_j v_j$, כלומר להפעיל עליו את A שקול להכפלה בסקלר. במילים מדויקות יותר, המטריצה: $[T]_{\widehat{B}}$ אלכסונית! אם נסמן ב- $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ את הע"ע של $v_1, \dots, v_n$ בהתאמה, אז

$$[T]_{\widehat{B}} = \left(\begin{array}{c|c|c} [T(v_1)]_{\widehat{B}} & \dots & [T(v_n)]_{\widehat{B}} \end{array} \right) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix} := D$$

אם $B = (e_1, \dots, e_n)$ הבסיס הסטנדרטי, אז, מטריצת המעבר $P = P_{B \rightarrow \widehat{B}}$ מקיימת:

$$[T]_{\widehat{B}} = P^{-1}[T]_B P \Rightarrow D = P^{-1}AP$$

כאשר:

$$P = \left(\begin{array}{c|c|c} [v_1]_B & \dots & [v_n]_B \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c|c|c} v_1 & \dots & v_n \end{array} \right)$$



תזכורת

סיכום קצר: A לכסינה אם קיים בסיס ל- $\mathbb{R}^n$, $(v_1, \dots, v_n)$ שכולו מורכב מוקטורים עצמיים של A , ואז מתקיים:

$$D = P^{-1}AP$$

כאשר:

$$D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} | & \dots & | \\ v_1 & \dots & v_n \\ | & \dots & | \end{pmatrix}$$

וכאשר λ_i הוא הע"ע של v_i .

תזכורת

הנה מיני בדיקת שפיות לגבי הכיוון של P , או במילים אחרות, איך לזכור ש $D = P^{-1}AP$ ולא להפך.

נזכר כי בגלל ש $P = \begin{pmatrix} | & \dots & | \\ v_1 & \dots & v_n \\ | & \dots & | \end{pmatrix}$ אז $Pe_k = v_k$ אז:

$$D = P^{-1}AP \Rightarrow PD = AP \Rightarrow PDe_k = APe_k$$

מצד אחד:

$$PDe_k = P(\lambda_k e_k) = \lambda_k Pe_k = \lambda_k v_k$$

ומצד שני:

$$APe_k = Av_k = \lambda_k v_k$$

כאשר λ_k ע"ע של v_k .

תרגיל 12.3.

תהא:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

מצאו את הצורה האלכסונית D של A , ואת P כך ש:

$$D = P^{-1}AP$$

ולאחר מכן חשבו את A^{2025} .

פתרון:

ראשית נמצא את הפ"א:

$$\begin{aligned}\det(A - \lambda I) &= \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2-\lambda \end{pmatrix} \\ &= (1-\lambda) \det \begin{pmatrix} 3-\lambda & 0 & 0 \\ -2 & 1-\lambda & 0 \\ 1 & 1 & 2-\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda)(3-\lambda) \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} \\ &= (1-\lambda)^2(2-\lambda)(3-\lambda)\end{aligned}$$

אז 1 ע"ע מר"א 2 ו 3, 2 ע"ע מר"א 1.
נמצא ו"ע:

1. עבור $\lambda = 1$:

$$A - I = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

ישר נראה כי:

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

פתרון של הממ"ל $(A - I)x = 0$, ולכן ו"ע של $\lambda = 1$, והתבוננות נוספת תראה כי:

$$v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

גם ו"ע של $\lambda = 1$, אז הר"ג של 1 הוא 2, אז אנו כבר יודעים כי A הפיכה.

2. עבור $\lambda = 2$:

$$A - 2I = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

ישר נראה כי $v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ו"ע של $\lambda = 2$.

בגלל שהר"א של $\lambda = 2$ הוא 1, אנו יודעים כי זהו הו"ע היחיד של $\lambda = 2$.

.3

$$A - 3I = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

פה קצת קשה (אבל לא בלתי אפשרי) לראות ישר את הפתרון, אז נציב:

$$\begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2a + 2b \\ 0 \\ -2b - 2c \\ b + c - d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

מכיוון שהר"ג הוא 1, מרחב הפתרונות נפרש על-ידי וקטור יחיד, ולכן מספיק למצוא פתרון שאינו האפס, ואכן:

$$a = 1, b = 1, c = -1, d = 0, \quad v_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

אז סה"כ:

$$P = \begin{pmatrix} | & | & | & | \\ v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \\ | & | & | & | \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

והמטריצה האלכסונית היא:

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

כלומר:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}}_D = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}}_{P^{-1}}^{-1} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}}_A \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}}_P$$

ולבסוף, מתקיים:

$$D^{2025} = (P^{-1}AP)^{2025} = P^{-1}A^{2025}P \Rightarrow A^{2025} = PD^{2025}P^{-1}$$

כאשר המעבר השני הוא הטענה שראינו:

$$(P^{-1}XP)^n = P^{-1}X^nP$$

בנוסף, קל לחשב חזקה של מטריצה אלכסונית:

$$D^{2025} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2^{2025} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3^{2025} \end{pmatrix} \Rightarrow A^{2025} = P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2^{2025} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3^{2025} \end{pmatrix} P^{-1}$$

תרגיל 12.4

תהא $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ מטריצה ריבועית כך שלפולינום האופייני שלה n שורשים שונים, הוכיחו כי A לכסינה.

פתרון:

התרגיל הזה יחסית קצר, כי ראינו את כל הטענות הרלוונטיות בהרצאה, ראשית, ראינו כי לכל ע"ע ריבוי גיאומטרי גדול שווה 1. ההסבר לכך הינו שאם λ ע"ע, אז המטריצה $A - \lambda I$ לא הפיכה, אז קיימת למערכת $(A - \lambda I)x = 0$ פתרון לא טריוויאלי, והיא יהיה ו"ע. למטריצה A יש n ע"ע שונים, וכל אחד מקיים:

$$1 \leq r_\lambda \leq r_A = 1$$

כלומר, לכל ע"ע מתקיים $r_\lambda = r_A$, ולכן ולכן A לכסינה.

תרגיל 12.5

תרגיל ממבחן:

יהיו $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$, כך ש:

$$AB = BA$$

נתון כי ל A יש n ע"ע שונים, הוכיחו כי אם $v \in \mathbb{R}^n$ ו"ע של A הוא גם ו"ע של B .

פתרון:

יהא $v_\lambda \in \mathbb{R}^n$ ו"ע עם ע"ע λ של A , אז:

$$ABv_\lambda = BA v_\lambda = B(\lambda v_\lambda) = \lambda Bv_\lambda$$

כלומר, $A(Bv_\lambda) = \lambda(Bv_\lambda)$, כלומר, $w = Bv_\lambda$ ו"ע של ע"ע λ , אבל, עפ"י הנתון הר"א של λ הוא 1, ולכן גם הר"ג, כלומר:

$$\dim V_\lambda = 1$$

ולכן:

$$V_\lambda = \text{span}(v_\lambda)$$

אבל, w ו"ע של A של ע"ע λ , כלומר $w \in V_\lambda$ ולכן קיים $\alpha_\lambda \in \mathbb{R}$ כך ש:

$$w = \alpha_\lambda v_\lambda \Rightarrow Bv_\lambda = \alpha_\lambda v_\lambda$$

כלומר, v_λ ו"ע של B .

תרגיל 12.6.

תהא $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ מטריצה ריבועית בעלת n ע"ע, כאשר סופרים ריבוי אלגברי $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$, הוכיחו כי:

$$1. \det(A) = \lambda_1 \cdot \dots \cdot \lambda_n$$

$$2. \operatorname{trace}(A) = \lambda_1 + \dots + \lambda_n$$

פתרון:

ראשית, נשים לב כי אם A לכסינה אז ההוכחה כמעט מיידית, כי אז $A = PDP^{-1}$ ומתכונות של דטרמיננטה ועקבה:

$$\det(A) = \det(D), \quad \operatorname{trace}(A) = \operatorname{trace}(D)$$

וכמובן כי $D = \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ ולכן $\det(D) = \lambda_1 \cdot \dots \cdot \lambda_n$ ו $\operatorname{trace}(D) = \lambda_1 + \dots + \lambda_n$. במקרה הכללי נצטרך לעבור עם משפטי ויאטה. נשים לב כי:

$$p_A(x) = \det(A - xI) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = a_n (x - \lambda_1) \cdot \dots \cdot (x - \lambda_n)$$

ראינו בהרצאה כי $a_n = (-1)^n$, $a_{n-1} = -\operatorname{trace}(A)$ וכי $a_0 = (-1)^n \det(A)$, אז לפי משפטי ויאטה:

$$\lambda_1 + \dots + \lambda_n = -\frac{a_{n-1}}{a_n} = \operatorname{trace}(A), \quad \lambda_1 \cdot \dots \cdot \lambda_n = (-1)^n \frac{a_0}{a_n} = \det(A)$$

12.3 | דמיון מטריצות

תזכורת

מטריצות $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ נקראות דומות אם קיימת מטריצה הפיכה $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ כך ש:

$$A = P^{-1}BP$$

אז:

$$1. p_A(\lambda) = p_B(\lambda)$$

2. יש להן אותו אותן ע"ע, עם אותם ר"א ור"ג בהתאמה (אבל לא בהכרח אותם וקטורים עצמיים!).

3.

$$\det(A) = \det(B), \quad \operatorname{trace}(A) = \operatorname{trace}(B), \quad \operatorname{rank}(A) = \operatorname{rank}(B)$$

נשים לב כי כל התכונות הללו מתקבלות גם מהפולינום האופייני.

בפרט, דוגמה שראינו היא שאם $T : V \rightarrow V$ העתקה ליניארית, B, C שני בסיסים סדורים של V , אז המטריצות $[T]_B$ ו $[T]_C$ דומות.

תרגיל 12.7.

יהיו $A, B \in \mathbb{F}^{n \times n}$ מטריצות הוכיחו או הפריכו:

1. אם A, B דומות אז לכל $n \in \mathbb{N}$ המטריצות A^n, B^n דומות.
2. אם קיים $n \in \mathbb{N}$ כך שהמטריצות A^n, B^n דומות, אז המטריצות A, B דומות.

פתרון:

1. נוכיח את הטענה. יהיו A, B דומות, כלומר, על פי מהגדרה, קיימת מטריצה P כך ש:

$$B = P^{-1}AP$$

נשים לב כי מתקיים לכל $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} B^n &= (P^{-1}AP)^n = (P^{-1}AP) \cdot \dots \cdot (P^{-1}AP) \\ &= P^{-1}A(P \cdot P^{-1})AP \cdot \dots \cdot P^{-1}A(P \cdot P^{-1})AP = P^{-1}AIAI \cdot \dots \cdot IAP = P^{-1}A^nP \end{aligned}$$

ולכן לפי ההגדרה הן דומות.

2. הטענה אינה נכונה, נראה דוגמה נגדית:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -I_2, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$$

מתקיים:

$$A^2 = I_2 = B^2$$

כלומר A^2, B^2 שוות, ובפרט דומות, אבל למשל $\text{trace}(A) = -2 \neq 2 = \text{trace}(B)$ ולכן A ו B לא דומות.

תרגיל 12.8.

יהיו $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ לכסינות בעלות אותו פ"א, הוכיחו כי A, B דומות.

פתרון:

ל 2° המטריצות אותו פ"א, בפרט יש להן את אותם ע"ע, נסמן אותם כולל ריבוי ע"י $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, ונסמן $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, אז אנו יודעים כי קיימות $P_A, P_B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ כך ש:

$$P_A^{-1}AP_A = D = P_B^{-1}BP_B \Rightarrow P_A^{-1}AP_A = P_B^{-1}BP_B$$

ולכן:

$$P_BP_A^{-1}AP_AP_B^{-1} = B \Rightarrow (P_AP_B^{-1})^{-1}A(P_AP_B^{-1}) = B$$

תרגיל 12.9.

הוכיחו או הפריכו, אם A, B בעלות אותו פ"א אז הן דומות.

פתרון:

לא נכון, נסתכל על המטריצות:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

לשנים פ"א $(1-x)^2$, אבל, מטיעון שראינו קודם, אף מטריצה שאינה מטריצת היחידה לא דומה למטריצת היחידה. מהתרגיל הקודם, נסיק כי לא יכול להיות כי גם A וגם B לכסינות, אבל ברור כי A לכסינה, ולכן B לא לכסינה.

12.4 | תרגילים לתרגול עצמי

תרגיל 12.10.

הוכיחו או הפריכו את הסעיפים הבאים.

- יהיו $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ מטריצות, נסמן ב V את המרחב העצמי של ע"ע $\lambda = 0$ של A , וב W את המרחב העצמי של ע"ע $\lambda = 0$ של BA , אז $V \subseteq W$.
- יהיו $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ מטריצות, נסמן ב V את המרחב העצמי של ע"ע $\lambda = 1$ של A , וב W את המרחב העצמי של ע"ע $\lambda = 1$ של BA , אז $V \subseteq W$.

פתרון:

- נכון, כי כל וקטור המקיים $Av = 0v = 0$ מקיים גם $BAv = B(0) = 0$.
- לא נכון, דוגמא נגדית הינה $A = I_n, B = 2I_n$, אז $BA = 2I_n$. במקרה זה $V = \mathbb{R}^n$, אבל: $W = \{v \in \mathbb{R}^n | 2I_n v = v\} = \{v \in \mathbb{R}^n | 2v = v\} = \{0\}$

תרגיל 12.11.

הוכיחו או הפריכו:

יהיו $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ כך ש:

$$\text{trace}(A) = \text{trace}(B), \quad \det(A) = \det(B), \quad \text{rank}(A) = \text{rank}(B)$$

אז A, B דומות.

פתרון:

נפריך את הטענה.

אין לנו הרבה כלים להראות ששתי מטריצות לא דומות, פרט מהטענה שראינו בכיתה: המטריצה היחידה שדומה ל I_n היא I_n עצמה, וזאת משום ש:

$$A = PI_nP^{-1} = I_n$$

אז נחפש מטריצה $A \neq I_n$ כך ש:

$$\text{trace}(A) = \text{trace}(I_n) = n, \quad \det(A) = \det(I_n) = 1, \quad \text{rank}(A) = \text{rank}(I_n) = n$$

נבחר למשל מטריצה אלכסונית 3×3 :

$$A = \begin{pmatrix} p & 0 & 0 \\ 0 & q & 0 \\ 0 & 0 & r \end{pmatrix}$$

אז על מנת שהתקיימו התנאים, נרצה ש:

$$p + q + r = 3, \quad pqr = 1$$

נשים לב כי אם $pqr = 1$, אז בפרט אף אחד מהמספרים p, q, r לא יכול להיות אפס, ולכן $\text{rank}(A) = 3$. מתקיים $r = \frac{1}{pq}$, ולכן:

$$p + q + \frac{1}{pq} = 3 \implies p^2q + pq^2 + 1 = 3pq$$

נבחר למשל $p = 2$, אז נקבל:

$$2q + 2q^2 + 1 = 6q \implies 2q^2 - 4q + 1 = 0 \implies q = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 8}}{4} = 1 \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$$

נבחר $q = 1 + \frac{\sqrt{2}}{2}$, ואז:

$$p = 2, \quad r = \frac{1}{2(1 + \frac{\sqrt{2}}{2})}$$

כלומר:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 + \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2(1 + \frac{\sqrt{2}}{2})} \end{pmatrix}$$

מקיימת $\text{trace}(A) = \text{trace}(I_3)$, $\det(A) = \det(I_3)$, $\text{rank}(A) = \text{rank}(I_3)$. אבל A לא דומה ל I_3 . תרגול עצמי - מצאו דוגמא פשוטה יותר למטריצות 2×2 .

תרגיל 12.12.

תהא $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ כך ש $A \neq 0$, אבל $A^k = 0$ עבור k כלשהו.

1. תהא B דומה ל A , הראו כי גם $B^k = 0$.

2. נשים לב כי אם $A^k = 0$, אז גם $A^{k+1} = 0$, וכו', נסמן ב $\mu(A)$ את המספר m הכי קטן עבורו $A^m = 0$, כלומר:

$$\mu(A) = \min\{m \in \mathbb{N} | A^m = 0\}$$

בפרט למשל $A^{\mu(A)-1} \neq 0$. הראו כי אם B דומה ל A , אז $\mu(B) = \mu(A)$.

פתרון:

1. נניח כי $B = PAP^{-1}$. מתרגיל קודם ראינו כי:

$$B^k = (PAP^{-1})^k = PA^kP^{-1} = P0P^{-1} = 0$$

2. נניח כי $B = PAP^{-1}$. נרצה להראות כי $\mu(B) = \mu(A)$. בסעיף הקודם ראינו כי $B^k = 0 \Rightarrow A^k = 0$, כלומר $\mu(B) \leq \mu(A)$. אבל כמובן שהטענה סימטרית לחלוטין:

$$B = PAP^{-1} \Rightarrow A = P^{-1}BP$$

אז מאותה סיבה בדיוק, מתקיים גם $A^k = 0 \Rightarrow B^k = 0$, כלומר $\mu(A) \leq \mu(B)$. לכן, $\mu(A) = \mu(B)$.

תרגיל 12.13.

1. הוכיחו או הפריכו: לכל מטריצה $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ קיימות מטריצות $X, Y \in \mathbb{R}^{n \times n}$ כך ש:

$$A = XY - YX$$

2. הוכיחו או הפריכו: אם A ניתנת לכתיבה בצורה $A = XY - YX$ עבור מטריצות $X, Y \in \mathbb{R}^{n \times n}$, אז לכל מטריצה B הדומה ל A קיימות מטריצות $X', Y' \in \mathbb{R}^{n \times n}$ כך ש:

$$B = X'Y' - Y'X'$$

פתרון:

1. נשים לב כי אם קיימות מטריצות X, Y כך ש $A = XY - YX$, אז בהכרח $\text{trace}(A) = 0$, משום ש:

$$\text{trace}(A) = \text{trace}(XY - YX) = \text{trace}(XY) - \text{trace}(YX) = 0$$

אז למשל המטריצה $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ לא ניתנת לכתיבה בצורה זו.

2. נניח כי:

$$A = XY - YX, \quad B = P^{-1}AP$$

אז:

$$B = P^{-1}(XY - YX)P = P^{-1}XYP - P^{-1}YXP = P^{-1}XPP^{-1}Y - P^{-1}YPP^{-1}XP$$

נסמן $X' = P^{-1}XP, Y' = P^{-1}YP$ אז:

$$B = X'Y' - Y'X'$$

וסיימנו.

תרגיל 12.14.

הוכיחו כי:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 40 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 5 & -3 & -1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 4 & -4 & 1 \end{pmatrix}$$

דומות.

פתרון:

נתחיל ב- A , משום שהיא משולשת:

$$p_A(\lambda) = (3 - \lambda)(2 - \lambda)(1 - \lambda)$$

ומשום שיש לה $n = 3$ ע"ע שונים היא לכסינה.

עבור B , ראשית נמצא את הפ"א:

$$B - \lambda I = \begin{pmatrix} 5 - \lambda & -3 & -1 \\ 2 & 0 - \lambda & -1 \\ 4 & -4 & 1 - \lambda \end{pmatrix}$$

אז:

$$\det(B - \lambda I) = \dots = -\lambda^3 + 6\lambda^2 - 11\lambda + 6 = p_B(\lambda)$$

נראה 3 דרכים שונות להראות כי $p_A(\lambda) = p_B(\lambda)$:

1. נפשט את $p_A(\lambda)$:

$$\begin{aligned} p_A(\lambda) &= (3 - \lambda)(2 - \lambda)(1 - \lambda) = (3 - \lambda)(2 - 2\lambda - \lambda + \lambda^2) \\ &= (3 - \lambda)(2 - 3\lambda + \lambda^2) = 6 - 9\lambda + 3\lambda^2 - 2\lambda + 3\lambda^2 - \lambda^3 \\ &= -\lambda^3 + 6\lambda^2 - 11\lambda + 6 = p_B(\lambda) \end{aligned}$$

2. נראה ע"י הצבה כי $\lambda = 1$ שורש של $p_B(\lambda)$, אז ממשפט חלוקה בשארית קיים $q(\lambda) = a\lambda^2 + b\lambda + c$ כך ש:

$$(\lambda - 1)q(\lambda) = -\lambda^3 + 6\lambda^2 - 11\lambda + 6 = p_B(\lambda)$$

אפשר להמשיך ב-2 דרכים, אפשר להשתמש במשפט חלוקה בשארית, אבל אפשר גם להציב ולפתור ממ"ל, נפתור עם ההצבה:

$$(\lambda - 1)q(\lambda) = (\lambda - 1)(a\lambda^2 + b\lambda + c) = a\lambda^3 + b\lambda^2 + c\lambda - a\lambda^2 - b\lambda - c = \lambda^3(a) + \lambda^2(b - a) + \lambda(c - b) + 1(-c)$$

אז:

$$\lambda^3(a) + \lambda^2(b - a) + \lambda(c - b) + 1(-c) = -\lambda^3 + 6\lambda^2 - 11\lambda + 6$$

$$\begin{cases} a = -1 \\ b - a = 6 \\ c - b = -11 \\ -c = 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = 5 \\ c = -6 \end{cases}$$

כלומר:

$$p_B(\lambda) = (\lambda - 1)(-\lambda^2 + 5\lambda - 6) = -(\lambda - 1)(\lambda - 2)(\lambda - 3) = (1 - \lambda)(2 - \lambda)(3 - \lambda) = p_A(\lambda)$$

3. משום ש $\deg p_A = \deg p_B$, ושורשי p_A הם 1, 2, 3, אם הם גם שורשי p_B , והמקדם המוביל שלהם שווה, אז $p_A = p_B$, ואכן בדיקה ישירה תראה לנו כי:

$$p_B(1) = p_B(2) = p_B(3) = 0$$

והמקדמים של λ^3 הוא -1 ב-2 הפולינומים, ולכן:

$$p_A(\lambda) = p_B(\lambda)$$

אז B לכסינה כי יש לה 3 ע"ע שונים, ונשים לב כי $p_A(\lambda) = p_B(\lambda)$, ולכן A, B דומות.

תרגול שלוש עשר

13.1 | משפט קיילי-המילטון

תזכורת

תהא $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, ויהא $p(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$ פולינום, נגדיר הצבה של המטריצה A בפולינום p על ידי:

$$p(A) = a_n A^n + \dots + a_1 A + a_0 I_n$$

כאשר I_n היא מטריצת היחידה ב $\mathbb{R}^{n \times n}$. משפט קיילי-המילטון אומר כי $p_A(A) = 0$ כאשר $p_A(x)$ הוא פולינום האופייני של A .

דוגמא 13.1.

תהא $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, אז $p_A(x) = \det(A - xI) = \det \begin{pmatrix} 1-x & 1 & 0 \\ 0 & 1-x & 0 \\ 0 & 0 & -x \end{pmatrix} = -x(1-x)^2$ נחשב את $p_A(A)$:

$$p_A(A) = -A(I - A)^2 = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

תרגיל 13.2.

תהא $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ כך ש $p_A(x) = x^3 - 4x^2 + 5x - 2$.

1. כתבו את A^5 כצירוף לינארי של I, A, A^2 .

2. הוכיחו כי A הפיכה ומצאו את A^{-1} כצירוף לינארי של I, A, A^2 .

פתרון:

1. לפי משפט קיילי-המילטון:

$$p_A(A) = A^3 - 4A^2 + 5A - 2I = 0 \implies A^3 = 4A^2 - 5A + 2I$$

בפרט:

$$A^4 = A \cdot A^3 = A(4A^2 - 5A + 2I) = 4A^3 - 5A^2 + 2A$$

וכן:

$$\begin{aligned} A^5 &= A \cdot A^4 = A(4A^3 - 5A^2 + 2A) = 4A^4 - 5A^3 + 2A^2 \\ &= 4(4A^3 - 5A^2 + 2A) - 5A^3 + 2A^2 = 11A^3 - 18A^2 + 8A \\ &= 11(4A^2 - 5A + 2I) - 18A^2 + 8A = 26A^2 - 47A + 22I \end{aligned}$$

2. זכר כי:

$$0 \text{ אינו ערך עצמי של } A \iff N(A) = \{0\} \iff \dim(N(A)) = 0 \iff \dim(V_{\lambda=0}) = 0 \iff A \text{ הפיכה}$$

כאשר $V_{\lambda=0}$ המרחב העצמי של $\lambda = 0$. כלומר, A הפיכה אם $p_A(0) \neq 0$, ואכן, $p_A(0) = -2 \neq 0$, ולכן A הפיכה. נשים לב כי:

$$A^3 - 4A^2 + 5A - 2I = 0 \implies I = \frac{1}{2}A^3 - 2A^2 + \frac{5}{2}A = A \left(\frac{1}{2}A^2 - 2A + \frac{5}{2}I \right)$$

ולכן:

$$A^{-1} = \frac{1}{2}A^2 - 2A + \frac{5}{2}I$$

13.2 | לכסון אופרטור

תזכורת

יהא V מ"ו נוצר סופית מעל $\mathbb{R}$, אופרטור הוא העתקה ליניארית $T : V \rightarrow V$. נקרא אופרטור לכסין אם קיים ל- V בסיס סדור $B = (v_1, \dots, v_n)$ כך ש- $[T]_B$ מטריצה אלכסונית. במילים אחרות, אם נבחר בסיס כלשהו C של V , אז T אופרטור לכסין אם המטריצה $[T]_C$ היא מטריצה לכסינה.

תרגיל 13.3.

שאלה ממבחן:

יהא $T : \mathbb{R}_2[x] \rightarrow \mathbb{R}_2[x]$ אופרטור המוגדר על ידי:

$$T(ax^2 + bx + c) = (c - 2a)x^2 + (c - a - b)x + (c - 2a)$$

מצאו בסיס B של $\mathbb{R}_2[x]$ כך ש- $[T]_B$ מטריצה אלכסונית, ומצאו את $[T]_B$.

פתרון:נסמן ב- $E = (1, x, x^2)$ את הבסיס הסטנדרטי של $\mathbb{R}_2[x]$, אז:

$$[T]_E = \begin{pmatrix} | & | & | \\ [T(1)]_E & [T(x)]_E & [T(x^2)]_E \\ | & | & | \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} | & | & | \\ [x^2 + x + 1]_E & [-x]_E & [-2x^2 - x - 2]_E \\ | & | & | \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} = A$$

נשים לב כי A לא הפיכה כי השורות 1, 3 זהות, בפרט 0 ע"ע של A .נשים לב כי סכום אברי כל שורה שווה ל-1, אז -1 ע"ע של A (זה גם אומר לנו כי $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ הוא ו"ע!), נשים לבכי $\text{trace}(A) = -2 = 0 + (-1) + \lambda_3 \Rightarrow \lambda_3 = -1$ סה"כ $\lambda_1 = 0$ מר"א 1 ו $\lambda_2 = -1$ מר"א 2. מפה אנחנו יכולים להמשיך בדרכים, אפשר להמשיך ללסן את $[T]_E$, או ללסן ישירות את T . נבחר ללסן את T ישירות.

נמצא את המרחבים העצמיים:

1. עבור $\lambda_1 = 0$, אנו מחפשים פולינום $p(x)$ כך ש $T(p) = 0 \cdot p = 0$ כלומר:

$$T(ax^2 + bx + c) = (c - 2a)x^2 + (c - a - b)x + (c - 2a) = 0 \Rightarrow \begin{cases} c - 2a = 0 \\ c - a - b = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} c = 2a \\ b = c - a = 2a - a = a \end{cases}$$

כלומר $p(x) = a(x^2 + x + 2)$, כלומר המ"ע של $\lambda_1 = 0$ הוא:

$$V_{\lambda_1=0} = \text{span}\{x^2 + x + 2\}$$

2. עבור $\lambda_2 = -1$, אנו מחפשים פולינום $p(x)$ כך ש $T(p) = -1 \cdot p = -p$ כלומר:

$$T(ax^2 + bx + c) = (c - 2a)x^2 + (c - a - b)x + (c - 2a) = -ax^2 - bx - c \Rightarrow \begin{cases} c - 2a = -a \\ c - a - b = -b \end{cases}$$

כלומר המרחב העצמי הוא:

$$V_{-1} = \{ax^2 + bx + c : c = a, a, b, c \in \mathbb{R}\} = \text{span}\{x^2 + 1, x\}$$

סה"כ, בסיס המלסן הוא:

$$B = (x^2 + x + 2, x^2 + 1, x)$$

ומתקיים:

$$[T]_B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

תרגיל 13.4.

יהא V מ"ו נוצר סופי מעל $\mathbb{R}$. יהיו $T, S : V \rightarrow V$ אופרטורים ליניארים לכסינים. הוכיחו כי אם קיים בסיס $B = (v_1, \dots, v_n)$ של V כך שכל v_j וקטור עצמי גם של T וגם של S (לא בהכרח עם אותו ערך עצמי), אז $TS = ST$.

פתרון:

נסמן לכל v_j את ערכי העצמי של T, S בהתאמה על ידי $\lambda_j, \mu_j \in \mathbb{R}$, כלומר:

$$T(v_j) = \lambda_j v_j, \quad S(v_j) = \mu_j v_j$$

יהא $v \in V$, נראה כי $TS(v) = ST(v)$. נכתוב את v כצירוף לינארי של וקטורי הבסיס:

$$v = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n$$

אז:

$$\begin{aligned} TS(v) &= T\left(S\left(\sum_{j=1}^n \alpha_j v_j\right)\right) = T\left(\sum_{j=1}^n \alpha_j S(v_j)\right) = T\left(\sum_{j=1}^n \alpha_j \mu_j v_j\right) = \sum_{j=1}^n \alpha_j \mu_j T(v_j) \\ &= \sum_{j=1}^n \alpha_j \mu_j \lambda_j v_j \end{aligned}$$

ובאותו אופן:

$$\begin{aligned} ST(v) &= S\left(T\left(\sum_{j=1}^n \alpha_j v_j\right)\right) = S\left(\sum_{j=1}^n \alpha_j T(v_j)\right) = S\left(\sum_{j=1}^n \alpha_j \lambda_j v_j\right) = \sum_{j=1}^n \alpha_j \lambda_j S(v_j) \\ &= \sum_{j=1}^n \alpha_j \lambda_j \mu_j v_j \end{aligned}$$

וכמובן ש:

$$\sum_{j=1}^n \alpha_j \mu_j \lambda_j v_j = \sum_{j=1}^n \alpha_j \lambda_j \mu_j v_j$$

ולכן $TS(v) = ST(v)$ לכל $v \in V$, כלומר $TS = ST$.

תרגיל 13.5.

תהא $T : \mathbb{R}_{2026}[x] \rightarrow \mathbb{R}_{2026}[x]$ המוגדרת על ידי $T(p(x)) = p'(x)$. הראו כי העתקה לא לכסינה.

פתרון:

נראה כי לא יכול להיות ל- $\mathbb{R}_{2026}[x]$ בסיס מלכסן עבור T . נשים לב כי אם $p(x)$ ו"ע של ע"ע λ אז מתקיים:

$$T(p(x)) = p'(x) = \lambda p(x)$$

נשים לב כי אם $p(x)$ לא פולינום קבוע, נקבל סתירה, שכן אז המעלה של $p'(x)$ חייבת להיות קטנה ב-1 מהמעלה של $p(x)$, ולכן לא ייתכן ש $p'(x) = \lambda p(x)$.
 נסיק ש $p(x) = c$ פולינום קבוע. היות ו $p(x)$ ו"ע, בפרט הוא שונה מאפס, כלומר $c \neq 0$, אבל אז:

$$T(p(x)) = p'(x) = 0 = \lambda c \implies \lambda = 0$$

כלומר, ל T ע"ע יחיד, והוא $\lambda = 0$. נשים לב כי:

$$V_{\lambda=0} = \ker(T) = \{p(x) \in \mathbb{R}_{2026}[x] : p'(x) = 0\} = \{c : c \in \mathbb{R}\}$$

בפרט, $\dim(V_{\lambda=0}) = 1 < 2027 = \dim(\mathbb{R}_{2026}[x])$, ולכן לא יכול להיות בסיס מלכסן של T .

13.3 | נורמה ומכפלה פנימית

תזכורת

נגדיר את המכפלה הפנימית הסטנדרטית על $\mathbb{R}^n$ להיות הפונקציה:

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, \quad \left\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \right\rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n$$

ההגדרה הזאת נותנת לנו למדוד "גדלים" למושגים המוכרים לנו מהיום-יום כמו אורך וזוויות:

$$\|v\| = \sqrt{\langle v, v \rangle}, \quad \angle(v, w) = \arccos \left(\frac{\langle v, w \rangle}{\|v\| \|w\|} \right)$$

תרגיל 13.6.

$$u = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ חשבו את האורך של הוקטור } v = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^5 \text{ ואת הזווית בין } v \text{ ל-} u$$

פתרון:

• האורך של v הוא:

$$\|v\| = \sqrt{\langle v, v \rangle} = \sqrt{1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2} = \sqrt{55}$$

• הזווית בין v ל u היא:

$$\theta = \arccos \left(\frac{\langle v, u \rangle}{\|v\| \|u\|} \right) = \arccos \left(\frac{1 \cdot 1 + 2 \cdot 1 + 3 \cdot 1 + 4 \cdot 1 + 5 \cdot 1}{\sqrt{55} \cdot \sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2}} \right) = \arccos \left(\frac{15}{\sqrt{55} \cdot \sqrt{5}} \right)$$

תזכורת

יהי V מרחב וקטורי מעל שדה $\mathbb{F}$ שהוא $\mathbb{R}$ או $\mathbb{C}$. מכפלה פנימית היא פונקציה $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{F}$ המקיימת:

1.

$$\forall u, v_1, v_2 \in V, \quad \langle u, v_1 + v_2 \rangle = \langle u, v_1 \rangle + \langle u, v_2 \rangle$$

2.

$$\forall u, v \in V, \lambda \in \mathbb{F}, \quad \langle u, \lambda v \rangle = \lambda \langle u, v \rangle$$

3.

$$\forall u, v \in V, \quad \langle u, v \rangle = \overline{\langle v, u \rangle}$$

4.

$$\forall v \in V, \quad \langle v, v \rangle \geq 0$$

שימו לב, אם אנו מעל $\mathbb{C}$ הכוונה ל:

$$\forall z \in V, \langle z, z \rangle \in \mathbb{R} \text{ וגם } \langle z, z \rangle \geq 0$$

$$5. \quad \langle v, v \rangle = 0 \iff v = 0_V$$

הערה

1. אם אנו מעל $\mathbb{R}$, אז (3) מתורגם לסימטריה:

$$\langle v, u \rangle = \overline{\langle u, v \rangle} = \langle u, v \rangle$$

2. (2) + (3) נותן לנו כי:

$$\langle \lambda v, u \rangle = \overline{\langle u, \lambda v \rangle} = \overline{\lambda \langle u, v \rangle} = \bar{\lambda} \langle v, u \rangle$$

תזכורת

יש לנו מספר דוגמאות "סטנדרטיות" לממ"פ:

1. ב $\mathbb{R}^n$:

$$\left\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \right\rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_n y_n$$

2. ב $\mathbb{C}^n$:

$$\left\langle \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix} \right\rangle = \sum_{i=1}^n \bar{z}_i w_i = \bar{z}_1 w_1 + \bar{z}_2 w_2 + \cdots + \bar{z}_n w_n$$

3. במרחב הפולינומים, $\mathbb{R}_n[x]$:

$$\langle p(x), q(x) \rangle = \int_0^1 p(x)q(x) dx$$

4. ב $\mathbb{R}^{n \times n}$:

$$\langle A, B \rangle = \text{trace}(A^t B)$$

תרגיל 13.7.

תהא $\langle \cdot, \cdot \rangle$ הממ"פ הסטנדרטית ב $\mathbb{R}^n$, הראו כי לכל $v, w \in \mathbb{R}^n$, $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ מתקיים:

$$\langle Av, w \rangle = \langle v, A^t w \rangle$$

פתרון:

נשים לב כי:

$$\langle x, y \rangle = x^t y$$

אז:

$$\langle Ax, y \rangle = (Ax)^t y = x^t A^t y = x^t (A^t y) = \langle x, A^t y \rangle$$

תרגיל 13.8.

יהא V מ"ו מעל $\mathbb{R}$, כך ש $V = \text{span}\{v_1, \dots, v_n\}$, יהיו $u, w \in V$ כך ש:

$$\forall 1 \leq i \leq n, \quad \langle v_i, u \rangle = \langle v_i, w \rangle$$

הראו כי $u = w$.הסיקו כי אם $\forall x \in V, \langle x, y \rangle = 0$ אז $y = 0$.**פתרון:**נסמן $v = u - w$, היות ו $\{v_1, \dots, v_n\}$ פורשת את V , קיימים (לא בהכרח ביחידות!) $\rho_1, \dots, \rho_n \in \mathbb{R}$ כך ש:

$$v = u - w = \rho_1 v_1 + \cdots + \rho_n v_n$$

אז:

$$\begin{aligned}\langle v, v \rangle &= \langle v, u - w \rangle = \langle v, u \rangle - \langle v, w \rangle = \langle \rho_1 v_1 + \dots + \rho_n v_n, u \rangle - \langle \rho_1 v_1 + \dots + \rho_n v_n, w \rangle \\ &= \sum_{i=1}^n \rho_i \langle v_i, u \rangle - \sum_{i=1}^n \rho_i \langle v_i, w \rangle = \sum_{i=1}^n \rho_i (\underbrace{\langle v_i, u \rangle - \langle v_i, w \rangle}_{=0}) = 0\end{aligned}$$

אז $\langle v, v \rangle = 0$, אז בהכרח $v = 0$, ולכן $u = w$ וכן $u - w = 0 \implies u = w$.
ההסקה בסוף התרגיל מיידיית, מהתרגיל, פשוט נציב $w = 0, u = y$.

תרגיל 13.9.

תהא $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ מטריצה שמקיימת $\langle Av, v \rangle = 0 \forall v \in \mathbb{R}^n$.

1. הוכיחו כי אם n אי-זוגית אז A לא הפיכה.

2. מצאו דוגמא ל- n זוגי A הפיכה שמקיימת את הנתון.

פתרון:

1. יהיו $v, w \in \mathbb{R}^n$, אז מתקיים:

$$\begin{aligned}0 &= \langle A(v + w), v + w \rangle = \langle Av, v + w \rangle + \langle Aw, v + w \rangle \\ &= \cancel{\langle Av, v \rangle}^0 + \langle Aw, v \rangle + \langle Av, w \rangle + \cancel{\langle Aw, w \rangle}^0 \\ &= \langle Aw, v \rangle + \langle Av, w \rangle = \langle Aw, v \rangle + \langle v, A^t w \rangle = \langle Aw, v \rangle + \langle A^t w, v \rangle = \langle (A + A^t)w, v \rangle\end{aligned}$$

כלומר, לכל w , מתקיים כי לכל v , $\langle (A + A^t)w, v \rangle = 0$, ולכן $(A + A^t)w = 0$, אבל זה נכון לכל w , אז $A + A^t = 0$.
מתקיים:

$$A = -A^t \implies \det(A) = \det(-A^t) = \det(-A) = (-1)^n \det(A)$$

מאחר ש- n אי-זוגי מתקיים $(-1)^n = -1$, ולכן $\det(A) = -\det(A)$ ומכאן $\det(A) = 0$.

2. עבור $n = 2$, המטריצה $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ מקיימת:

$$\left\langle A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} y \\ -x \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right\rangle = yx - xy = 0$$

תרגיל 13.10.

יהא $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ממ"פ על V מ"ו מעל $\mathbb{R}$, הוכיחו או הפריכו:

1. אם v, w בת"ל אז $\langle v, w \rangle = 0$.

2. אם $\langle v, w \rangle = 0$ וגם $v, w \neq 0$, אז v, w בת"ל.

פתרון:

1. הטענה לא נכונה, למשל $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ב $\mathbb{R}^2$ עם המכפלה הסטנדרטית, אז v_1, v_2 בת"ל אך:

$$\langle v_1, v_2 \rangle = 1 \cdot 1 + 0 \cdot 1 = 1 \neq 0$$

2. נראה כי הטענה נכונה. יהיו v, w שונים מאפס כך ש $\langle v, w \rangle = 0$, נראה כי הם בת"ל. נניח כי $\vec{0} = \alpha v + \beta w$:

$$0 = \langle \vec{0}, \vec{0} \rangle = \langle \alpha v + \beta w, \alpha v + \beta w \rangle = \alpha^2 \langle v, v \rangle + \beta^2 \langle w, w \rangle + 2\alpha\beta \langle v, w \rangle = \alpha^2 \langle v, v \rangle + \beta^2 \langle w, w \rangle$$

אבל משום ש $v, w \neq 0$ אז $\langle v, v \rangle = \|v\|^2$ ו $\langle w, w \rangle = \|w\|^2$ חיוביים, ולכן הפתרון היחיד למשוואה הוא $\alpha = \beta = 0$, כלומר v, w בת"ל.



14.1 | נורמה

תזכורת

יהא V מ"ז מעל שדה $\mathbb{F}$ שהוא $\mathbb{R}$ או $\mathbb{C}$, נורמה היא פונקציה $\|\cdot\| : V \rightarrow \mathbb{R}$ המקיימת את התכונות הבאות:

1. אי-שליליות:

לכל $v \in V$, הנורמה של v אי-שלילית, והיא אפס אם $v = 0$, כלומר:

$$\forall v \in V, \|v\| \geq 0, \quad \|v\| = 0 \iff v = 0$$

2. הומוגניות:

$$\forall \lambda \in \mathbb{F}, v \in V, \quad \|\lambda v\| = |\lambda| \|v\|$$

3. אי-שוויון המשולש:

$$\forall u, v \in V, \quad \|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$$

בהינתן ממ"פ $\langle \cdot, \cdot \rangle$, ראינו כי הפונקציה הבאה היא נורמה:

$$\|v\| = \sqrt{\langle v, v \rangle}$$

נקרא לנורמה הזאת נורמה מושרתת ממכפלה פנימית.

תרגיל 14.1.

תהא $\|\cdot\|$ נורמה המגיעה ממ"פ, הוכיחו את כלל המקבילית:

$$\forall z, w \in V, \|z + w\|^2 + \|z - w\|^2 = 2(\|z\|^2 + \|w\|^2)$$

פתרון:

$$\begin{aligned} \|z + w\|^2 + \|z - w\|^2 &= \langle z + w, z + w \rangle + \langle z - w, z - w \rangle \\ &= (\langle z, z \rangle + \langle z, w \rangle + \langle w, z \rangle + \langle w, w \rangle) + (\langle z, z \rangle - \langle z, w \rangle - \langle w, z \rangle + \langle w, w \rangle) \\ &= 2\langle z, z \rangle + 2\langle w, w \rangle = 2(\|z\|^2 + \|w\|^2) \end{aligned}$$

תרגיל 14.2.

יהא $V = \mathbb{R}_n[x]$ אוסף הפולינומים עד מעלה n , עבור $p(x) \in \mathbb{R}_n[x]$ נגדיר:

$$N(p(x)) = \max_{x \in [0,1]} |p(x)|$$

1. הראו כי N היא נורמה על V .

2. הראו כי N לא מגיעה מממ"פ על V .

פתרון:

1. נשאיר את סעיף זה כתרגיל.

2. אם N הייתה מגיעה מממ"פ היא הייתה מקיימת את כלל המקבילית, כלומר עבור $p_1(x) = x$, $p_2(x) = 1$ היה מתקיים:

$$N(p_1(x) + p_2(x))^2 + N(p_1(x) - p_2(x))^2 = 2(N(p_1(x))^2 + N(p_2(x))^2)$$

נחשב:

$$N(p_1(x) + p_2(x)) = \max_{x \in [0,1]} |x + 1| = 2, \quad N(p_1(x) - p_2(x)) = \max_{x \in [0,1]} |x - 1| = 1$$

$$N(p_1(x)) = \max_{x \in [0,1]} |x| = 1, \quad N(p_2(x)) = \max_{x \in [0,1]} |1| = 1$$

כלומר:

$$2^2 + 1^2 = 2(1^2 + 1^2) \Rightarrow 5 = 4$$

שזאת סתירה.

14.2 | א"ש קושי-שורץ

תזכורת

יהא V מ"ו מעל שדה $\mathbb{F}$ שהוא $\mathbb{R}$ או $\mathbb{C}$, עם ממ"פ $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ונורמה מושרת $\|\cdot\|$. אי-שוויון קושי-שורץ אומר כי:

$$\forall u, v \in V, \quad |\langle v, u \rangle| \leq \|v\| \cdot \|u\|$$

תרגיל 14.3.

יהא V מ"ו מעל שדה $\mathbb{F}$ שהוא $\mathbb{R}$ או $\mathbb{C}$, עם ממ"פ $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ונורמה מושרתת $\|\cdot\|$. הראו כי א"ש קושי-שוורץ בין $u, v \in V$ הוא שוויון אמ"מ u, v ת"ל, כלומר:

$$|\langle v, u \rangle| = \|v\| \cdot \|u\| \iff u, v \text{ ת"ל}$$

פתרון:

נראה את הטענה כאשר $\mathbb{F} = \mathbb{R}$, המקרה של $\mathbb{C}$ דומה ומושאר כתרגיל. יש לנו 2 כיוונים להראות.

- נניח כי u, v ת"ל. אם אחד הוקטורים אפס, אז א"ש הוא פשוט $0 \leq 0$, בפרט מתקיים שוויון. נניח כי $u, v \neq 0$, אז קיים $\lambda \in \mathbb{F}$ כך ש $u = \lambda v$, אז:

$$|\langle v, u \rangle| = |\langle v, \lambda v \rangle| = |\lambda \langle v, v \rangle| = |\lambda| \|v\|^2 = \|v\| \cdot |\lambda| \|v\| = \|v\| \cdot \|\lambda v\| = \|v\| \cdot \|u\|$$

וסיימנו.

- נניח כי $|\langle v, u \rangle| = \|v\| \cdot \|u\|$. אם $u = 0$ או $v = 0$ אז הטענה מתקיימת. נניח כי $u, v \neq 0$. נגדיר:

$$\lambda := \frac{\langle u, v \rangle}{\langle v, v \rangle} = \frac{\langle u, v \rangle}{\|v\|^2}, \quad w := u - \lambda v$$

אז:

$$\|w\|^2 = \langle u - \lambda v, u - \lambda v \rangle = \|u\|^2 - \frac{|\langle u, v \rangle|^2}{\|v\|^2} = \|u\|^2 - \frac{(\|v\| \cdot \|u\|)^2}{\|v\|^2} = 0$$

כלומר $\|w\| = 0$ ולכן $w = 0$, כלומר $u = \lambda v$ ולכן u, v ת"ל.

תרגיל 14.4.

יהיו $a, b, c \in \mathbb{R}$, הראו כי:

$$|ab + ac + bc| \leq a^2 + b^2 + c^2$$

פתרון:

נחפש וקטורים ב $\mathbb{R}^3$ כך שיתקיים:

$$\langle v, u \rangle = ab + ac + bc, \quad \|v\| \cdot \|u\| = a^2 + b^2 + c^2$$

ואז נוכל להשתמש בא"ש קושי-שוורץ. נשים לב כי:

$$\left\| \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

אז ניחוש סביר הוא וקטורים המקיימים:

$$\|u\| = \|v\| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

ובאמת נראה כי אם נבחר:

$$u = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}, \quad v = \begin{pmatrix} b \\ c \\ a \end{pmatrix}$$

אז נקבל:

$$|ab + bc + ac| = |\langle v, u \rangle| \leq \|v\| \cdot \|u\| = (\sqrt{a^2 + b^2 + c^2})^2 = a^2 + b^2 + c^2$$

כנדרש.

תרגיל 14.5.

יהיו $v, w \in \mathbb{R}^2$, נגדיר:

$$G = \begin{pmatrix} \langle v, v \rangle & \langle v, w \rangle \\ \langle w, v \rangle & \langle w, w \rangle \end{pmatrix}$$

הראו כי $\det(G) \geq 0$ וכי $\det(G) = 0$ אם ורק אם v, w תלויים.

פתרון:

נחשב ישירות:

$$\begin{aligned} \det(G) &= \det \begin{pmatrix} \langle v, v \rangle & \langle v, w \rangle \\ \langle w, v \rangle & \langle w, w \rangle \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} \|v\|^2 & \langle v, w \rangle \\ \langle w, v \rangle & \|w\|^2 \end{pmatrix} = \|v\|^2 \|w\|^2 - \langle v, w \rangle \langle w, v \rangle \\ &= \|v\|^2 \|w\|^2 - (\langle v, w \rangle)^2 \end{aligned}$$

נשים לב כי לפי אי-שוויון קושי-שוורץ:

$$|\langle v, w \rangle| \leq \|v\| \cdot \|w\| \implies (\langle v, w \rangle)^2 \leq \|v\|^2 \|w\|^2$$

כלומר $\det(G) \geq 0$.

בנוסף, לפי אי-שוויון קושי-שוורץ, מתקיים:

$$\det(G) = 0 \iff |\langle v, w \rangle| = \|v\| \cdot \|w\| \iff v, w \text{ תלויים}$$

כנדרש.

14.3 | אורתוגונליות, אורתונורמליות וגראם שמידט

תזכורת

יהא V מ"ו מעל $\mathbb{R}$ או $\mathbb{C}$ עם ממ"פ פנימית $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ונורמה מושרת $\|\cdot\|$.

• זוג וקטורים $u, v \in V$ נקראים **אורתוגונליים** אם:

$$\langle v, u \rangle = 0$$

נסמן $u \perp v$.

• קבוצת וקטורים $S = \{v_1, \dots, v_n\} \subset V$ נקראת:

– **אורתוגונלית** אם:

$$\forall 1 \leq i < j \leq n, \quad \langle v_i, v_j \rangle = 0$$

– **אורתונורמלית** אם היא קבוצה אורתוגונלית וגם:

$$\forall 1 \leq i \leq n, \quad \|v_i\| = 1$$

בסיס ל- V נקרא אורתוגונלי או אורתונורמלי אם קבוצת אבריו היא קבוצה אורתוגונלית או אורתונורמלית בהתאמה.

תרגיל 14.6.

יהא V מ"ו מעל $\mathbb{R}$ או $\mathbb{C}$ עם ממ"פ פנימית $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ונורמה מושרת $\|\cdot\|$.
תהא $S = \{v_1, \dots, v_n\}$ קבוצת וקטורים אורתוגונלית ב- V . נגדיר $C = \left\{ \frac{v_1}{\|v_1\|}, \dots, \frac{v_n}{\|v_n\|} \right\}$. הראו כי C היא קבוצת וקטורים אורתונורמלית.

פתרון:

יש לנו 2 דברים להראות, ראשית ש- C אורתוגונלית, ושנית שכל וקטור ב- C הוא מאורך 1.

• נבחר $1 \leq i \neq j \leq n$, נחשב:

$$\left\langle \frac{v_j}{\|v_j\|}, \frac{v_i}{\|v_i\|} \right\rangle = \frac{1}{\|v_j\|} \cdot \overline{\frac{1}{\|v_i\|}} \langle v_j, v_i \rangle \overset{0}{=} 0$$

• נבחר $1 \leq i \leq n$, נחשב:

$$\left\| \frac{v_i}{\|v_i\|} \right\| = \left| \frac{1}{\|v_i\|} \right| \cdot \|v_i\| = \frac{\|v_i\|}{\|v_i\|} = 1$$

תרגיל 14.7.

הוכיחו כי $B = \left(\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -6 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ בסיס א"ג, ונרמלו אותו.

פתרון:

נסמן את הוקטורים v_1, v_2, v_3 בהתאמה אז:

$$\langle v_1, v_2 \rangle = 3 \cdot 1 + 1 \cdot 0 + 3 \cdot (-1) = 0, \quad \langle v_1, v_3 \rangle = 3 \cdot 1 + 1 \cdot (-6) + 3 \cdot 1 = 0, \quad \langle v_2, v_3 \rangle = 1 + 0 - 1 = 0$$

ולכן היא א"ג, נחשב:

$$\|v_1\| = \sqrt{\langle v_1, v_1 \rangle} = \sqrt{9 + 1 + 9} = \sqrt{19}, \quad \|v_2\| = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}, \quad \|v_3\| = \sqrt{1 + 1 + 36} = \sqrt{38}$$

אז הבסיס שלנו הוא:

$$C = \left(\frac{1}{\sqrt{19}}v_1, \frac{1}{\sqrt{2}}v_2, \frac{1}{\sqrt{38}}v_3 \right) = \left(\begin{pmatrix} \frac{3}{\sqrt{19}} \\ \frac{1}{\sqrt{19}} \\ \frac{3}{\sqrt{19}} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{38}} \\ -\frac{6}{\sqrt{38}} \\ \frac{1}{\sqrt{38}} \end{pmatrix} \right)$$

תרגיל 14.8.

יהי $S = (v_1, \dots, v_n)$ קבוצה כך ש:

$$\forall 1 \leq i \leq n-1, \quad \langle v_i, v_{i+1} \rangle = \langle v_1, v_n \rangle = 0$$

הוכיחו או הפריכו, S א"ג.

פתרון:

זה לא נכון, למשל:

$$S = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right)$$

דוגמה נגדית.

14.4 | תהליך גראם-שמידט

תזכורת

יהא V מ"ו מעל $\mathbb{R}$ או $\mathbb{C}$ עם ממ"פ פנימית $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ונורמה מושרת $\|\cdot\|$.
נניח כי $B = (v_1, \dots, v_n)$ בסיס א"נ של V .
יהא $v \in V$, אז קיימים יחידים $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{F}$ כך ש:

$$v = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n$$

נשים לב כי:

$$\langle v, v_k \rangle = \langle \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n, v_k \rangle = \lambda_1 \langle v_1, v_k \rangle + \dots + \lambda_n \langle v_n, v_k \rangle = \lambda_k$$

במילים אחרות:

$$[v]_B = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle v, v_1 \rangle \\ \vdots \\ \langle v, v_n \rangle \end{pmatrix}$$

כלומר בסיס א"נ מאפשר לנו לחשב מקדמים לכל וקטור בצורה פשוטה.

תזכורת

יהא V מ"ו מעל $\mathbb{R}$ או $\mathbb{C}$ עם ממ"פ פנימית $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ונורמה מושרת $\|\cdot\|$.
תהא קבוצה $W = \{v_1, \dots, v_n\} \subset V$ של וקטורים ת"ל.
תהליך גרם-שמידט הוא תהליך לבניית קבוצה אורתונורמלית $U = \{u_1, \dots, u_n\}$ כך שלכל $1 \leq k \leq n$ מתקיים:

$$\text{span}(v_1, \dots, v_k) = \text{span}(u_1, \dots, u_k)$$

ובפרט:

$$\text{span}(U) = \text{span}(W)$$

נבנה את U באינדוקציה ע"י:

$$u_1 = \frac{v_1}{\|v_1\|}$$

$$\tilde{u}_k = v_k - \langle u_1, v_k \rangle u_1 - \dots - \langle u_{k-1}, v_k \rangle u_{k-1}, \quad u_k = \frac{\tilde{u}_k}{\|\tilde{u}_k\|}$$

נדגים את השיטה.

דוגמא 14.9.

יהא $V = \mathbb{R}^4$ עם המ"פ הסטנדרטית, ויהיו:

$$v_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

נבצע על v_1, v_2, v_3 את תהליך גרם-שמידט.

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{u}_2 = v_2 - \langle u_1, v_2 \rangle u_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \tilde{u}_3 &= v_3 - \langle u_1, v_3 \rangle u_1 - \langle u_2, v_3 \rangle u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow u_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

תרגיל 14.10.

יהיו:

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} a \\ a \\ 1 \end{pmatrix}$$

- מצא a כך ש v_1, v_2 אורתוגונליים.
- עבור $a = -1$, מצא u_1, u_2 אורתונורמליים כך שפורשים את התמ"ו שנפרש ע"י v_1, v_2 .
- השלימו את u_1, u_2 לבסיס א"נ של $\mathbb{R}^3$, ניתן להשאיר את הווקטור האחרון בצורה $\tilde{u}_3$ כאשר $u_3 = \frac{\tilde{u}_3}{\|\tilde{u}_3\|}$.

פתרון:

1. ראשית נחשב את $\langle v_1, v_2 \rangle$:

$$\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a \\ a \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = a + 2a + 3 = 3a + 3$$

אז v_1, v_2 א"ג אמ"מ $a = -1 \iff 3a + 3 = 0$.

2. עבור $a = -1$, הוקטורים כבר א"ג, לכן נותר רק לבצע נרמול:

$$u_1 = \frac{1}{\|v_1\|} v_1 = \frac{1}{\sqrt{1^2 + 2^2 + 3^2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{14}} \\ \frac{2}{\sqrt{14}} \\ \frac{3}{\sqrt{14}} \end{pmatrix}$$

$$u_2 = \frac{1}{\sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2}} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$$

3. ראשית, נשלים את u_1, u_2 לבסיס ע"י הוספת v_3 , וכמובן שעשינו זאת כבר פעמים רבות, ומועמד פשוט הוא:

$$v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

כעת נבצע עליו את תהליך גרם-שמידט:

$$\begin{aligned} \tilde{u}_3 &= v_3 - \langle u_1, v_3 \rangle u_1 - \langle u_2, v_3 \rangle u_2 \\ &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \left\langle \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{14}} \\ \frac{2}{\sqrt{14}} \\ \frac{3}{\sqrt{14}} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{14}} \\ \frac{2}{\sqrt{14}} \\ \frac{3}{\sqrt{14}} \end{pmatrix} - \left\langle \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{\sqrt{14}} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{14}} \\ \frac{2}{\sqrt{14}} \\ \frac{3}{\sqrt{14}} \end{pmatrix} + \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{1}{14} \\ \frac{2}{14} \\ \frac{3}{14} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 - \frac{1}{14} - \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{14} - \frac{1}{3} \\ -\frac{3}{14} + \frac{1}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{25}{42} \\ -\frac{20}{42} \\ \frac{5}{42} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

14.5 | הטלה ומשלים אורתוגונלי

תזכורת

יהא V מ"ו מעל $\mathbb{R}$ או $\mathbb{C}$ עם ממ"פ פנימית $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ונורמה מושרת $\|\cdot\|$.
יהא W תת-מרחב של V , נגדיר:

$$W^\perp := \{v \in V \mid \forall w \in W, \langle v, w \rangle = 0\}$$

נקרא ל- $W^\perp$ המשלים האורתוגונלי של W ב- V וראינו שהוא תת-מרחב של V המקיים:

$$V = W \oplus W^\perp$$

נגדיר את ההיטל האורתוגונלי של v על W להיות ההעתקה הליניארית $P_W : V \rightarrow V$ כך שלכל $v \in V$ מתקיים:

$$P_W(v) \in W, \quad v - P_W(v) \in W^\perp$$

נניח כי $B = \{u_1, \dots, u_k\}$ הוא בסיס א"נ של W , אז:

$$P_W(v) = \langle v, u_1 \rangle u_1 + \dots + \langle v, u_k \rangle u_k$$

תרגיל 14.11.

יהא $\mathbb{R}^n$ מ"ו עם המ"פ הסטנדרטית.
יהא W תת-מרחב של $\mathbb{R}^n$, ותהא $P_W : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ההיטל האורתוגונלי על W . היות ו- P_W היא העתקה ליניארית, קיימת מטריצה $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ כך ש:

$$P_W(v) = Av$$

1. הראו כי A מקיימת $A^2 = A$.

2. הוכיחו כי לכל $x, y \in \mathbb{R}^n$ מתקיים:

$$\langle P_W(x), y \rangle = \langle x, P_W(y) \rangle$$

בפרט הסיקו כי $A = A^t$.

פתרון:

1. נשים לב כי אם $v \in W$ אז $P_W(v) = v$, יש כמה דרכים לראות זאת, אחת מהן היא לבחור בסיס א"נ $B = \{u_1, \dots, u_k\}$ של W , ואז:

$$P_W(v) = \langle v, u_1 \rangle u_1 + \dots + \langle v, u_k \rangle u_k = v$$

נשים לב כי לכל $v \in \mathbb{R}^n$ מתקיים $P_W(v) \in W$, אז לכל $v \in \mathbb{R}^n$:

$$P_W(P_W(v)) = P_W(v)$$

נשים לב כי $P_W(v) = Av$ אז:

$$Av = P_W(v) = P_W(P_W(v)) = P_W(Av) = A(Av) = A^2v$$

היות וזה לכל $v \in \mathbb{R}^n$, נקבל כי $A = A^2$.

2. יהיו $x, y \in \mathbb{R}^n$. נבחר בסיס א"נ $B = \{u_1, \dots, u_k\}$ של W , אז לפי הגדרה:

$$\begin{aligned} \langle P_W(x), y \rangle &= \langle \langle x, u_1 \rangle u_1 + \dots + \langle x, u_k \rangle u_k, y \rangle = \langle x, u_1 \rangle \langle u_1, y \rangle + \dots + \langle x, u_k \rangle \langle u_k, y \rangle \\ &= \langle x, \langle y, u_1 \rangle u_1 + \dots + \langle y, u_k \rangle u_k \rangle = \langle x, P_W(y) \rangle \end{aligned}$$

נניח כי $P_W(v) = Av$ עבור מטריצה $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ אז נזכר כי:

$$\langle Ax, y \rangle = \langle x, A^t y \rangle$$

אבל ראינו כי $\langle Ax, y \rangle = \langle P_W(x), y \rangle = \langle x, P_W(y) \rangle = \langle x, Ay \rangle$ ולכן:

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^n, \quad \langle x, A^t y \rangle = \langle x, Ay \rangle \Rightarrow \langle x, (A - A^t)y \rangle = 0$$

היות וזה מתקיים לכל $x, y \in \mathbb{R}^n$, נקבל כי $A - A^t = 0$ כלומר $A = A^t$, כלומר A סימטרית.

תרגיל 14.12.

תהא $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ כך ש:

$$A^2 = A, \quad A^t = A$$

הראו כי קיים תת-מרחב W של $\mathbb{R}^n$ כך ש A היא ההיטל האורתוגונלי על W .

פתרון:

נשים לב כי אם $P_W(v) = Av$, אז $W = \text{Im}(P_W) = \text{Col}(A)$, אז נגדיר את W להיות $\text{Col}(A)$.
נבחר בסיס א"נ $B = \{u_1, \dots, u_k\}$ של W . נגדיר $P_W : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ בצורה הבאה:

$$P_W(v) = \langle v, u_1 \rangle u_1 + \dots + \langle v, u_k \rangle u_k$$

נרצה להראות כי $P_W(v) = Av$ לכל $v \in \mathbb{R}^n$.
ראשית, נשלים את B לבסיס א"נ של $\mathbb{R}^n$, כלומר נבחר וקטורים $u_{k+1}, \dots, u_n$ כך ש:

$$B' = \{u_1, \dots, u_k, u_{k+1}, \dots, u_n\}$$

הוא בסיס א"נ של $\mathbb{R}^n$.

מספיק להראות כי לכל $1 \leq j \leq n$ מתקיים:

$$Au_j = P_W(u_j)$$

• יהא $1 \leq k \leq j$, אז $u_j \in W$, ולכן:

$$P_W(u_j) = u_j$$

מצד שני, $u_j \in W = \text{Col}(A)$, בפרט קיים $x \in \mathbb{R}^n$ כך ש:

$$Ax = u_j$$

לכן:

$$Au_j = A(Ax) = A^2x = Ax = u_j$$

$$Au_j = P_W(u_j)$$

• יהא $k+1 \leq j \leq n$. נרצה להראות כי $Au_j = P_W(u_j) = 0$. נשים לב כי לכל $v \in \mathbb{R}^n$ מתקיים:

$$\langle Au_j, v \rangle = \langle u_j, A^t v \rangle = \langle u_j, Av \rangle$$

אבל $Av \in \text{Col}(A)$ אז:

$$Av = \lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_k u_k$$

ולכן:

$$\langle Au_j, v \rangle = \langle u_j, \lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_k u_k \rangle = \lambda_1 \langle u_j, u_1 \rangle + \dots + \lambda_k \langle u_j, u_k \rangle = 0$$

היות וזה לכל $v \in \mathbb{R}^n$, נקבל כי $Au_j = 0$.

תרגול חזרה למבחן

תרגיל 15.1

- יהא V מ"ו נוצר סופית מעל $\mathbb{R}$.
 תהא $T : V \rightarrow V$ התעתקה לינארית המקיימת $T^2 = \text{Id}$.
1. הראו שאם λ ע"ע של T , אז $\lambda = \pm 1$.
 2. הראו כי לכל $v \in V$, $w_1 = \frac{1}{2}(T(v) + v)$ הוא וקטור ע"ע של T המתאים לערך העצמי 1, ו- $w_2 = \frac{1}{2}(v - T(v))$ הוא וקטור ע"ע של T המתאים לערך העצמי -1, וכי $v = w_1 + w_2$.
 3. הראו כי T אופרטור לכסין.

פתרון:

1. נניח כי λ ע"ע של T , נסמן ב- $v \neq 0$ וקטור ע"ע שלו, אז:

$$T^2(v) = T(T(v)) = T(\lambda v) = \lambda T(v) = \lambda^2 v$$

מצד שני, לפי הנתון $T^2 = \text{Id}$, ולכן:

$$T^2(v) = \text{Id}(v) = v$$

כלומר, מתקיים:

$$\lambda^2 v = v$$

מאחר ש- $v \neq 0$, נסיק כי $\lambda^2 = 1$, ולכן $\lambda = \pm 1$.

2. נחשב ישירות:

$$T(w_1) = T\left(\frac{1}{2}(T(v) + v)\right) = \frac{1}{2}(T^2(v) + T(v)) = \frac{1}{2}(v + T(v)) = w_1$$

כלומר, w_1 הוא וקטור ע"ע של T המתאים לערך העצמי 1.

$$T(w_2) = T\left(\frac{1}{2}(v - T(v))\right) = \frac{1}{2}(T(v) - T^2(v)) = \frac{1}{2}(T(v) - v) = -w_2$$

כלומר, w_2 הוא וקטור ע"ע של T המתאים לערך העצמי -1.

$$w_1 + w_2 = \frac{1}{2}(T(v) + v) + \frac{1}{2}(v - T(v)) = \frac{1}{2}(2v) = v$$

כלומר, $v = w_1 + w_2$.

3. נשים לב מהסעיף הקודם כי כל $v \in V$ אפשר לכתוב כסכום של וקטור ע"ע המתאים לערך העצמי 1 ווקטור ע"ע המתאים לערך העצמי -1, במילים אחרות, מתקיים:

$$V = V_{\lambda=1} + V_{\lambda=-1}$$

כאשר $V_{\lambda=\pm 1}$ הם המרחבים העצמיים המתאימים לערכים העצמיים ± 1 . יותר מזה, ממשפט שראינו בהרצאות, אנו יודעים כי $V_{\lambda=1} \cap V_{\lambda=-1} = \{0\}$ ולכן מתקיים:

$$V = V_{\lambda=1} \oplus V_{\lambda=-1}$$

בפרט:

$$\dim(V) = \dim(V_{\lambda=1}) + \dim(V_{\lambda=-1})$$

כלומר, הר"ג של הע"ע 1 פלוס הר"ג של הע"ע -1 שווה לממד של V , ולכן T הוא אופרטור לכסין.

תרגיל 15.2.

יהא V מ"ו נוצר סופית מעל $\mathbb{R}$. תהא W תת-קבוצה של V . הראו כי W היא תמ"ו אמ"מ קיימת התעתקה ליניארית $T : V \rightarrow V$ כך ש $\ker(T) = W$.

פתרון:

כיוון אחד אנו כבר יודעים, שאם קיימת התעתקה ליניארית $T : V \rightarrow V$ כך ש $\ker(T) = W$, אז W תמ"ו של V .

נראה את הכיוון השני, כלומר שאם W תמ"ו של V , אז קיימת התעתקה ליניארית $T : V \rightarrow V$ כך ש $\ker(T) = W$.

נבחר בסיס $(u_1, \dots, u_k)$ ל W , ונשלים אותו לבסיס $(u_1, \dots, u_k, v_1, \dots, v_m)$ של V . נגדיר את $T : V \rightarrow V$ על ידי:

$$T(u_i) = 0 \quad \forall i = 1, \dots, k, \quad T(v_j) = v_j \quad \forall j = 1, \dots, m$$

על פי ממשפט, קיימת העתקה ליניארית יחידה $T : V \rightarrow V$ המקיימת זאת.

נראה כי $\ker(T) = W$, כיוון אחד ברור, כי $W \subseteq \ker(T)$. נניח כי $v \in \ker(T)$, אז כמובן כי:

$$v = \lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_k u_k + \eta_1 v_1 + \dots + \eta_m v_m$$

אבל:

$$v \in \ker T \Rightarrow \vec{0} = T(v) = \eta_1 v_1 + \dots + \eta_m v_m = \eta_1 v_1 + \dots + \eta_m v_m + 0u_1 + \dots + 0u_k = \vec{0}$$

מאחר ש $(u_1, \dots, u_k, v_1, \dots, v_m)$ הוא בסיס של V , נקבל כי כל המקדמים $\eta_1, \dots, \eta_m$ הם אפס, ולכן:

$$v = \lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_k u_k \in W$$

וסיימנו.

תרגיל 15.3.

יהא $B = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ בסיס של $\mathbb{R}^3$. תהא $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ התעתקה ליניארית המקיימת:

$$[T]_B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

1. מצאו בסיס ומימד ל $\ker(T)$.

2. מצאו בסיס ומימד ל $\operatorname{Im}(T)$.

3. מצאו בסיס א"נ ל $\operatorname{Im}(T)$ (עבור הממ"פ הסטנדרטית של $\mathbb{R}^3$).

פתרון:

1. נזכר כי:

$$\ker(T) = \{v \in \mathbb{R}^3 \mid [v]_B \in N([T]_B)\}$$

נרצה למצוא את $N([T]_B)$, כלומר לפתור את הממ"ל:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{\text{דירוג}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

כלומר:

$$N([T]_B) = \left\{ \begin{pmatrix} -t \\ t \\ 0 \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{R} \right\} = \operatorname{span} \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

כלומר:

$$\ker(T) = \left\{ v \in \mathbb{R}^3 \mid [v]_B = \begin{pmatrix} -t \\ t \\ 0 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R} \right\}$$

או במילים אחרות:

$$\ker(T) = \left\{ -t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{R} \right\} = \operatorname{span} \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

כלומר, בסיס ל $\ker(T)$ הוא $\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$, והמימד של $\ker(T)$ הוא 1.

2. נזכר כי:

$$\text{Im}(T) = \{v \in \mathbb{R}^3 \mid [v]_B \in \text{Col}([T]_B)\}$$

כלומר:

$$\begin{aligned} \text{Im}(T) &= \left\{ v \in \mathbb{R}^3 \mid [v]_B \in \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\} \right\} = \left\{ v \in \mathbb{R}^3 \mid [v]_B = a \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, a, b \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \left\{ v \in \mathbb{R}^3 \mid [v]_B = \begin{pmatrix} a+b \\ 3a+b \\ 2b \end{pmatrix}, a, b \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \left\{ (a+b) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + (3a+b) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + (2b) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, a, b \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} 4a+2b \\ a+3b \\ 4a+4b \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R} \right\} = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \right\} \end{aligned}$$

כלומר, בסיס ל $\text{Im}(T)$ הוא $\left\{ \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \right\}$, והמימד של $\text{Im}(T)$ הוא 2.

3. נבצע גרם שמידט על הוקטורים:

$$u_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad u_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

קודם נקבל בסיס א"ג ואז ננרמל.

$$v_1 = u_1$$

$$v_2 = u_2 - \frac{\langle u_2, v_1 \rangle}{\langle v_1, v_1 \rangle} v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} - \frac{2 \cdot 4 + 3 \cdot 1 + 4 \cdot 4}{4 \cdot 4 + 1 \cdot 1 + 4 \cdot 4} \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} - \frac{27}{33} \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{14}{11} \\ \frac{24}{11} \\ \frac{8}{11} \end{pmatrix}$$

אז בסיס א"ג ל $\text{Im}(T)$ הוא:

$$\left\{ \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\frac{14}{11} \\ \frac{24}{11} \\ \frac{8}{11} \end{pmatrix} \right\}$$

ועבור בסיס א"ג, ננרמל את הוקטורים:

$$e_1 = \frac{1}{\|v_1\|} v_1, \quad e_2 = \frac{1}{\|v_2\|} v_2$$

$$\|v_1\| = \sqrt{4^2 + 1^2 + 4^2} = \sqrt{16 + 1 + 16} = \sqrt{33} \quad \text{כאשר } \|v_2\| = \sqrt{\left(-\frac{14}{11}\right)^2 + \left(\frac{24}{11}\right)^2 + \left(\frac{8}{11}\right)^2}$$

תרגיל 15.4.

יהא n אי-זוגי, ותהא $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ מטריצה המקיימת $A + A^t = 2I_n$. הוכיחו כי המטריצה $A - I$ אינה הפיכה.

פתרון:

על פי השוויון הנתון, נקבל כי:

$$A - I = I - A^t$$

בפרט:

$$\det(A - I) = \det(I - A^t) \stackrel{*}{=} \det((I - A^t)^t) = \det(I - A) = (-1)^n \det(A - I) \stackrel{**}{=} -\det(A - I)$$

כאשר בשוויון $*$ השתמשנו בעובדה כי $\det(B) = \det(B^t)$ לכל מטריצה ריבועית B , ובשוויון $**$ השתמשנו בעובדה כי $(-1)^n = -1$ כאשר n אי-זוגי. כלומר, מתקיים:

$$\det(A - I) = -\det(A - I) \Rightarrow 2\det(A - I) = 0 \Rightarrow \det(A - I) = 0$$

בפרט, המטריצה $A - I$ אינה הפיכה.