# רשימות תרגול לקורס חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי 2ב׳ למכנית

נכתב על ידי בן פוירשטיין ועומר קשת

רשימות תרגול אילו נכתבו בצמוד לקורס כפי שלימדה ד״ר לודה מרקוס-אפשטיין באוניברסיטת תל אביב בסמסטר ב׳ תשפ״ג.
רשימות אילו עלולות להכיל טעויות, חוסרים או אי דיוקים, תיקונים יתקבלו בברכה.

bf1@mail.tau.ac.il

# *תוכן העניינים*

# ***תרגול ראשון***

## 1.1 התכנסות סדרת פונקציות

**תזכורת.**

יהא $I \subset \mathbb{R}$ קטע (או $\mathbb{R}$ כולו),ותהא סדרת פונקציות $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ כך שלכל $n$, $f_n : I \to \mathbb{R}$, ופונקציה $f : I \to \mathbb{R}$
נאמר כי <u>סדרת הפונקציות $f_n$ מתכנסות נקודתית לפונקציה $f$</u> אם לכל $x_0 \in I$ מתקיים:

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x_0) = f(x_0)$$

כלומר:

$$\forall x_0 \in I, \forall \epsilon > 0, \exists N_{\epsilon,x_0} \in \mathbb{N}, : |f_n(x_0) - f(x_0)| < \epsilon$$

במקרה זה נקרא ל $f$ <u>הפונקציה הגבולית של הסדרה $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$</u> ונסמן $f \xrightarrow{n\to\infty} f_n$.

**תזכורת.**

יהא $I \subset \mathbb{R}$ קטע (או $\mathbb{R}$ כולו),ותהא סדרת פונקציות $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ כך שלכל $n$, $f_n : I \to \mathbb{R}$, ופונקציה $f : I \to \mathbb{R}$
נאמר כי <u>סדרת הפונקציות $f_n$ מתכנסות במ"ש לפונקציה $f$</u> אם מתקיים:

$$\forall \epsilon > 0, \exists N_\epsilon \in \mathbb{N} : \forall x \in I, \forall n > N_0 : |f_n(x) - f(x)| < \epsilon$$

זהו תנאי חזק יותר מהתכנסות נקודתית, כלומר אם סדרת פונקציות מתכנסת במ"ש, אז היא בהכרח מתכנסת נקודתית (לאותה פונקציה גבולית) ונסמן $f \twoheadrightarrow f_n$.

**תזכורת.**

יהא $I \subset \mathbb{R}$ קטע (או $\mathbb{R}$ כולו),ותהא סדרת פונקציות $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ כך שלכל $n$, $f_n : I \to \mathbb{R}$, ופונקציה $f : I \to \mathbb{R}$
אז סדרת הפונקציות $f_n$ מתכנסת במ"ש ל $f$ אמ"מ:

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in I} |f_n(x) - f(x)| = 0$$

**תזכורת.**

אם סדרת פונקציות רציפות מתכנסות במ"ש לפונקציה גבולית בקטע $I$, אז הפונקציה הגבולית רציפה ב$I$.

### תרגיל 1.1.1.

נגדיר את סדרת הפונקציות $f_n : (0,1] \to \mathbb{R}$ על ידי $f_n = \begin{cases} n & x \in (0,\frac{1}{n}) \\ x^2 & \text{אחרת} \end{cases}$ הוכיחו כי $f_n$ מתכנסת נקודתית לפונקציה $f$ (בכל $\mathbb{R}$), ובדקו האם:

$$\int_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n(x)dx = \lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)dx$$

**<u>פתרון התרגיל:</u>**
נשים לב כי לכל $x_0 \in (0,1]$ בהכרח קיים $N_{x_0} \in \mathbb{N}$ כך שלכל $n > N_{x_0}$ מתקיים $\frac{1}{n} < x_0$ (מדוע?).
כלומר הסדרת $\{f_i(x_0)\}_{i\in\mathbb{N}}$ קבועה ושווה ל-$x_0^2$ הכל ממקום מסיום, ולכן מתכנסת ל-$x_0^2$, כלומר סדרה הפונקציות מתכנסת לפונקציה $f(x) = x^2$ בכל $\mathbb{R}$, (נסמן $f_n(x) \xrightarrow{n\to\infty} x^2$).
נשים לב כי:

$$\int_0^1 f_n(x)dx = \int_0^{\frac{1}{n}} ndx + \int_{\frac{1}{n}}^1 x^2dx = 1 + \left[\frac{x^3}{3}\right]\Bigg|_{x=\frac{1}{n}}^{x=1} = \frac{4}{3} - \frac{1}{3n^3}$$

ומצד שני:

$$\int_0^1 x^2dx = \frac{1}{3}$$

כלומר:

$$\frac{1}{3} = \int_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n(x)dx \neq \lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)dx = \lim_{n\to\infty} \frac{4}{3} - \frac{1}{3n^3} = \frac{4}{3}$$

### תרגיל 1.1.2.

תהא סדרת הפונקציות $f_n(x) = \frac{x}{n}$, האם הסדרה מתכנסת במ"ש בכל $\mathbb{R}$? מה לגבי הקטע $[0,A]$ עבור $A > 0$?

**<u>פתרון התרגיל:</u>**
ראשית נמצא את הפונקציה הגבולית, נשים לב כי:

$$\forall x_0 \in \mathbb{R}, \lim_{n\to\infty} f_n(x_0) = \lim_{n\to\infty} \frac{x_0}{n} = 0$$

כלומר סדרת הפוקנציות מתכנסות נקודתית לפונקציה $f(x) \equiv 0$.
נבדוק התנכסות במ"ש בכל $\mathbb{R}$, נשים לב כי:

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in\mathbb{R}} |f_n(x) - f(x)| = \lim_{n\to\infty} \sup_{x\in\mathbb{R}} \left|\frac{x}{n}\right| = \infty \neq 0$$

כלומר סדרת הפונקציות אינה מתכנסת במ"ש בכל $\mathbb{R}$, נבדוק את הקטע $[0,A]$:

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{x\in[0,A]}|f_n(x)-f(x)|=\lim_{n\to\infty}\sup_{x\in[0,A]}\left|\frac{x}{n}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{A}{n}=0$$

כלומר סדרת הפונקציות אכן מתכנסת במ"ש בקטע $[0,A]$.

### תרגיל 1.1.3.

תהא $f_n(x)=x^n$ כאשר $f_n:(-1,1)\to\mathbb{R}$, ראינו כי $f_n(x)\xrightarrow{n\to\infty}0$, בדקו התכנסות במ"ש בקטעים:

1.
$$\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$$

2.
$$(-1,1)$$

**פתרון התרגיל:**

1. נשתמש בקיטירון הסופרמום, נשים לב כי:
$$\sup_{x\in[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]}|f_n(x)-0|=f_n\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2^n}\xrightarrow{n\to\infty}0$$
כלומר, בקטע זה קיימת התכנסות במ"ש.

2. בסעיף הזה דווקא נשלול את ההתכנסות במ"ש, נעשה זאת בכך שנראה שלכל $n\in\mathbb{N}$ קיים $x_n\in(-1,1)$ כך ש $|f_n(x_n)-f(x_0)|=\frac{1}{2}$ ולכן לא יכול להתקיים תנאי הסופרמום.
ואכן, $x_n=\frac{1}{2^{\frac{1}{n}}}$ מקיים זאת.

### תרגיל 1.1.4.

תהא סדרת הפונקציות $f_n:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f_n=\begin{cases}1 & x\in[n,n+1]\\0 & \text{אחרת}\end{cases}$ האם סדרת הפונקציות מתכנסת במ"ש בתחום $[0,2023]$? האם ב$[0,\infty)$?

**פתרון התרגיל:**

1. נתחיל ב$[0,2023]$, נשים לב כי לכל $n\geq 2023$ מתקיים $\forall x\in[0,2023], f_n(x)=0$, ולכן סדרת הפונקציות מתכנסת נקודתית ובמ"ש ב$[0,2023]$.

2. לעומת זאת, ב$[0,\infty)$, עדיין הפונקציה מתכנסת נקודתית, כי לכל $x_0 \in [0,\infty)$, סדרת המספרים $\{f_n(x_0)\}$ היא מהצורה הבאה:

$$0, ..., 0, 1, 0, ..., 0, ...$$

אשר מתכנסת ל$0$, כלומר $f_n(x) \xrightarrow{n\to\infty} 0$, אבל לעומת זאת:

$$\sup_{x\in[0,\infty)} |f_n(x) - 0| = 1$$

כלומר סדרת הפונקציות אינה מתכנסת במ"ש ב$[0,\infty)$.

### תרגיל 1.1.5.

האם סדרת הפונקציות $f_n = \frac{x^n}{3+2x^n}$ מתכנסת נקודתית או במ"ש ב$[0,2]$?

**פתרון התרגיל:**

נתחיל בלמצוא את הפוקנציה הגבולית, לשם כך נחלק למקרים:

1. עבור $x = 0$, מתקיים $f_n(0) = 0$.
2. עבור $0 < x < 1$ מתקיים:

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{x^n}{3+2x^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\underbrace{\frac{3}{x^n}}_{\to\infty}+2} = 0$$

3. עבור $x = 1$ מתקיים $f_n(1) = \frac{1}{5}$.
4. עבור $1 < x \leq 2$ מתקיים:

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{x^n}{3+2x^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\underbrace{\frac{3}{x^n}}_{\to 0}+2} = \frac{1}{2}$$

כלומר הפונקציה הגבולית הינה:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \in [0,1) \\ \frac{1}{5} & x = 1 \\ \frac{1}{2} & x \in (1,2] \end{cases}$$

בפרט, היות כי $f_n$ רציפות ו$f$ אינה רציפה, אז ההתכנסות אינה במידה שווה.

### תרגיל 1.1.6.

האם סדרת הפונקציות $f_n:[0,1]\to\mathbb{R}$, $f_n=x^n-x^{n+1}$ מתכנסת במ"ש?

**<u>פתרון התרגיל:</u>**

ראשית נבדוק התכנסות נקודתית, נבדוק את הקצוות:

$$\forall n\in\mathbb{N}, f_n(0)=f_n(1)=0$$

עבור $x\in(0,1)$ בעזרת א"ש המשולש:

$$\left|x^n-x^{n+1}\right|\le|x^n|+\left|x^{n+1}\right|\xrightarrow[n\to\infty]{}0$$

כלומר $f_n$ מתכנסות נקודתית ל-$f(x)=0$.

על מנת להוכיח התכנסות במ"ש, נחשב:

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{x\in[0,1]}|f_n(x)-f(x)|=\lim_{n\to\infty}\underbrace{\sup_{x\in[0,1]}|x^n-x^{n+1}|}_{:=M_n}$$

היות ו-$x^n-x^{n+1}$ רציפה בקטע סגור, עפ"י משפט ויירשטראס, $g(x)=x^n-x^{n-1}$ מקבלת את ערכה המקסימלי י והמינימלי בקטע $[0,1]$, על מנת למצוא אותו נגזור ונשווה לאפס:

$$g'(x)=nx^{n-1}-(n+1)x^n=0$$

משום ש-$f_n(x)\ge0$ אפשר להניח כי המקסימום לא מתקבל ב-$x=0$ (כי $f_n(0)=0$) ולכן ניתן לחלק ב-$x^{n-1}$ ונקבל:

$$n-(n+1)x=0\Rightarrow x=\frac{n}{n+1}$$

ומאותה סיבה, נקודה זאת היא אכן המקסימום המוחלט, ולכן:

$$M_n=f_n\left(\frac{n}{n+1}\right)=\left(\frac{n}{n+1}\right)^n-\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1}=\left(\frac{n}{n+1}\right)^n\left(1-\frac{n}{n+1}\right)$$

נרצה לחשב את $\lim_{n\to\infty}M_n$, ולשם כך נפשט את $M_n$:

$$\begin{aligned}M_n&=\left(\frac{n}{n+1}\right)^n\left(1-\frac{n}{n+1}\right)=\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^n\left(1-\frac{n}{n+1}\right)\\&=\left(1+\frac{-1}{n+1}\right)^n\left(1-\frac{n}{n+1}\right)=\left(1+\frac{-1}{n+1}\right)^{n+1}\left(1+\frac{-1}{n+1}\right)^{-1}\left(1-\frac{n}{n+1}\right)\end{aligned}$$

ולכן:

$$\lim_{n\to\infty}M_n=\lim_{n\to\infty}\overset{\frac{1}{e}}{\left(1+\frac{-1}{n+1}\right)^{n+1}}\overset{1}{\left(1+\frac{-1}{n+1}\right)^{-1}}\overset{0}{\left(1-\frac{n}{n+1}\right)}=0$$

ולכן סדרת הפונקציות מתכנסת במידה שווה.

### תרגיל 1.1.7.

תהא $f_n$ סדרת פונקציות המתכנסות נקודתית ל $f$, נניח כי לכל $n \in \mathbb{N}$, $f_n$ חסומה, האם $f$ גם חסומה?

**<u>פתרון התרגיל:</u>**
לא, והנה דוגמא נגדירת:

$$f_n(x) = \begin{cases} x & x \in [-n, n] \\ 0 & \text{אחרת} \end{cases}$$

אז לכל $n$ מתקיים $|f_n(x)| < n$ ולכן $f_n$ חסומה, אבל הפונקציה הגבולית, $f(x) = x$ אינה חסומה.

### תרגיל 1.1.8.

תהא $f_n$ סדרת פונקציות המתכנסות <u>במ"ש</u> ל $f$, נניח כי לכל $n \in \mathbb{N}$, $f_n$ חסומה, האם $f$ גם חסומה?

**<u>פתרון התרגיל:</u>**
כן, נוכיח זאת: נניח כי $f_n$ מתכנסת במ"ש ל $f$, וכי לכל $n \in \mathbb{N}$ קיים $K_n \in \mathbb{R}$ כך ש $|f_n| \leq K_n$, אז עבור $\epsilon = 1$ קיים $N_0$ כך ש:

$$\forall x \in I, \forall n > N_0 : |f(x) - f_n(x)| < 1$$

בפרט:

$$\forall x \in I, \left|f(x) - f_{N_0+1}(x)\right| < 1$$

כלומר, $\forall x \in I$ מתקיים:

$$-1 < f(x) - f_{N_0+1}(x) < 1 \Rightarrow -1 + f_{N_0} < f(x) < 1 + f_{N_0+1}(x)$$

ולכן:

$$-1 - K_{N_0+1} \leq -1 + f_{N_0+1} < f(x) < 1 + f_{N_0+1}(x) \leq 1 + K_{N_0+1}$$

כלומר, $|f(x)| \leq K_{N_0+1} + 1$, ולכן $f(x)$ חסומה.

## 1.2 התכנסות טורי פונקציות

**תזכורת.**

תהא $f_n(x) : I \to \mathbb{R}$ סדרת פונקציות, טור פונקציות הוא הביטוי:

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$$

נסמן את הסכום החלקי של טור הפונקציות $s_n(x) = \sum_{i=1}^{n} f_i(x)$, הטור מתכנס נקודתית בקטע $I$ אמ"מ מתקיים $s(x) = \lim_{n\to\infty} s_n(x)$.
אם $s_n(x)$ מתכנס ל$s(x)$ במ"ש אז נאמר כי טור הפונקציות $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ מתכנס במידה שווה בקטע $I$.

**תזכורת.**

**(משפט $M$ של ויירשטראס)** תהא סדרת פונקציות $f_n : I \to \mathbb{R}$, אם לכל $n \in \mathbb{N}$ קיים $M_n \geq 0$ כך ש $|f(x)| \leq M_n$ לכל $x \in I$, ומתקיים כי טור המספרים $\sum_{n=1}^{\infty} M_n$ מתכנס, אז $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ מתכנס בהחלט ובמידה שווה ב$I$.

מספר הערות על מבחן $M$ של ויירשטראס:

1. כדאי להשתמש במבחן אין צורך לדעת מהי הפונקציה הגבולית של הטור.
2. מעבר להתכנסות במידה שווה, המבחן גם מראה לנו כי הטור מתכנס בהחלט, כלומר הטור:

$$\sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x)|$$

מתכנס נקודתית ב$I$.

**תרגיל 1.2.1.**

יהא הטור $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{2^n}$, בדקו התכנסות נקודתית ובמ"ש בכל $\mathbb{R}$.

**פתרון התרגיל:**
נקבע $x_0 \in \mathbb{R}$, נשים לב כי הסכום הוא סכום סדרה הנדסית.

**תזכורת.**

סכום סדרה הנדסית $q, q^2, ..., q^n, ...$ עבור $|q| < 1$ הוא:

$$\sum_{n=1}^{N} q^n = \frac{1-q^{N+1}}{1-q} - 1 = \frac{q(1-q^N)}{1-q}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q} - 1$$

כלומר:

$$s_n(x_0) = \sum_{k=1}^{n} \frac{x_0}{2^n} = x_0 \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^n} = x_0 \left( \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}}{1-\frac{1}{2}} - 1 \right) \xrightarrow{n\to\infty} x_0 \left( \frac{1}{1-\frac{1}{2}} - 1 \right) = x_0$$

כלומר הטור מתכנס נקודתית:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{2^n} = x$$

נבדוק התכנסות במ"ש, בעזרת קריטריון הסופרמום, יהא $n \in \mathbb{N}$, אז:

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |s_n(x) - x| = \sup_{x\in\mathbb{R}} \left| \sum_{k=1}^{n} \frac{x}{2^k} - x \right| = \sup_{x\in\mathbb{R}} |x| \underbrace{\left| \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k} - 1 \right|}_{\text{מספר חיובי}} = \infty$$

תרגול עצמי - מצאו מפורשות את ערך הביטוי:

$$\left| \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k} - 1 \right|$$

**תרגיל 1.2.2.**

יהא הטור:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{x^n}{n^2} - \frac{x^{n-1}}{(n+1)^2} \right)$$

בדקו התכנסות נקודתית ובמ"ש ב$[-1, 1]$.

**פתרון התרגיל:**

נשים לב כי:

$$s_1(x) = x - \frac{x^2}{2^2}$$

$$s_2(x) = x \cancel{- \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^2}{2^2}} - \frac{x^3}{3^2}$$

$$s_3(x) = x \cancel{- \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^2}{2^2} - \frac{x^3}{3^2} + \frac{x^3}{3^2}} - \frac{x^4}{4^2}$$

כלומר, הטור הוא טלסקופי. נמשיך ובאופן דומה נקבל כי:

$$S_n(x) = x - \frac{x^{n+1}}{(n+1)^2}$$

נשים לב כי עבור $x_0 \in [-1,1]$ מתקיים:

$$\lim_{n\to\infty} S_n(x_0) = \lim_{n\to\infty} \left( x_0 - \frac{x_0^{n+1}}{(n+1)^2} \right) = x_0$$

כלומר:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{x^n}{n^2} - \frac{x^{n-1}}{(n+1)^2} \right) = x$$

ועבור התכנסות במ"ש:

$$\begin{aligned}
\sup_{x\in[-1,1]} |s_n(x) - x| &= \sup_{x\in[-1,1]} \left| x - \frac{x^{n+1}}{(n+1)^2} - x \right| \\
&= \sup_{x\in[-1,1]} \left| \frac{x^{n+1}}{(n+1)^2} \right| = \sup_{x\in[-1,1]} \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)^2} \\
&= \frac{1}{(n+1)^2} \sup_{x\in[-1,1]} |x|^{n+1} = \frac{1}{(n+1)^2} \xrightarrow{n\to\infty} 0
\end{aligned}$$

כלומר הטור מתכנס במ"ש.

### תרגיל 1.2.3.

האם הטור הבא מתכנס במ"ש ב$\mathbb{R}$?

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{x^2 + \sqrt{n}}$$

**פתרון התרגיל:**

**תזכורת.**

(מבחן לייבניץ לסדרה מתחלפת) תהא סדרת מספרים $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ אי-שלילית: $a_n \geq 0$ לכל $n$.
אם מתקיימים התנאים הבאים:

(א) $a_n$ סדרה מונוטונית יורדת.

(ב) $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

אז טור המספרים $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ מתכנס:

$$\forall n \in \mathbb{N}, \left|\sum_{i=1}^{n}(-1)^n a_n - \sum_{i=1}^{\infty}(-1)^n a_n\right| \leq a_{n+1}$$

נקבע $x_0 \in \mathbb{R}$, ונתבונן בסדרת המספרים $\left\{\frac{1}{x_0^2+\sqrt{n}}\right\}_{n=1}^{\infty}$, ונשים לב שסדרה זאת היא אכן סדרת לייבניץ:

(א) לכל $n$, $\frac{1}{x_0^2+\sqrt{n}} > 0$.

(ב) $\frac{1}{x_0^2+\sqrt{n+1}} > \frac{1}{x_0^2+\sqrt{n}}$, כלומר הסדרה מונוטונית.

(ג) $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{x_0^2+\sqrt{n}} = 0$.

כלומר הטור מתכנס נקודתית. נבדוק התכנסות במ"ש בעזרת קריטריון הסופרמום, כלומר נחקור את הביטוי:

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in\mathbb{R}} |s_n(x) - s(x)| = \lim_{n\to\infty} \sup_{x\in\mathbb{R}} \left|\sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{x^2+\sqrt{n}} - \sum_{i=1}^{n} \frac{(-1)^n}{x^2+\sqrt{n}}\right|$$

אז היות ולכל $x \in \mathbb{R}$ הטור שלנו הוא טור לייבניץ, מתקיים כי:

$$\forall x_0 \in \mathbb{R}, \left|\sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{x_0^2+\sqrt{n}} - \sum_{i=1}^{n} \frac{(-1)^n}{x_0^2+\sqrt{n}}\right| \leq \frac{1}{x_0^2+\sqrt{n+1}}$$

כלומר:

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |s_n(x) - s(x)| \leq \sup_{x\in\mathbb{R}} \left|\frac{1}{x_0^2+\sqrt{n+1}}\right| = \max_{x\in\mathbb{R}} \left|\frac{1}{x_0^2+\sqrt{n+1}}\right| = \frac{1}{\sqrt{n+1}} \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

ולכן:

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in\mathbb{R}} |s_n(x) - s(x)| = 0$$

והטור שלנו מתכנס במ"ש.

**תרגיל 1.2.4.**

האם הטור $\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1+\frac{1}{n^2+x^2}\right)$ מתכנס במ"ש ב-$\mathbb{R}$?
רמז, ראינו בחדו"א 1 כי לכל $t \geq 0$ מתקיים $\ln(1+t) \leq t$.

**פתרון התרגיל:**

כאן נוכל להשתמש ישר במבחן $M$ של ויירשטראס, כי בעזרת הרמז:

$$\ln\left(1+\frac{1}{n^2+x^2}\right) \leq \frac{1}{x^2+n^2} \leq \frac{1}{n^2}$$

כלומר, אם $M_n = \frac{1}{n^2}$, אז לכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים כי לכל $x \in \mathbb{R}$, $\left|\ln\left(1+\frac{1}{n^2+x^2}\right)\right| \leq \frac{1}{n^2}$ והטור $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ מתכנס, ולכן $\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1+\frac{1}{n^2+x^2}\right)$ מתכנס במ"ש בכל $\mathbb{R}$.

# תרגול שני

## 2.1 גזירה ואינטגרציה של סדרות וטורי פונקציות

**תזכורת.**

אם $f_n \twoheadrightarrow f$ בקטע $[a,b]$ כך ש לכל $n \in \mathbb{N}$, $f_n$ אינטגרביליות ב$[a,b]$, אז $f$ אינטגרבילית ב$[a,b]$ ומתקיים:

$$\forall x \in [a,b],\ \lim_{n\to\infty}\int_a^x f_n(t)dt = \int_a^x \lim_{n\to\infty} f_n(t)dt = \int_a^x f(t)dt$$

אם הטור $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ של פונקציות אינטגרביליות מתכנס במ"ש ב$[a,b]$, אז מתקיים:

$$\forall x \in [a,b],\ \int_a^x \left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n(t)\right) dt = \sum_{n=1}^{\infty}\int_a^x f_n(t)dt$$

**תזכורת.**

תהא סדרת פונקציות $(f_i)_{i\in\mathbb{N}}$ גזירות ב$I$, אם מתקיים:

1. קיים $x_0 \in I$ כך ש $\{f_n(x_0)\}_{i=1}^{\infty}$ סדרת מספרים מתכנסת.
2. $\{f_i'\}_{i=1}^{\infty}$ מתכנסת במ"ש לפונקציה $g$.

אז קיימת $f$ כך ש $f_n \twoheadrightarrow f$ ומתקיים $f' = g$.

**תזכורת.**

יהא טור פונקציות $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ גזירות ב$I$, אם מתקיים:

1. קיים $x_0 \in I$ כך ש $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x_0)$ טור מספרים מתכנס.
2. טור הנגזרות $\sum_{n=1}^{\infty} f_n'$ מתכנס במ"ש ב$I$.

אז $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ מתכנס במ"ש ב$I$ ומתקיים:

$$\forall x \in I, \left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x)$$

**תרגיל 2.1.1.**

תהא סדרת הפונקציות $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$:

$$f_n(x) = n^{\alpha} x e^{-nx}$$

עבור $\alpha$ פרמטר.

1. עבור אילו ערכים של $\alpha$ הסדרה מתכנסת במ"ש ב$[0,1]$?
2. עבור אילו ערכי $\alpha$ מתקיים:

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n dx = \int_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n dx$$

**פתרון התרגיל:**

1. ראשית, נשים לב כי לכל $x \in [0,1]$ ולכל $\alpha > 0$ מתקיים:

$$\lim_{n\to\infty} n^{\alpha} x e^{-nx} = 0$$

נבדוק התכנסות במ"ש בעזרת קריטריון הסופרמום, נסמן:

$$M_n = \sup_{x\in I} |n^{\alpha} x e^{-nx}|$$

נשים לב כי $[0,1]$ קטע סגור, ולכן עפ"י משפט ויירשטראס $f_n$ משיגה את חסמיה, נגזור ונשוואה לאפס:

$$\frac{\partial}{\partial x} n^{\alpha} x e^{-nx} = n^{\alpha}(-n) x e^{-nx} + n^{\alpha} e^{-nx} = n^{\alpha} e^{-nx}(1 - nx)$$

כלומר $x = \frac{1}{n} \iff \frac{\partial}{\partial x} f_n(x) = 0$, כלומר $M_n$ יכול לקבל שלושה ערכים:

$$M_n = \max\left\{f_n(0), f_n(1), f_n\left(\frac{1}{n}\right)\right\}$$

נשים לב כי לכל $\alpha \in \mathbb{R}$

$$f_n(0) = 0, f_n(1) = n^\alpha e^{-n} \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

אבל:

$$f_n\left(\frac{1}{n}\right) = n^\alpha \frac{1}{n} e^{-1} = \frac{n^{\alpha-1}}{e}$$

שמתכנס ל$0$ אמ"מ $\alpha < 1$. כלומר סדרת הפונקציות מתכנסת במ"ש אמ"מ $\alpha < 1$.

2. מסעיף א' אנו יודעים כי:

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n dx = \int_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n dx$$

לכל $\alpha < 1$, אבל אנו לא יודעים מה קורה ב $\alpha \geq 1$, אין מנוס מפשוט לחשב:

$$\begin{aligned}
\int_0^1 n^\alpha x e^{-nx} dx &= n^\alpha \int_0^1 \underbrace{x}_{u} \underbrace{e^{-nx}}_{v'} dx = n^\alpha \left( \left[ -\frac{x}{n} e^{-nx} \right] \Big|_{x=0}^{x=1} - \int_0^1 \left( -\frac{1}{n} e^{-nx} \right) dx \right) \\
&= n^\alpha \left( \left[ -\frac{x}{n} e^{-nx} \right] \Big|_{x=0}^{x=1} + \frac{1}{n} \int_0^1 \left( e^{-nx} \right) dx \right) \\
&= n^\alpha \left( \left[ -\frac{x}{n} e^{-nx} \right] \Big|_{x=0}^{x=1} + \frac{1}{n} \left[ -\frac{e^{-nx}}{n} \right] \Big|_{x=0}^{x=1} \right) \\
&= n^\alpha \left( \left[ -\frac{x}{n} e^{-nx} - \frac{e^{-nx}}{n^2} \right] \Big|_{x=0}^{x=1} \right) \\
&= ... = -\frac{n^{\alpha-1}}{e^n} - \frac{n^{\alpha-2}}{e^n} + n^{\alpha-2}
\end{aligned}$$

מצד שני:

$$\int_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n dx = \int_0^1 0 dx = 0$$

אז השאלה היא מתי:

$$\lim_{n\to\infty} -\frac{n^{\alpha-1}}{e^n} - \frac{n^{\alpha-2}}{e^n} + n^{\alpha-2} = 0$$

ועבור 2 המחוברים הראשונים זה קורה לכל $\alpha$, אך עבור השלישי זה קורה אמ"מ $\alpha < 2$.

### תרגיל 2.1.2.

תהא סדרת הפונקציות:

$$f_n : (0,\infty) \to \mathbb{R}, f_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{n} & x \in (0,n) \\ 0 & \text{אחרת} \end{cases}$$

1. הוכיחו כי סדרת הפונקציות הנתונה מתכנסת נקודתית בכל $(0,\infty)$, ומצאו את הפונקציה הגבולית.
2. הוכיחו כי סדרת הפונקציות מתכנסות במ"ש בכל $(0,\infty)$.
3. בדקו האם מתקיים השוויון:

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^\infty f_n(x)dx = \int_0^\infty \lim_{n\to\infty} f_n(x)dx$$

**פתרון התרגיל:**

1. חישוב מהיר יראה לנו כי:

$$\forall x_0 \in (0,\infty), \lim_{n\to\infty} f_n(x_0) = 0$$

כלומר הפונקציה מתכנסת נקודתית ל$f(x) \equiv 0$.

2. עפ"י קריטריון הסופרמום:

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in(0,\infty)} |f_n(x) - f(x)| = \lim_{n\to\infty} \sup_{x\in(0,\infty)} |f_n(x)| = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$$

כלומר סדרת הפונקציות מתכנסת במ"ש ב$(0,\infty)$.

3. נחשב ישירות:

$$\int_0^\infty f_n(x)dx = \int_0^n \frac{1}{n}dx = 1$$

מצד שני:

$$\int_0^\infty f(x)dx = \int_0^\infty 0dx = 0$$

כלומר השוויון לא מתקיים.

### תרגיל 2.1.3.

תהא סדרת הפונקציות $f_n : [0,\infty) \to \mathbb{R}$:

$$f_n(x) = \frac{\arctan(x^2)}{n}$$

1. בדקו התכנסות נקודתית ובמ"ש.

2. הראו כי $f'_n$ לא מתכנסת אפילו נקודתית ל-$f'$.

**פתרון התרגיל:**

1. נשים לב כי $\arctan(t)$ חסומה על ידי $\frac{\pi}{2}$ ולכן ננחש כי הפונקציה הגבולית היא $f \equiv 0$, ובאמת:

$$\sup_{x\in[0,\infty)} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x\in[0,\infty)} |f_n(x)| \le \frac{\pi}{2}\frac{1}{n} \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

כלומר $f_n \twoheadrightarrow 0$.

נשים לב כי התכנסות במ"ש גוררת התכנסות נקודתית, כלומר, בהכרח גם $f \xrightarrow{n\to\infty} 0$.

2. נבדוק ישירות:

$$f'_n(x) = \left(\frac{\arctan\left(x^2\right)}{n}\right)' = \frac{1}{n}\frac{1}{1+(x^n)^2}nx^{n-1} = \frac{x^{n-1}}{1+x^{2n}}$$

מצד שני $f'(x) = 0$, אבל למשל עבור $x_0 = 1$ מתקיים:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_0^{n-1}}{1+x_0^{2n}} = \frac{1}{2} \ne 0$$

## תרגיל 2.1.4.

יהא $R > 1$, וטור הפונקציות $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{x+n}$, בדקו התכנסות במ"ש בקטע $I = [1, R]$.

**פתרון התרגיל:**

נשים לב כי לכל $x_0 \in I$ הטור $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{x_0+n}$ לייבניץ (חיוביות, מונוטוניות והתכנסות לאפס) כלומר הטור מתכנס נקודתית ב-$I$.

לגבי התכנסות במ"ש, קצת קשה לבדוק - כי הטור לא מתכנסות בהחלט (מדוע?), וכי הוא מאוד מזכיר טור הרמוני, שקשה לעבוד איתו. אז נעשה את הטריק הבא, בו נבדוק את התכנסות במ"ש של הטור בעזרת התכנסות במ"ש של טור הנגזרות.

1. נסמן $u_n(x) = \frac{(-1)^n}{x+n}$.

2. נגזור:

$$u'_n(x) = \frac{(-1)\cdot(-1)^n}{(x+n)^2}$$

3. נפעיל את משפט $M$ של ויירשטראס על הטור $\sum_{n=1}^{\infty} u'_n(x)$, בעזרת:

$$|u'_n(x)| = \frac{1}{(x+n)^2} \le \underbrace{\frac{1}{n^2}}_{M_n}$$

וכמובן כי $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ מתכנס.

אז לפי משפט, קיבלנו כי הטור המקורי מתכנס.
תרגול עצמי - פתרו את תרגיל זה בדומה לתרגיל 1.2.3.

## 2.2 טורי חזקות

**תזכורת.**

לכל טור חזקות $\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n$ (נשים לב לאינדקס $i=0$) קיים רדיוס התכנסות $0\le R<\infty$, או $R=\infty$ כך ש:

1. (א) אם $|x-x_0|<R$ אז הטור מתכנס נקודתית ב-$x$.
   (ב) אם $|x-x_0|>R$ אז הטור מתבדר ב-$x$.
   (ג) אם $|x-x_0|=R$ אז הטור יכול להתכנס או להתבדר, תלוי בטור.
2. לכל קטע סגור $[\alpha,\beta]$ בתחום ההתכנסות הטור מתכנס במ"ש.

**תזכורת.**

עבור טור חזקות $\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n$ מתקיים (קושי הדמור):

$$R=\frac{1}{\limsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}}$$

הערה, אם מתקיימים:

1.
$$\limsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=0\implies R=\infty$$

2.
$$\limsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=\infty\implies R=0$$

אם אם קיימים אחד הגבולות הבאים:

1.
$$L=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}}$$

2.
$$L=\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n+1}}$$

(יכולים גם להיות $\infty$) אז הם שווים ל-$R$

**תרגיל 2.2.1.**

מהו רדיוס ההתכנסות של הטור:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n}$$

**פתרון התרגיל:**

נשים לב כי עבור $x=-1$ נקבל טור מתכנס (הטור ההרמוני המתחלף), ועבור $x=1$ נקבל טור מתבדר (הטור ההרמוני), ומשום שהטור הוא סביב $x=0$ נקבל כי רדיוס ההתכנסות הוא $R=1$, ותחום ההתכנסות הוא $[-1,1)$.

**תרגיל 2.2.2.**

מצאו את תחום ההתכנסות של טור החזקות:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{2^n n^2}$$

**פתרון התרגיל:**

ראשית, נמצא את רדיוס ההתכנסות, נעשה זאת ב2 דרכים:

1.

$$R=_{\star}\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{1}{2^n n^2}}{\frac{1}{2^{n+1}(n+1)^2}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{2^{n+1}(n+1)^2}{2^n n^2}\right|=\lim_{n\to\infty}2\left|\frac{(n+1)^2}{n^2}\right|=2$$

2.

$$R=_{\star}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{\left|\frac{1}{2^n n^2}\right|}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)\sqrt[n]{\left|\frac{1}{n^2}\right|}}=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{\sqrt[n]{\left|\frac{1}{n^2}\right|}}=2$$

($\star$ - בהנחה שהגבול קיים.)

כלומר, $R=2$, נבדוק מה קורה בקצוות:

$$\left.\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{2^n n^2}\right|_{x=2}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{2^n n^2}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n^2}<\infty$$

$$\left.\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{2^n n^2}\right|_{x=-2}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-2)^n}{2^n n^2}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}<\infty$$

כלומר הטור מתכנס ב $[-2,2]$.

### תרגיל 2.2.3.

בדקו התכנסות של הטור:

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n n\left(\frac{x}{2}-3\right)^n$$

**פתרון התרגיל:**

נציב $t=\frac{x}{2}-3$, ונקבל את הטור:

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n n t^n$$

נבדוק עבור רדיוס התכנסות:

$$R=_{\star}=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{n}{n+1}\right|=1$$

($\star$ - בהנחה שהגבול קיים.)

כלומר הטור מתכנס כאשר $|t|<1$, נשים לב כי:

$$|t|<1 \iff \left|\frac{x}{2}-3\right|<1 \iff -1<\frac{x}{2}-3<1 \iff 2<\frac{x}{2}<4 \iff 4<x<8$$

נבדוק קצוות, עבור $x=4$:

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n n\left(\frac{x}{2}-3\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n n$$

שאינו מתכנס, ועבור $x=8$:

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n n\left(\frac{x}{2}-3\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty}n$$

שגם לא מתכנס, כלומר הטור מתכנס ב$(4,8)$.

### תרגיל 2.2.4.

מצאו את רדיוס ההתכנסות של הטור:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^n+(-2)^n}{n}x^n$$

**פתרון התרגיל:**

נשים לב כי אפשר לפרק את הטור לסכום של 2 טורים:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^n+(-2)^n}{n}x^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^n}{n}x^n+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-2)^n}{n}x^n$$

יש פה משחק מסוכן, כי התכנסות של 2 טורים לא בהכרך אומרת הכל על התכנסות של סכומן (הבעיה תהיה דווקא בתחום התבדרות הטורים) בכל זאת, נבדוק התכנסות:

1. עבור הטור $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^n}{n}x^n$ נשים לב כי:

$$R =_{\star} \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{\left|\frac{3^n}{n}\right|}} = \frac{1}{3}$$

כלומר הטור מתכנס ב $|x| < \frac{1}{3}$.

2. הטור $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-2)^n}{n}x^n$ מתכנס ב:

$$R =_{\star} \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{\left|\frac{(-2)^n}{n}\right|}} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{\left|\frac{2^n}{n}\right|}} = \frac{1}{2}$$

כלומר הטור מתכנס כאשר $|x| < \frac{1}{2}$.

($\star$ - בהנחה שהגבול קיים.)
נשים לב כי הטור הנתון מתכנס כאשר $|x| < \frac{1}{3}$ ומצד שני, מתבדר עבור $x \in \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right)$, כי שם טור אחד מתכנס וטור שני מתבדר, כלומר כל הטור מתבדר (סכום איבר-איבר של טור מתכנס ומתבדר הוא מתבדר) כלומר, רדיוס ההתכנסות חייב להיות $\frac{1}{3}$.

# *תרגול שלישי*

## 3.1 אינטגרציה וגזירה של טורי חזקות

תזכורת.

יהא טור חזקות $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$ עם רדיוס התכנסות $R>0$, נסמן ב$I$ את תחום ההתכנסות ואת $s(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$ להיות פונקציית סכום הטור, אז:

1. בתחום ההתכנסות, פונקציית סכום הטור רציפה.
2. $$\forall x\in I, \int_{x_0}^{x}\sum_{n=0}^{\infty} a_n (t-x_0)^n dt=\sum_{n=0}^{\infty}\int_{x_0}^{x} a_n (t-x_0)^n dt=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n+1}a_n(x-x_0)^{n+1}$$

   וטור האינטגרלים $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n+1}a_n(x-x_0)^{n+1}$ בעל רדיוס התכנסות $R$ ואם הטור המקורי מתכנס ב$x=x_0\pm R$, אז גם טור האינטגרלים מתכנס שם, ונוסחאת האינטגרציה איבר-איבר נכונה גם בנקודות אילו.
3. לכל $x\in I$, $s(x)$ גזירה ומתקיים:

   $$s'(x)=\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n\right)'=\sum_{n=0}^{\infty}\left(a_n(x-x_0)^n\right)'=\sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x-x_0)^{n-1}$$

   כאשר טור הנגזרות בעל רדיוס התכנסות $R$, ואם הטור המקורי מתבדר ב$x=x_0\pm R$ אז גם טור הנגזרות מתבדר שם.

תרגיל 3.1.1.

פתחו את $f(x)=\text{arctan}(x)$ לטור חזקות סביב $x=0$.

**פתרון התרגיל:**

נשים לב כי $\frac{1}{1-(-x^2)}=\frac{1}{1+x^2}=f'(x)$, שאת הטור הזה אנחנו יודעים לפתח לטור חזקות סביב $x_0=0$, עבור $\left|-x^2\right|<1$, אז נקבל, שעבור $x\in(-1,1)$:

$$f'(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(-x^2)^n=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}$$

אז עבור $x \in (-1,1)$:

$$f(x) = f(x) - \underbrace{f(0)}_{=0} = \int_0^x f'(t)dt = \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n t^{2n}dt = \sum_{n=0}^{\infty}\int_0^x (-1)^n t^{2n}dt$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \int_0^x t^{2n}dt = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

$$\forall x \in (-1,1), \text{arctan}(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

**הערה.**

עבור $x$ שלילי יש פה נקודה עדינה:

$$\int_0^x f'(x)dx = \begin{cases} \int_0^x f'(x)dx = f(x) - f(0) & x \geq 0 \\ -\int_x^0 f'(x) = -(f(0) - f(x)) = f(x) - f(0) & x < 0 \end{cases} = f(x) - f(0)$$

**תרגיל 3.1.2.**

מצאו טור חזקות מתאים עבור:

$$f(x) = \frac{x}{1+x-2x^2}$$

סביב $x = 0$.

**פתרון התרגיל:**

ראשית, נפרק לשברים חלקיים (חדו"א 1):

$$\frac{x}{1+x-2x^2} =_\star \frac{1}{3}\left[\frac{1}{1-x} - \frac{1}{1+2x}\right]$$

ואז נפרק לסכום טור הנדסי, עבור $x \in (-1,1)$ מתקיים:

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

לגבי הטור השני, נציב $t = -2x$, ונקבל:

$$\frac{1}{1+2x} = \frac{1}{1-t} = \sum_{i=0}^{\infty} t^n = \sum_{n=0}^{\infty}(-2x)^n = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(2x)^n$$

עבור $-1 < t < 1$ כלומר $x \in \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

אז עבור $x \in \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \cap (-1,1) = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ מתקיים:

$$f(x) = \frac{1}{3}\left[\sum_{n=0}^{\infty} x^n - \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(2x)^n\right] = \frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\left(x^n - (-1)^n(2x)^n\right) = \frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty} x^n\left(1-(-2)^n\right)$$

### תרגיל 3.1.3.

מצאו ביטוי סגור לפונקציה:

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n$$

עבור $x\in(-1,1)$.

**פתרון התרגיל:**

ראשית, נבדוק התכנסות סביב $x=0$, ואכן:

$$R=_{\text{אם הגבול קיים}}\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n+2}=1$$

אז עבור $x\in(-1,1)$, נוכל לבצע אינטגרציה איבר-איבר:

$$\int_0^x f(t)dt=\int_0^x\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)t^n dt=\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^x(n+1)x^n dt=\sum_{n=0}^{\infty}x^{n+1}=x\sum_{n=0}^{\infty}x^n=\frac{x}{1-x}$$

אז:

$$\forall x\in(-1,1),f(x)=\left(\int_0^x f(t)dt\right)'=\left(\frac{x}{1-x}\right)'=\frac{(1-x)-(-1)x}{(1-x)^2}=\frac{1}{(1-x)^2}$$

### תרגיל 3.1.4.

1. מצאו ביטוי סגור לפונקצית סכום הטור $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}nx^n$.
2. חשבו את סכום הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{e^n}$.
3. האם הטור הבא מתכנס במ"ש בכל $\mathbb{R}$?

$$\sum_{n=1}^{\infty}n2^{-\frac{n^2+x^2}{n}}\sin(nx)$$

**פתרון התרגיל:**

1. ראשית, נבדוק רדיוס התכנסות:

$$R=_{\text{אם הגבול קיים}}\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=1$$

אז עבור $x \in (-1,1)$, מתקיים $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$.

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} nx^n = x\left(\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}\right) = x\sum_{n=1}^{\infty}(x^n)' = x\left(\sum_{n=1}^{\infty} x^n\right)' = x\left(\frac{1}{1-x}\right)' = \frac{x}{(1-x)^2}$$

2. נשים לב כי:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{e^n} = f\left(\frac{1}{e}\right) =_\star \frac{1}{e(1-\frac{1}{e})^2}$$

כאשר $=_\star$ מוצדק כי הרי $\frac{1}{e} < 1$, כלומר $x = \frac{1}{e}$ נמצא בתחום ההתכנסות של הטור.

3. ננסה להפעיל את מבחן $M$ של ווירשטראס, ואכן, תהא $n \in \mathbb{N}$ אז לכל $x \in \mathbb{R}$:

$$\left|n2^{-\frac{n^2+x^2}{n}}\sin(nx)\right| \le \left|n2^{-\frac{n^2+x^2}{n}}\right| \le \left|n2^{-\frac{n^2}{n}}\right| = |n2^{-n}| := M_n$$

נזכר בסעיף הקודם שאומר לנו כי יודעים כי:

$$\sum_{n=1}^{\infty} M_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n} = f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\frac{1}{2}}{\left(1-\frac{1}{2}\right)^2} = 2 < \infty$$

כלומר הטור שלנו מתכנס במ"ש בכל $\mathbb{R}$.

## 3.2 טורי טיילור

נזכר מחדו"א א' שאם יש לנו פונקציה $f(x)$ גזירה בסביבה של נקודה $x_0$, אז הישר שמקרב אותה הכי טוב הוא ב$x_0$ הוא:

$$T_1(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0)$$

ובהנחה שהיא גזירה פעמיים בסביבת הנקודה $x_0$, אז הפרבולה שמקרבת אותה הכי טוב היא:

$$T_2(x) = f(x_0) + +f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x-x_0)^2$$

וכן האלה, זה מוביל אותנו להתבונן במה שנקרא טור טיילור:

$$T(x) = \lim_{k\to\infty} T_k(x) = \lim_{k\to\infty}\sum_{n=0}^{k} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

שאפשר לחשוב עליו בתור הפונקציה הגבולית של הקירוב הפולינומיאלי הטוב ביותר.

נשאלות 2 שאלות טבעיות:

1. מתי $T(x) = f(x)$?
2. האם מקדמים אליו יחידים, כלומר, אם:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$$

אז האם בהכרח $a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$?

נתחיל בשאלה הראשונה.

1. נזכר במשפט מחדו"א 1, תהא $f$ גזירה לפחות $n+1$ פעמים בסביבה של $x_0$, אז לכל $x$ בסביבה זו מתקיים:

$$f(x) = T_n(x) + R_n(x)$$

כאשר:

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$$

עבור $c$ נקודה בין $x$ ו- $x_0$, מה שמוביל אותנו למסקנה הבאה:
תהא $f(x)$ פונקציה גזירה אינסוף פעמים בסביבה של $x_0$, אז בסביבה זו:

$$\lim_{n\to\infty} T_n(x) = f(x) \iff \lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$$

נראה כמה דוגמאות:

(א) עבור $f(x) = e^x$, אז עבור $x_0 = 0$, ולכל $r > 0$, $f(x)$ ניתנת לפיתוח לטור טיילור, משום ש:

$$\forall x \in (-r, r), R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}x^{n+1} = \frac{e^c}{(n+1)!}x^{n+1} \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

כלומר $e^x$ שווה לטור טיילור שלה ב $(-r, r)$ לכל $r > 0$, כלומר בכל $\mathbb{R}$.

(ב) עבור $f(x) = \sin(x)$, סביב $x_0 = 0$ מתקיים:

$$\forall x \in (-r, r), |R_n(x)| = \left|\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}x^{n+1}\right| \leq \left|\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\right| \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

ואותו דבר אפשר לעשות עבור $f(x) = \cos(x)$, כלומר $\sin(x), \cos(x)$ שוות לטור טיילור שלהן בכל $(-r, r)$, כלומר בכל $\mathbb{R}$.

נשים לב לדפוס די ברור שקורה פה, שיוביל אותנו למשפט הבא:
אם $f(x)$ גזירה אינסוף פעמים, ב$(x_0 - r, x_0 + r)$, וקיים $M > 0$ כך ש:

$$\forall x \in (x_0 - r, x_0 + r), \forall n \in \mathbb{N}, \left|f^{(n)}(x)\right| < M$$

אז $\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$, ובפרט, ב$(x_0 - r, x_0 + r)$, מתקיים כי $f(x) = T(x)$, כלומר רדיוס ההתכנסות של טור טיילור $R$ מקיים $R \geq r$.
הוכחת המשפט במלואו - תרגיל.

2. נראה שפה התשובה היא כן, כלומר אם בקטע $I$ מתקיים $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ אז בהכרח:

$$a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$$

נראה את זה עבור $x_0 = 0$, ואכן, אם בקטע $I$:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + ...$$

כלומר:

$$f(0) = a_0$$

משום שאנו יודעים שבקטע $I$ טור החזקות שלנו מתכנס במ"ש, אז אפשר לגזור איבר-איבר ולקבל:

$$f'(x) = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + ...$$

כלומר אם נציב $x = 0$ נקבל:

$$a_1 = f'(0) = \frac{f'(0)}{1!}$$

ראינו בהרצאה כי גם הטור של $f'$ מתכנס במ"ש ב$I$, אז אפשר לגזור שוב!

$$f''(x) = 2a_2 + 3 \cdot 2a_3x + 4 \cdot 3a_4$$

אז שוב:

$$f''(0) = 2a_2 \implies a_2 = \frac{f''(0)}{2} = \frac{f''(0)}{2!} =$$

ואם נמשיך כל אז באמת נראה שלכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים:

$$a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$$

כרצוי.

## 3.3 תרגול טורי טיילור

תרגיל 3.3.1.

אז אנחנו יודעים כי $\sin(x), \cos(x), e^x$ ניתנות לפיתוח לטור חזקות בכל $\mathbb{R}$, בואו נחשב את הטור הזה, סביב $x_0 = 0$, וכבונוס - למרות שמספרים מרוכבים לא בחומר הקורס, נוכיח את נוסחאת אוילר:

$$e^{ix} = \cos(x) + i\sin(x)$$

**פתרון התרגיל:**

אז נתחיל עם $f(x) = e^x$, נשים לב כי:

$$\forall n \in \mathbb{N}, f^{(n)} = e^x \implies f^{(n)}(0) = 1$$

כלומר מקדמי טיילור שלנו הם:

$$a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!} = \frac{1}{n!}$$

כלומר:

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

עבור $\cos(x)$, נשים לב כי:

$$\begin{aligned}
&\cos(0) = 1 \\
&(\cos(x))'\Big|_{x=0} = -\sin(0) = 0 \\
&(\cos(x))''\Big|_{x=0} = -\cos(0) = -1 \\
&(\cos(x))'''\Big|_{x=0} = \sin(0) = 0
\end{aligned}$$

ומעבר לזה, נשים לב כי:

$$(\cos(x))^{(4)} = \cos(x)$$

כלומר:

$$(\cos(x))^{(n)}\Big|_{x=0} = \begin{cases} 1 & n = 4m \\ 0 & n = 4m+1 \\ -1 & n = 4m+2 \\ 0 & n = 4m+3 \end{cases}$$

אז טור הטיילור של $\cos(x)$ סביב $x = 0$ הוא:

$$\cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\cos(x))^{(n)}\Big|_{x=0}}{n!} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\cos(x))^{(2n)}\Big|_{x=0}}{(2n)!} x^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}$$

כלומר:

$$\begin{aligned}\sin(x) &= -\left(\cos(x)\right)' = -\frac{\partial}{\partial x}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty}-\frac{\partial}{\partial x}\frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}2n}{(2n)!}x^{2n-1} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)!}x^{2n-1} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(2n+1)!}x^{2n+1}\end{aligned}$$

אז נחשב את:

$$\begin{aligned}e^{ix} &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(ix)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(ix)^{2n}}{(2n)!} + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(ix)^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{i^{2n}x^{2n}}{(2n)!} + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{i^{2n+1}x^{2n+1}}{(2n+1)!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(i^2)^n x^{2n}}{(2n)!} + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{i\left(i^2\right)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(i^2)^n x^{2n}}{(2n)!} + i\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(i^2\right)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} + i\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(-1\right)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} = \cos(x) + i\sin(x)\end{aligned}$$

### תרגיל 3.3.2.

תהא $f(x) = \arctan(x)$, חשבו את $f^{(2023)}(0)$, (ניתן להניח כי $f$ גזירה אינסוף פעמים).

**פתרון התרגיל:**

ראינו כי בשעה הקודמת כי:

$$\arctan(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

עבור $x \in (-1,1)$, כלומר, מקדמי טור החזקות של $\arctan(x)$ הם:

$$a_n = \begin{cases} 0 & \text{זוגי } n \\ (-1)^{\frac{n-1}{2}}\frac{1}{n} & \text{אי-זוגי } n \end{cases}$$

מיחידות מקדמי טור טיילור, מתקיים כי בהכרח:

$$\frac{f^{(n)}(0)}{n!} = a_n$$

כלומר:

$$\frac{f^{(2023)}(0)}{2023!} = (-1)^{\frac{2023-1}{2}}\frac{1}{2023} \implies f^{(2023)}(0) = (-1)^{1011}\frac{2023!}{2023} = -\left(2022!\right)$$

### תרגיל 3.3.3.

חשבו את טור טיילור של:

$$f(x) = \sin^2(x)$$

**פתרון התרגיל:**

נשתמש בזהות הטריגונומטרית:

$$\sin^2(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(2x)$$

אז אפשר פשוט להציב בטור טיילור של $\cos(x)$:

$$\sin^2(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}(2x)^{2n}\right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\left(1 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}(2x)^{2n}\right)$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2}\frac{(-1)^{n+1}}{(2n)!}(2x)^{2n} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(2n)!}2^{2n-1}x^{2n}$$

### תרגיל 3.3.4.

תהא $f(x)$ פונקציה עם טור חזקות סביב $x_0 = 0$, הוכיחו כי אם $f$ זוגית, אז כל מקדמי טיילור האי-זוגיים מתאפסים, ואם $f$ אי-זוגית אז המקדמים הזוגיים מתאפסים.
הסיקו כי, לפחות עבור פונקציה עם טור חזקות, נגזרת של פונקציה זוגית היא אי-זוגית, ונגזרת של פונקציה אי-זוגית היא זוגית.

**פתרון התרגיל:**

ראשית נראה עבור $f$ זוגית, נניח כי $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, ב-$I$, אז היות ו-$f$ זוגית מתקיים:

$$f(x) - f(-x) = 0$$

אבל נשים לב כי:

$$f(-x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(-x)^n = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n a_n x^n$$

כלומר:

$$0 = f(x) - f(-x) = \sum_{n=0}^{\infty}(a_n - (-1)^n a_n)x^n = \sum_{n=0}^{\infty} 2a_{2n+1}x^{2n+1} = 2a_1x + 2a_3x^3 + 2a_5x^5 + 2a_7x^7 \ldots.$$

אבל, כמובן ש-$g(x) = 0$ היא פונקציה עם הטור חזקות $c_n = 0$, $0 = \sum_{i=0}^{\infty} c_n x^n$, אז מיחידות מקמי טיילור אנו מקבלים:

$$\forall n \in \mathbb{N}, 2a_{2n+1} = c_{2n+1} = 0 \implies a_{2n+1} = 0$$

נעשה דבר דומה עבור $f$ אי-זוגית, כאשר מתקיים:

$$f(x) + f(-x) = 0$$

כלומר:

$$0 = f(x) + f(-x) = \sum_{n=0}^{\infty}(a_n + (-1)^n a_n)x^n = \sum_{n=0}^{\infty} 2a_{2n}a^{2n}$$

אז שוב, מיחידות מקדמי טיילור של $g(x) = 0$ נקבל:

$$\forall n \in \mathbb{N}, a_{2n} = 0$$

נשים לב כי אם $f$ זוגית בעלת טור חזקות, אז:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{2n}x^{2n} \implies f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty}(2n)a_{2n}x^{2n-1}$$

היא אי-זוגית (עפ"י הסיווג שהרגע הוכחנו), וכמובן שההוכחה עבור $f$ אי-זוגית זהה לגמרי.

### תרגיל 3.3.5.

מצאו את כל הפונקציות בעלות טור חזקות המקיימות את המשוואה הדיפרנציאלית:

$$y = y'$$

**<u>פתרון התרגיל:</u>**
נניח כי $f(x)$ בעלת טור חזקות עם רדיוס התכנסות $R > 0$, אז לכל $x$ בתחום ההתכנסות, אפשר לתרגם את המד"ר לשוויון:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$$

נבצע הזזת אינדקס לטור הימני:

$$\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} = \sum_{k=0}^{\infty}(k+1)a_{k+1}x^k = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)a_{n+1}x^n$$

כלומר אם נציב במד"ר נקבל:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)a_{n+1}x^n \implies \sum_{n=0}^{\infty}(a_n - (n+1)a_{n+1})x^n = 0$$

אז מיחידות מקדמי הפונקציה $g(x) = 0$, נקבל:

$$\forall n \in \mathbb{N}, a_n - (n+1)a_{n+1} = 0 \implies a_{n+1} = \frac{a_n}{n+1}$$

כלומר, אם נסמן $a_0 = c$, נקבל כי:

$$\begin{aligned} &a_1 = \tfrac{a_0}{1} = c \\ &a_2 = \tfrac{a_1}{2} = \tfrac{c}{2} \\ &a_3 = \tfrac{a_2}{3} = \tfrac{c}{2\cdot 3} \\ &\vdots \\ &a_n = \tfrac{c}{n!} \end{aligned}$$

כלומר, $f(x)$ היא בהכרח מהצורה:

$$f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{c}{n!} x^n = c \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n = ce^x$$

מצד שני, אם $f(x) = ce^x$, אז אפשר לבדוק ישירות כי:

$$f'(x) = f(x)$$

# תרגול רביעי

## 4.1 פונקציות במספר משתנים

**תזכורת.**

יהא $D\subset\mathbb{R}^n$, פונקציה $f:D\to\mathbb{R}^m$ נקראת פונקציה ב$n$ משתנים.
לפעמים נסמן את $f$ ע"י $m$ פונקציות:

$$f(x_1,...,x_n)=(f_1(x_1,...,x_n),...,f_m(x_1,...,x_n))$$

כאשר:

$$f_i:D\to\mathbb{R}$$

נסמן:

$$\text{Im}(f)=\{f(x_1,...,x_n)|(x_1,...,x_n)\in D\}\subset\mathbb{R}^m$$

אם $m=1$ נקרא ל$f$ <u>פונקציה סקלרית</u> ואם $m>1$ נקרא לה <u>פונקציה וקטורית</u>.
נקרא לתחום הגדול ביותר בו מוגדרת הפונקציה <u>תחום ההגדרה של הפונקציה</u>.
גרף של פונקציה היא הקבוצה הבאה:

$$\Gamma_f=\{(x_1,...,x_n,y_1,...,y_m)|(y_1,...,y_m)=f(x_1,...,x_n)\}\subset\mathbb{R}^{n+m}$$

שזו קבוצה שקצת קשה לצייר עבור מימדים גבוהים, אז נחפש דרך אחרת להציג פונקציה.
תהא $f:D\to\mathbb{R}$ פונקציה סקלרית, לכל $c\in\mathbb{R}$ הקבוצה הבאה:

$$\{(x_1,...,x_m)|f(x_1,...,x_m)=c\}\subset D$$

נקראת <u>קו הגובה</u> של $f$ המתאימים לגובה $c$ במקרה בו $m=2$, ואז זו קבוצה ב$\mathbb{R}^2$, או <u>משטח רמה</u> אם $m=3$, ואז זו קבוצה ב$\mathbb{R}^3$.

**תזכורת.**

1. כדור פתוח ברדיוס $R>0$ סביב נקודה $p$ הוא:

$$B_R(p):=\{x\in\mathbb{R}^n|d(x,p)<R\}$$

2. כדור סגור (או דיסק) ברדיוס $R>0$ סביב נקודה $p$ הוא:

$$D_R(p):=\{x\in\mathbb{R}^n|d(x,p)\leq R\}$$

3. נקודה $p \in A \subset \mathbb{R}^n$ נקראת נקודת פנים של $A$ אם קיים $\epsilon > 0$ כך שכדור ברדיוס $\epsilon$ ממורכז בנקודה $p$ מוכל ב$A$.
4. קבוצה $A \subset \mathbb{R}^n$ נקראת פתוחה אם כל נקודה בה היא נקודת פנים.
5. נקודה $p \in \mathbb{R}^n$ נקראת נקודת שפה של $A \subset \mathbb{R}^n$ אם לכל $\epsilon > 0$ הכדור ברדיוס $\epsilon$ סביב $p$ מכיל גם נקודה ב$A$ וגם נקודה לא ב$A$.
6. אוסף נקודת השפה של $A \subset \mathbb{R}^n$ נקרא השפה של $A$ ומסומן $\partial A$.
7. קבוצה $A \subset \mathbb{R}^n$ נקראת סגורה $\partial A \subset A$.
8. קבוצה $A \subset \mathbb{R}^n$ נקראת חסומה אם קיים $R > 0$ כך ש $A$ מוכלת בכדור ברדיוס $R$ סביב $0$.

### תרגיל 4.1.1.

הוכיחו כי קבוצה $A \subset \mathbb{R}^n$ היא פתוחה אמ"מ היא לא מכילה אף נקודת שפה.

**פתרון התרגיל:**

$$\Leftarrow$$

אם $A$ פתוחה, אז לכל נקודה $x_0 \in A$ קיים $\epsilon_{x_0} > 0$ כך שכדור סביב $x_0$ ברדיוס $\epsilon_{x_0}$ מוכל ב$A$, כלומר $x_0$ לא יכולה להיות נקודת שפה, כלומר $A$ לא מכילה אף נקודת שפה.

$$\Longrightarrow$$

אם $A$ מכילה נקודת שפה $x_0 \in \partial A$, אז לכל $\epsilon > 0$ הכדור ברדיוס $\epsilon$ סביב $x_0$ מכיל נקודה לא ב$A$, ולכן לא מוכל ב$A$, כלומר $x_0$ איננה נקודת פנים.

### תרגיל 4.1.2.

מצאו וציירו את תחום ההגדרה של הפונקציות הבאות, בדקו האם תחומים אילו פתוחים, סגורים וחסומים.

1.
$$f(x,y) = \sqrt{(x^2+y^2-16)(x^2+y^2-9)}$$

2.
$$g(x,y) = \arcsin(2x-y)$$

3.
$$h(x,y) = \ln\left(x^2-y^2-4\right)$$

4.
$$s(x,y) = \sqrt{y|\ln(x)|}$$

**פתרון התרגיל:**

1. נשים לב שעל מנת ש-$f$ תהיה מוגדרת, הביטוי תחת השורש צריך להיות חיובי, ביטוי זה חיובי אמ"מ מתקיימת אחת מ-2 האפשרויות הבאות:

(א) $(x^2+y^2-16)\geq 0$ **וגם** $(x^2+y^2-9)\geq 0$, כלומר:

$$x^2+y^2\geq 16 \text{ וגם } x^2+y^2\geq 9 \implies x^2+y^2\geq 16$$

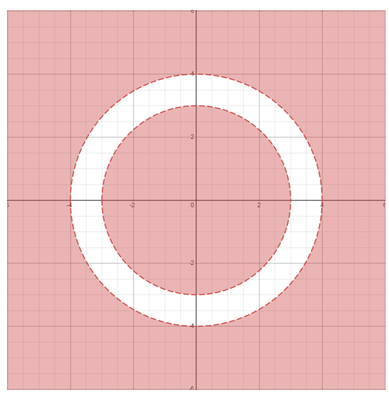
(ב) $(x^2+y^2-16)\leq 0$ **וגם** $(x^2+y^2-9)\leq 0$, כלומר:

$$x^2+y^2\leq 16 \text{ וגם } x^2+y^2\leq 9 \implies x^2+y^2\leq 9$$

כלומר, תחום הגדרת $f$ הוא:

$$x^2+y^2\geq 16 \text{ או } x^2+y^2\leq 9$$

אם נשרטט את התחום הזה נקבל:



נשים לב כי שפת התחום הינה:

$$x^2+y^2=16 \text{ או } x^2+y^2=9$$

שמוכלת בקבוצה, כלומר תחום ההגדרה הינו סגור. הנקודה $(4,0)$ איננה נקודת פנים, ולכן הקבוצה לא פתוחה וברור כי הקבוצה אינה חסומה.

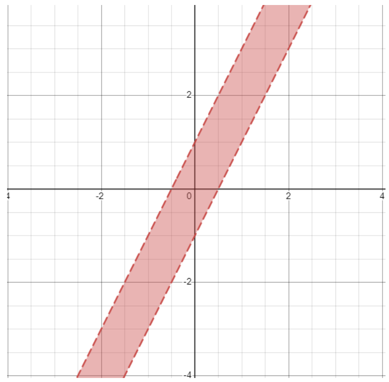
2. $\arcsin(t)$ מוגדר רק עבור $-1\leq t\leq 1$, כלומר תחום ההגדרה שלנו הוא:

$$-1\leq 2x-y\leq 1 \iff -1\leq 2x-y \text{ וגם } 2x-y\leq 1$$

כלומר:

$$y\leq 2x+1 \text{ וגם } y\geq 2x-1$$

וזהו התחום הבא:



נשים לב כי שפת התחום הינה:

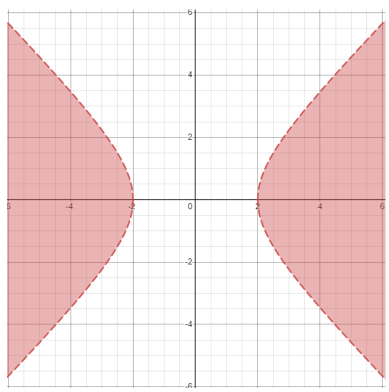
$$2x - y = 1 \text{ או } 2x - y = -1$$

שמוכלת בקבוצה, כלומר תחום ההגדרה הוא סגור ולא פתוח, וברור שהקבוצה אינה חסומה.

3. תחום ההגדרה של $\ln(t)$ הוא $t > 0$ ולכן תחום ההגדרה הינו:

$$x^2 - y^2 - 4 > 0 \implies x^2 - y^2 > 4$$

שזהו התחום הבא:



הוא לא מכיל את השפה שלו, ולכן הוא פתוח אך לא סגור, וברור שהוא איננו חסום.

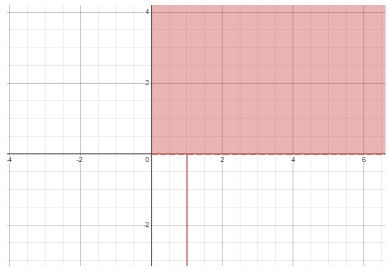
4. תחום ההגדרה של $s$ הוא:

$$y|\ln(x)| \geq 0 \text{ וגם } x > 0$$

שהוא:

$$(y \geq 0 \text{ או } x = 1) \text{ וגם } x > 0$$

שהוא:



הוא איננו חסום, $(0,3)$ נקודת שפה שאיננה בתחום, ולכן אינו סגור, אבל גם $(3,0)$ לא נקודת פנים, ולכן הקבוצה גם לא פתוחה.

## 4.2 גיאומטריה במרחב

**תזכורת.**

נזכר במשוואות ריבועיות במישור $\mathbb{R}^2$, כלומר משוואת מהצורה:

$$ax^2 + by^2 + cxy + dx + ey = f$$

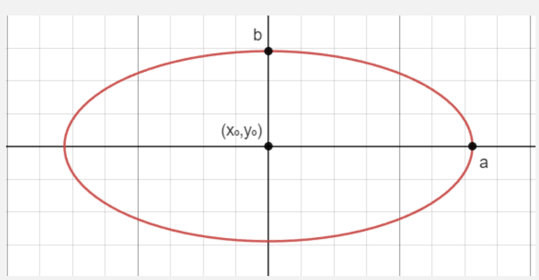
אז 4 משפחות ידועות של משוואת אילו הן:

1. מעגל סביב $(x_0, y_0)$ ברדיוס $\mathbb{R}^2$ מתואר על ידי המשוואה:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$$

2. אליפסה סביב $(x_0, y_0)$ עם "רדיס" $a$ בכיוון ציר ה$x$ ו$b$ בכיוון ציר ה$y$ מתואר על ידי:

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1$$

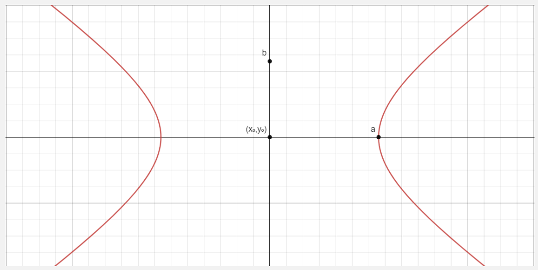



3. פרבולה עם ממורכזת ב $(x_0, y_0)$ ומשתנה $c$:

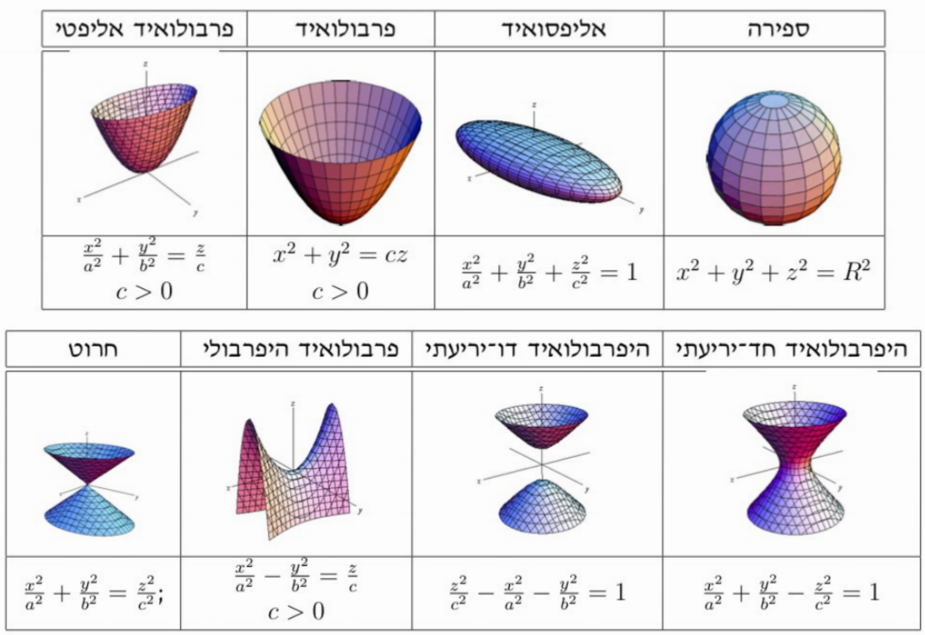
$$y - y_0 = c(x - x_0)^2$$

4. היפרבולה סביב $(x_0, y_0)$, עם ציר $a$, ופה קצת קשה להסביר את התפקיד של $b$, אבל הוא מהווה מדד לכמה ההיפרבולה "מעוכה":

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2} - \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1$$




אותו משחק נוכל לעשות ב־$\mathbb{R}^3$, ולקבל מספר משפחות:



| ספירה | אליפסואיד | פרבולואיד | פרבולואיד אליפטי |
|---|---|---|---|
| $x^2+y^2+z^2=R^2$ | $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ | $x^2+y^2=cz$<br>$c>0$ | $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{z}{c}$<br>$c>0$ |

| היפרבולואיד חד־יריעתי | היפרבולואיד דו־יריעתי | פרבולואיד היפרבולי | חרוט |
|---|---|---|---|
| $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$ | $\frac{z^2}{c^2}-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ | $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=\frac{z}{c}$<br>$c>0$ | $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{z^2}{c^2};$ |

### תרגיל 4.2.1.

ציירו את קווי הגובה של "פרבולואיד הפרבולי":

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = \frac{z}{c}, c > 0$$

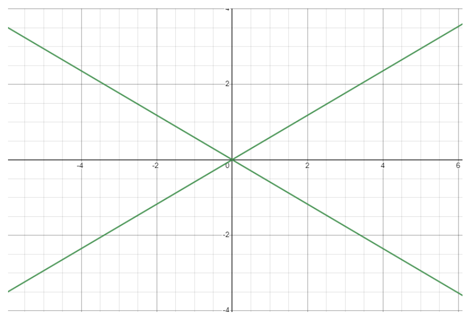
**פתרון התרגיל:**

נרצה לקבוע את $z$, ולקבל קבוצה ב$\mathbb{R}^2$, נחלק ל3 מקרים:

1. אם $z=0$, נקבל את המשוואה:

$$\frac{x^2}{a^2}=\frac{y^2}{b^2}\implies y=\pm\sqrt{\frac{x^2b^2}{a^2}}\implies y=\pm x\left|\frac{a}{b}\right|$$

כלומר זוג ישרים:



2. עבור $z>0$, נקבל:

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=\frac{z}{c}\implies\frac{x^2}{a^2\frac{z}{c}}-\frac{y^2}{b^2\frac{z}{c}}=1\implies\frac{x^2}{\left(a\sqrt{\frac{z}{c}}\right)^2}-\frac{y^2}{\left(b\sqrt{\frac{z}{c}}\right)^2}=1$$

שזה פשוט היפרבולה עם המשתנים:

$$\tilde{a}=a\sqrt{\frac{z}{c}},\tilde{b}=b\sqrt{\frac{z}{c}},$$

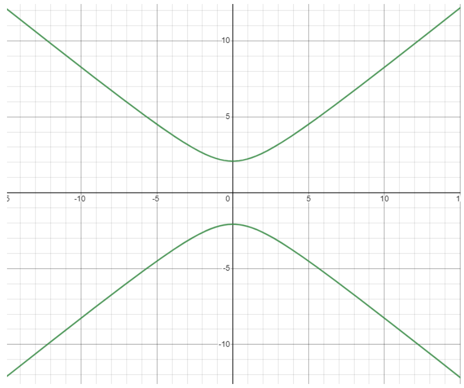
3. אם $z<0$, נוכל לעשות כמעט אותו דבר, חוץ מלהכניס את $\frac{z}{c}$ לשורש, אז נוכל לעשות את הטריק הבא:

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=\frac{z}{c}\implies\frac{x^2}{a^2\frac{(-z)}{c}}-\frac{y^2}{b^2\frac{(-z)}{c}}=-1\implies\frac{x^2}{\left(a\sqrt{\frac{(-z)}{c}}\right)^2}-\frac{y^2}{\left(b\sqrt{\frac{(-z)}{c}}\right)^2}=-1$$

כלומר:

$$\frac{y^2}{\left(b\sqrt{\frac{(-z)}{c}}\right)^2}-\frac{x^2}{\left(a\sqrt{\frac{(-z)}{c}}\right)^2}=1$$

שזאת היפרבולה "הפוכה", כלומר כאשר הפכנו את התפקידים של $x,y$ - והיא תראה כך:




## 4.3 גבולות ורציפות פונקציות במספר משתנים

**תזכורת.**

לכל $m \in \mathbb{N}$ נוכל להגדיר פונקצית מרחק (אשר נקראת גם מטריקה אוקלידית) ב-$\mathbb{R}^m$ על ידי:

$$d : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \to [0, \infty)$$

$$d(\vec{x}, \vec{y}) = \sqrt{\sum_{i=1}^{m} (x_i - y_i)^2}$$

תהא סדרת נקודות $\{\vec{x}_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ נומר כי $\lim_{n\to\infty} \vec{x}_n = \vec{x}$ אם:

$$\forall \epsilon > 0, \exists N_\epsilon \in \mathbb{N}, \forall n > N_\epsilon, d(\vec{x}_n, \vec{x}) < \epsilon$$

ראינו בהרצאה כי אם נסמן:

$$\vec{x}_n = (x_1^n, ..., x_m^n), \vec{x} = (x_1, ..., x_m)$$

אז:

$$\lim_{n\to\infty} \vec{x}_n = \vec{x} \iff \begin{array}{c} \lim_{n\to\infty} x_1^n = x_1 \\ \vdots \\ \lim_{n\to\infty} x_m^n = x_m \end{array}$$

**תזכורת.**

תהא $f : D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^2$ סביבה של נקודה $(a, b)$, אז נסמן:

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x, y) = L$$

אם:

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, 0 < \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} < \delta \implies |f(x, y) - L| < \epsilon$$

אם $L = f(a,b)$ אז נומר כי $f$ רציפה בנקודה $(a,b)$.

**תזכורת.**

תהא $f(x,y)$ פונקציה סקלרית המוגדרת בסביבה של $(a,b)$, ויהיו $\gamma_1,\gamma_2 : [0,1] \to D$ מסילות, כך ש $\gamma_1(0) = \gamma_2(0) = (a,b)$ אז אם:

$$\lim_{t\to 0} f(\gamma_1(t)) \neq \lim_{t\to 0} f(\gamma_2(t))$$

אז הגבול $\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)$ לא קיים.

**תזכורת.**

(משפט היינה)
תהא $f(x,y)$ פונקציה סקלרית המוגדרת בסביבה של $(a,b)$, אז $\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = L$ אמ"מ לכל סדרה $\{(x_n,y_n)\}_{n=1}^{\infty}$ כך ש $(a,b) \xrightarrow{n\to\infty} (x_n,y_n)$ מתקיים:

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n,y_n) = L$$

**תזכורת.**

(אריתמטיקה של גבולות)
יהיו $f,g : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ פונקציות כך ש:

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = L, \lim_{(x,y)\to(a,b)} g(x,y) = M$$

אז:

1. $$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) + g(x,y) = L + M$$
2. $$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) \cdot g(x,y) = L \cdot M$$
3. $$\forall c \in \mathbb{R}, \lim_{(x,y)\to(a,b)} c \cdot f(x,y) = c \cdot L$$
4. אם $M \neq 0$, אז:
$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} \frac{f(x,y)}{g(x,y)} = \frac{L}{M}$$

**רעיון.**

נשים לב שבמקרה הדו-מימדי קל יותר להפריך קיום של גבול מאשר להוכיח. אנחנו נראה שיטות לכאן ולכאן - נתחיל מהפרכה. ניזכר שמשפט היינו אומר לנו שהגבול של פונקציה $f(x,y)$ קיים (ושווה למספר $L$ כלשהו) בנקודה $p$ כלשהי אמ"ם **לכל** סדרה של נקודות $(x_n,y_n)$ השואפת ל-$p$ מתקיים שסדרת המספרים $f(x_n,y_n)$ שואפת **לאותו** מספר, $L$. נשים לב שעל מנת להפריך קיום גבול לפי משפט זה, מספיק להסתכל על שתי סדרות מספרים, $(\tilde{x}_n,\tilde{y}_n)$,$(x_n,y_n)$ השואפות ל-$p$, עבורן הגבולות המתאימים לא שווים (או לא קיימים). בפועל נעשה זאת באמצעות מסילות התלויות בפרמטר אחד, $t$, מהצורה

$$\gamma(t)=(x(t),y(t))$$

העוברות דרך $p$, כלומר $\gamma(t_0)=p$. אם נמצא שתי מסילות עבורן הגבול $\lim_{t\to t_0} f(x(t),y(t))$ יוצא שונה (או לא מוגדר), נוכל להסיק שאותו דבר מתקיים עבור סדרת נקודות בדידה לאורך כל אחת מהמסילות. נראה דוגמא:

**תרגיל 4.3.1.**

הראו כי לא קיים הגבול:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$$

**פתרון התרגיל:**

נשאף לנקודה $(0,0)$ דרך המסלולים ליניאריים $(t,at)$ עם פרמטרים $a$ שונים כאשר $0\longrightarrow t$ (הגדרנו כאן לכל $a$ מסילה שונה). כאשר ערך הגבול תלוי בערכו של $a$, זה בדיוק אומר שעל מסלולים שונים מתקבל גבול שונה, ולכן בפרט מוכיח את אי קיום הגבול.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}=\lim_{t\to0}\frac{t^2-(at)^2}{t^2+(at)^2}=\frac{1-a^2}{1+a^2}$$

ואכן הגבול תלוי ב-$a$, כלומר בשיפוע המסלול הקווי שבחרנו, ולכן לא קיים גבול.

**תרגיל 4.3.2.**

הראו כי לא קיים הגבול $\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{xy}{x^2+y^2}$

**פתרון התרגיל:**

נביט בהתנהגות הפונקציה הנ"ל לאורך שתי מסילות. קודם עבור המסילה $(0,t)$ (זהו בדיוק ציר ה-$y$):

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{xy}{x^2+y^2}\stackrel{?}{=}\lim_{t\to0}\frac{0}{t^2}=\lim_{t\to0}0=0$$

כעת נביט במסילה $(t,t)$ (קו ישר היוצא בזווית של $45$ מעלות מראשית הצירים):

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{t^2}{t^2+t^2} = \lim_{t\to 0} \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

נשים לב שקיבלנו גבול שונה לכל אחת מהמסילות, ולכן הגבול תלוי במסילה, כלומר לא קיים הגבול.

### תרגיל 4.3.3.

נתבונן בפונקציה $f(x,y) = \frac{\sin(x^2)+\sin(y^2)}{x+y}$. האם קיים לפונקציה גבול בנקודה $(x,y)=(0,0)$?

**פתרון התרגיל:**

נשים לב כי $f(x,y)$ כלל אינה מוגדרת בסביבה מנוקבת של $(0,0)$, כלומר כלל אין משמעות לשאול על הגבול בנקודה זאת.

### תזכורת.

(כלל הסנדוויץ') יהיו $f,g,h : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ פונקציות סקלריות המוגדרות בסביבה של $(a,b)$, כך שלכל $(x,y)$ בסביבה זו מתקיים:

$$f(x,y) \le g(x,y) \le h(x,y)$$

ומתקיים:

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(a,b)} h(x,y) = L$$

אז:

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} g(x,y) = L$$

### תרגיל 4.3.4.

נגדיר $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ ע"י:

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{y\sin(x)+3xy}{\sin(y)x} & \mathbb{R}^2 - \{x=0 \text{ or } y=\pi k\} \\ \alpha & \{x=0 \text{ or } y=\pi k\} \end{cases}$$

עבור $\alpha \in \mathbb{R}$, מצאו $\alpha$ כך ש $f(x,y)$ תהיה רציפה ב$(0,0)$.

**פתרון התרגיל:**

על מנת לקבל מועמד לגבול עבור $\alpha$, נציב מסילה אחת, למשל $(t,t)$, ונראה מה הגבול עליה

$$\begin{aligned}\lim_{t\to 0}\frac{t\sin(t)+3t^2}{\sin(t)t} &= \lim_{t\to 0}\frac{\sin(t)+3t}{\sin(t)}\\ &= \lim_{t\to 0}\left(1+3\frac{t}{\sin(t)}\right)=4\end{aligned}$$

לכן ניתן לראות כי $4$ הוא המועמד שלנו להיות הגבול. נעזר בכלל הסנדוויץ" על נמת להוכיח שהוא אכן הגבול של הפונקציה הדו-ממדית:

$$\begin{aligned}0 &\le |f(x,y)-4| \le \left|\frac{y\sin(x)+3xy}{\sin(y)x}-4\right| = \left|\frac{y\sin(x)}{\sin(y)x}-1+\frac{3xy}{\sin(y)x}-3\right|\\ &\le \left|\frac{y\sin(x)}{\sin(y)x}-1\right|+\left|\frac{3xy}{\sin(y)x}-3\right| = \left|\frac{y}{\sin(y)}\cdot\frac{\sin(x)}{x}-1\right|+3\left|\frac{y}{\sin(y)}-1\right|\longrightarrow 0\end{aligned}$$

כאשר השתמשנו באריתמטיקה של גבולות, ולכן עפ"י כלל הסנדוויץ':

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=4$$

כלומר, עבור $\alpha=4$, הפונקציה רציפה ב$(0,0)$.

### תרגיל 4.3.5.

הוכיחו כי הפונקציה:

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{y\sin x}{\sqrt{y\sin x+1}-1} & \begin{matrix}y\sin x+1\ge 0\\ \text{וגם}\\ \sqrt{y\sin x+1}\ne 1\end{matrix}\\ 2 & \text{אחרת}\end{cases}$$

רציפה ב$(0,1)$.
כאשר ניתן להניח ללא בדיקה כי $\frac{y\sin x}{\sqrt{y\sin x+1}-1}$ מוגדרת בסביבה מנוקבת של $(0,1)$.

**<u>פתרון התרגיל:</u>**
כדאי להוכיח רציפות, נדרש לבדוק כי:

$$\lim_{(x,y)\to(0,1)} f(x,y)=f(0,1)$$

כלומר:

$$\lim_{(x,y)\to(0,1)}\frac{y\sin x}{\sqrt{y\sin x+1}-1}=2$$

ואכן, נסמן $t = y \sin x$, כאשר $(x,y) \longrightarrow (0,1)$, $t \longrightarrow 0$, ונקבל

$$\begin{aligned}
\lim_{(x,y)\to(0,1)} \frac{y \sin x}{\sqrt{y \sin x + 1} - 1} &= \lim_{t\to 0} \frac{t}{\sqrt{t+1}-1} \\
&= \lim_{t\to 0} \frac{t\left(\sqrt{t+1}+1\right)}{\left(\sqrt{t+1}-1\right)\left(\sqrt{t+1}+1\right)} \\
&= \lim_{t\to 0} \frac{t\left(\sqrt{t+1}+1\right)}{t} = 2
\end{aligned}$$

כלומר $f$ רציפה בתוחם הגדרתה.

# *תרגול חמישי*

## 5.1 קואורדינטות מעגליות ומשפטי רציפות

**תזכורת.**

אם $f(x,y)$ פונקציה, ואנו רוצים לחשב את הגבול שלה ב$(0,0)$, אז לפעמים אנו יכולים לעבור לקואורדינטות פולאריות :

$$x = r\cos(\theta) y = r\sin(\theta) \iff \begin{array}{l} r = \sqrt{x^2+y^2} \\ \theta = \arccos\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) = \arcsin\left(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) \end{array}$$

במקרה כזה, אם קיימות פונקציות $g, h$ כך ש:

$$|f(x,y)| = |f(r\cos(\theta), r\sin(\theta))| \leq |g(r)||h(r,\theta)|$$

ומתקיים:

$$\lim_{r\to 0} g(r) = 0$$

ו$h(r,\theta)$ חסומה עבור $r$ חסום לכל $\theta$, אז $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$.

**תזכורת.**

(משפט ערך הביניים)
תהא $D \subset \mathbb{R}^n$ קבוצה קשירה, $f: D \to \mathbb{R}$ רציפה, אז לכל $P_1, P_2 \in D$ כך ש $f(P_1) \neq f(P_2)$, לכל $\alpha$ בין $f(P_1)$ ל$f(P_2)$ קיימת נקודה $M \in D$ כך ש $f(M) = \alpha$.

**תזכורת.**

(משפט ויירשטראס)
תהא $D \subset \mathbb{R}^n$ סגורה וחסומה (קומפקטית) ותהא $f : D \to \mathbb{R}$ פונקציה רציפה, אז $f$ חסומה ב-$D$, ומקבלת את ערכי הקיצון שלה.

**תרגיל 5.1.1.**

חשבו את הגבול הבא:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{3xy^2 - 5y^4}{x^2 + 2y^2}$$

**פתרון התרגיל:**
נעבור לקואורדינטות פולאריות:

$$\begin{aligned}\frac{3xy^2 - 5y^4}{x^2 + 2y^2} &= \frac{3r^3 \cos(\theta)\sin^2(\theta) - 5r^4 \sin^4(\theta)}{r^2\cos^2(\theta) + 2r^2\sin^2(\theta)} \\ &= \frac{r^3(3\cos(\theta)\sin^2(\theta) - 5r\sin^4(\theta))}{r^2(1+\sin^2(\theta))} = r\frac{3\cos(\theta)\sin^2(\theta) - 5r\sin^4(\theta)}{1+\sin^2\theta}\end{aligned}$$

נשים לב כי:

$$\left|\frac{3\cos(\theta)\sin^2(\theta) - 5r\sin^4(\theta)}{1+\sin^2\theta}\right| \le \left|\frac{3\cos(\theta)\sin^2(\theta) - 5r\sin^4(\theta)}{1}\right| \le |3+5r|$$

וכמובן כי $\lim_{r\to 0}|r| = 0$, אז:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{3xy^2 - 5y^4}{x^2 + 2y^2} = 0$$

**תרגיל 5.1.2.**

הוכיחו או הפריכו, אם לכל $\theta_0$ מתקיים:

$$\lim_{r\to 0} f(r\cos(\theta_0), r\sin(\theta_0)) = 0$$

אז מתקיים:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$$

**פתרון התרגיל:**

נפריך עם הפונקציה $f(x,y)=\frac{xy^3}{x^2+y^6}$ והגבול:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{xy^3}{x^2+y^6}$$

ננסה לעבור לקואורדינטות פולאריות:

$$\frac{xy^3}{x^2+y^6}=\frac{r^4\cos(\theta_0)\sin^3(\theta_0)}{r^2\cos^2(\theta_0)+r^6\sin^6(\theta_0)}=r^2\frac{\cos(\theta_0)\sin^3(\theta_0)}{\cos^2(\theta_0)+r^4\sin^6(\theta_0)}$$

נשים לב כי עבור $\theta_0$ כך ש $\cos(\theta_0)=0$ מתקיים:

$$r^2\frac{\cos(\theta_0)\sin^3(\theta_0)}{\cos^2(\theta_0)+r^4\sin^6(\theta_0)}=r^2\frac{0\cdot\sin^3(\theta_0)}{r^4\sin^6(\theta_0)}=0$$

ועבור $\theta_0$ כך ש$\cos(\theta_0)\neq 0$ מתקיים:

$$\left|r^2\frac{\cos(\theta_0)\sin^3(\theta_0)}{\cos^2(\theta_0)+r^4\sin^6(\theta_0)}\right|\leq|r^2|\underbrace{\left|\frac{\cos(\theta_0)\sin^3(\theta_0)}{\cos^2(\theta_0)}\right|}_{M(\theta_0)}\xrightarrow{r\to0}0$$

משום שלכל $\theta_0$, הביטוי $M(\theta_0)$ קבוע ממשי.
כלומר, לכל $\theta_0$ מתקיים:

$$\lim_{r\to0}f(r\cos(\theta_0),r\sin(\theta_0))=0$$

אבל, נראה שהגבול $\lim_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)$ לא קיים, ואכן במסלול $\gamma_1(t)=(0,t)$, עבור $t\to0$ נקבל:

$$\lim_{t\to0}f(\gamma_1(t))=\lim_{t\to0}0=0$$

אבל עבור $\gamma_2(t)=(t^3,t)$ עבור $t\to0$ נקבל:

$$\lim_{t\to0}f(\gamma_2(t))=\lim_{t\to0}\frac{t^6}{t^6+t^6}=\lim_{t\to0}\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$

כלומר הגבול לא קיים.
אז מה קרה פה? הבעיה היא שאם נסמן:

$$f(r\cos(\theta),r\sin(\theta))=\underbrace{r^2}_{g(r)}\underbrace{\frac{\cos(\theta)\sin^3(\theta)}{\cos^2(\theta)+r^4\sin^6(\theta)}}_{h(r,\theta)}$$

אז $\lim_{r\to0}g(r)=0$, מצד שני, $h(r,\theta)$ חסומה על ידי $M(\theta)$ לכל זווית $\theta$, כלומר לכל זווית $\theta$ יש לפונקציה $h(r,\theta)$ חסם אחר ואין חסם משותף, כלומר, לא קיים $M\in\mathbb{R}$ כך <u>שלכל</u> זווית $\theta$ מתקיים $|h(r,\theta)|\leq M$.

**תזכורת.**

כמו בפונקציות במשתנה אחד, גם כאן מתקיים ש–$f(x,y)$ רציפה בנק' $(x_0,y_0)$ אמ"מ קיים הגבול $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$ והוא שווה ל–$f(x_0,y_0)$.

**תרגיל 5.1.3.**

בדקו האם הפונקציות הבאות רציפות בתחום הגדרתן:

1. $f(x,y)=\begin{cases}\frac{x+y}{x^2-y} & x^2\neq y\\ 5 & \text{אחרת}\end{cases}$.
2. $f(x,y)=\begin{cases}(x^2+y^2)\cdot\sin\frac{1}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$.
3. $f(x,y)=\begin{cases}\frac{x}{3x+5y} & (x,y)\neq\left(x,-\frac{3}{5}x\right)\\ \frac{1}{3} & (x,y)=\left(x,-\frac{3}{5}x\right)\end{cases}$

**פתרון התרגיל:**

1. בכל נקודה שאינה הראשית הפונקציה מוגדרת כאלמנטרית ולכן רציפה בתחום הגדרתה.
נחשב :
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x+y}{x^2-y}\underset{\{y=kx\}}{=}\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x+kx}{x^2-kx}=\frac{1+k}{-k}$$
כלומר, הגבול תלוי ב–$k$ ולכן בפרט אינו קיים, לכן בפרט הפונקציה אינה רציפה ב– $(0,0)$.

2. בכל נקודה שאינה הראשית הפונקציה רציפה כהרכבה של אלמנטריות. נחשב את הגבול הבא $\lim_{(x,y)\to(0,0)}(x^2+y^2)\cdot\sin\frac{1}{x^2+y^2}$
מתקיים :
$$0\leq\left|(x^2+y^2)\sin\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right)\right|\leq\left|x^2+y^2\right|$$
ומשום ש-$x^2+y^2\longrightarrow 0$ כאשר $(x,y)\longrightarrow(0,0)$, הרי שמכלל הסנדויץ' נקבל כי הגבול קיים ושווה לאפס.

3. בכל נקודה שאינה על הישר $y=-\frac{3}{5}x$ הפונקציה רציפה כהרכבה של אלמנטריות.
נבדוק עבור נקודות מהצורה $\left(a,-\frac{3}{5}a\right)$ כאשר $a\neq 0$, נראה כי הגבול לא קיים : נגדיר $x(t)=a$, $y(t)=-\frac{3}{5}a+t$ כאשר $t\to 0$, $(x,y)\longrightarrow\left(a,-\frac{3}{5}a\right)$:
$$\lim_{(x,y)\to(a,-\frac{3}{5}a)}\frac{x}{3x+5y}=\lim_{t\longrightarrow 0}\frac{a}{3a-3a+5t}=\lim_{t\longrightarrow 0}\frac{a}{5t}=\frac{a}{5}\lim_{t\longrightarrow 0}\frac{1}{t}$$

והגבול הזה לא קיים, כלומר $f(x,y)$ לא רציפה ב$\left(a,-\frac{3}{5}a\right)$ עבור $a\neq 0$.
ב$a=0$ הגבול של $f$ תחת המסילה קיים ושווה לאפס, אך לא שווה ל$f(0,0)$, כלומר, גם אם הגבול קיים, הפונקציה לא יכולה להיות רציפה בנקודה זאת.
כלומר $f$ לא רציפה באף נקודה על הישר $y=-\frac{3}{5}x$.

## 5.2 גזירות

תזכורת.

תהא $f:D\subset\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, הגדרנו נגזרות חלקיות:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)=f'_x(x_0,y_0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h,y_0)-f(x_0,y_0)}{h}$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)=f'_y(x_0,y_0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0,y_0+h)-f(x_0,y_0)}{h}$$

נומר כי $f(x,y)$ גזירה (דיפרנציאלית) ב$(x_0,y_0)$ אם קיימים קבועים $A,B\in\mathbb{R}$ ופונקציות $\alpha(x,y),\beta(x,y)$ כך שלכל $x,y$ בסביבה של $(x_0,y_0)$ מתקיים:

$$f(x,y)=f(x_0,y_0)+A(x-x_0)+B(y-y_0)+\alpha(x,y)(x-x_0)+\beta(x,y)(y-y_0)$$

כאשר:

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)}\alpha(x,y)=\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)}\beta(x,y)=0$$

או, באופן שקול:

$$f(x,y)=f(x_0,y_0)+A(x-x_0)+B(y-y_0)+\epsilon(x,y)\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}$$

כאשר:

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)}\epsilon(x,y)=0$$

במקרה זה (ב2 הניסוחים) בהכרח יתקיים:

$$A=\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)$$
$$B=\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)$$

1. אם $f(x,y)$ גזירה ב$(x_0,y_0)$ אז היא רציפה שם.
2. אם $f'_x,f'_y$ קיימות רציפות בתחום $D\subset\mathbb{R}^2$, אז $f$ גזירה שם, ונסמן $f\in C^1(D)$.
3. ייתכן כי קיימות $f'_x,f'_y$ ב$(x_0,y_0)$ אך $f$ אינה גזירה, ואפילו לא רציפה ב$(x_0,y_0)$.

**תזכורת.**

מישור שעובר דרך הנקודה $(x_0, y_0, z_0)$, עם נורמל $\vec{N} = \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix}$ הוא הקבוצה (אוסף הנקודות):

$$\{(x,y,z)|A(x-x_0)+B(x-x_0)+C(z-z_0)=0\}$$

בהנתן פונקציה $f(x,y)$, ניתן לשרטט את הגרף שלה, $\Gamma_f = \{(x,y,z)|z=f(x,y)\} \subset \mathbb{R}^3$, ואז אפשר להתבונן בנקודה על הגרף $(x_0, y_0, f(x_0,y_0))$ ולהתבונן על המישור המשיק בנקודה הזאת שמוגדר להיות אוסף כל הישרים המשיקים לכל עקום חלקה המוכלת בגרף הפונקציה, במקרה ומישור זה קיים משוואתו תיהיה:

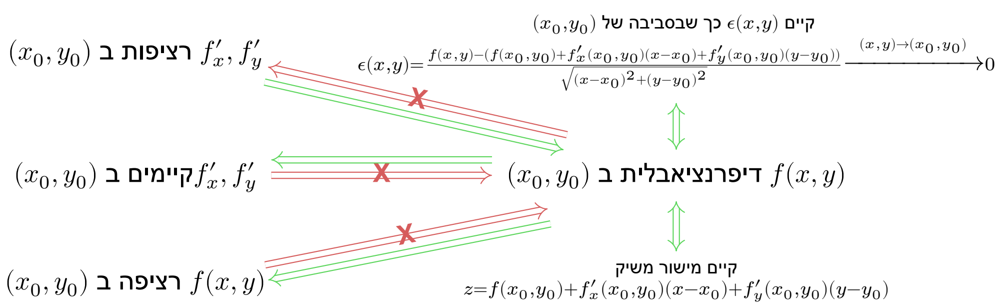
$$z = f(x_0,y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)(y-y_0)$$

כלומר, המישור עם הנורמל:

$$\vec{N} = \begin{pmatrix} -\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) \\ -\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) \\ 1 \end{pmatrix}$$

העובר בנקודה $(x_0, y_0, f(x_0,y_0))$.
ראינו בהרצאה כי פונקציה גזירה בנקודה $(x_0,y_0)$ אמ"מ קיים בנקודה זאת מישור משיק לגרף הפונקציה.

לסיכום:



**תרגיל 5.2.1.**

1. תהא $f(x,y)=\frac{xy^2-x^2+y}{y^2}$, מצאו לכל $y>0$ ערך של $x$ עבורו $f(x,y)$ נקודת מקסימום מקומית.
2. בדקו האם הגבול $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ קיים.
3. אם נגדיר $g_n(x)=f\left(x,\frac{1}{n}\right)$, האם $g_n(x)$ מתכנסת במ"ש ב$(0,1)$?

**פתרון התרגיל:**

1. נקבע $y_0>0$ ונגדיר $g(x)=f(x,y_0)$, נגזור לפי $x$:

$$g'(x)=\frac{\partial f}{\partial x}(x,y_0)=\frac{y_0^2-2x}{y_0^2}$$

כלומר, לכל $y_0>0$, הנקודה:

$$\frac{y_0^2-2x}{y_0^2}=0 \implies y_0^2-2x=0 \implies x=\frac{y_0^2}{2}$$

היא נקודת מקסימום מקומית כי $g''(x)=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y_0)=-\frac{2}{y_0^2}<0$, נחשב את ערך הפונקציה בנקודה זאת:

$$g\left(\frac{y_0^2}{2}\right)=f\left(\frac{y_0^2}{2},y_0\right)=\frac{\left(\frac{y_0^2}{2}\right)y_0^2-\left(\frac{y_0^2}{2}\right)^2+y_0}{y_0^2}=\frac{\frac{y_0^4}{2}-\frac{y_0^4}{4}+y_0}{y_0^2}=\frac{y_0^4+4y_0}{4y_0^2}=\frac{1}{4}y_0^2+\frac{1}{y_0}$$

2. מפה, קל לראות כי הגבול $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ לא קיים כי אם ניקח סדרת נקודות $y_n=\frac{1}{n}$, אז $y_n \xrightarrow{n\to\infty} 0$, אז גם $\left\{\left(\frac{y_n^2}{2},y_n\right)\right\}_{i\in\mathbb{N}}$ מקיימת $\left(\frac{y_n^2}{2},y_n\right)\xrightarrow{n\to\infty}(0,0)$ (מדוע?) אבל מתקיים:

$$\lim_{n\to\infty} f\left(\frac{y_n^2}{2},y_n\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{4}y_n^2+\frac{1}{y_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{4n^2}+n=\infty$$

ולכן $f(x,y)$ לא רציפה ב$(0,0)$.

3. שוב פעם, אנו יודעים כי:

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{x\in(0,1)} g_n(x)=\lim_{n\to\infty}\sup_{x\in(0,1)} f\left(x,\frac{1}{n}\right)\overset{\star}{=}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{4n^2}+n=\infty$$

כאשר $\overset{\star}{=}$ משום שהנקודה $\left(\frac{y_n^2}{2},y_n\right)$ היא נקודת מקסימום מוחלט של $g_n$ (בדקו זאת!) ו-$\frac{y_n^2}{2}\in(0,1)$.
כלומר סדרת הפונקציות אינה מתכנסת במ"ש ב$(0,1)$.

**תרגיל 5.2.2.**

עבור המשטחים הבא, מצאו את המישור המשיק בנקודה המצוינת:

1. $\ln(xyz) = 0, P = \left(1, 2, \frac{1}{2}\right)$.
2. $\frac{2x+y}{x+2y+z} = 1, P = (1, 0, 0)$, כאשר $x + 2y + z \neq 0$.

**פתרון התרגיל:**

1. נביא את המשטח לצורה $z = f(x, y)$:

$$\ln(xyz) = 0 \implies xyz = 1 \underset{x,y\neq 0}{\implies} z = \frac{1}{xy} = f(x, y)$$

נחשב את $f'_x(P), f'_y(P)$, ואכן:

$$f'_x = -\frac{1}{yx^2}, f'_y = -\frac{1}{xy^2}$$

אז המישור המשיק הוא:

$$z = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0)$$

$$z = f(1, 2) + \frac{\partial f}{\partial x}(1, 2)(x - 1) + \frac{\partial f}{\partial y}(1, 2)(y - 2)$$

$$z = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}(x - 1) - \frac{1}{4}(y - 2)$$

2. נביא את המשטח לצורה $z = f(x, y)$.

$$\frac{2x+y}{x+2y+z} = 1 \underset{x+2y+z\neq 0}{\implies} 2x + y = x + 2y + z \implies z = x - y$$

המשטח הוא כבר מישור, כלומר המישור המשיק הוא המשטח עצמו.

**תרגיל 5.2.3.**

תהא
$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

1. האם $f(x, y)$ רציפה ב $(0, 0)$?
2. האם קיימות $f'_x(0, 0), f'_y(0, 0)$?

**פתרון התרגיל:**

1. יהא $a \in \mathbb{R}$, נגדיר $\gamma_a(t) = (at, t)$, ונבדוק את:

$$\lim_{t\to 0} f(\gamma_a(t)) = \frac{at^2}{(1+a^2)t^2} = \frac{a}{1+a^2}$$

בפרט עבור $a = 0, a = 1$ נקבל גבולות שונים, כלומר $f(x,y)$ אינה רציפה ב$(0,0)$.

2. נחשב עפ"י הגדרה:

$$f'_x(0,0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x,0) - f(0,0)}{x} = 0$$

$$f'_y(0,0) = \lim_{y\to 0} \frac{f(0,y) - f(0,0)}{x} = 0$$

# תרגול שישי

## 6.1 דיפרנציאביליות אינה גוררת רציפות של הנגזרות החלקיות

**תרגיל 6.1.1.**

תהא

$$f(x,y)=\begin{cases}(x^2+y^2)\,\text{sin}\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

הוכיחו כי $f(x,y)$ דיפרנציאבילית, אבל $\frac{\partial f}{\partial y},\frac{\partial f}{\partial x}$ אינן רציפות ב$(0,0)$.

**פתרון התרגיל:**

נוכיח דיפרנציאביליות:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=\lim_{h\to0}\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{h^2\,\text{sin}\left(\frac{1}{\sqrt{h^2}}\right)}{h}=0$$

ובאותה צורה $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=0$.

כלומר, $f$ דיפרנציאבילית ב$(0,0)$ אם $\epsilon(x,y)\xrightarrow{(x,y)\to(0,0)}0$ עבור:

$$\epsilon(x,y)=\frac{f(x,y)-f(0,0)-\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)(x)-\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)}{\sqrt{x^2+y^2}}=\frac{f(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

אז:

$$|\epsilon(x,y)|\leq\left|(x^2+y^2)\,\text{sin}\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right|=\left|\sqrt{x^2+y^2}\,\text{sin}\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)\right|\xrightarrow{(x,y)\to(0,0)}0$$

כלומר $f(x,y)$ דיפרנציאבילית ב$(0,0)$.

נחשב את $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ ב$(x,y)\neq(0,0)$:

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)&=2x\,\text{sin}\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)+(x^2+y^2)\,\text{cos}\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)\frac{-\frac{2x}{2\sqrt{x^2+y^2}}}{\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^2}\\&=2x\,\text{sin}\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)-\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\,\text{cos}\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)\end{aligned}$$

נראה כי $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ לא קיים (ובפרט לא שווה ל$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0$), ואכן, עבור המסילה $\gamma(t) = (t,0)$ עבור $t \in [0,1]$ (שימו לב כי $t > 0$), עבור כאשר $\gamma(0) = 0$ נקבל:

$$\lim_{t\to0} f(\gamma(t)) = \lim_{t\to0} t \sin\left(\frac{1}{|t|}\right) - \frac{t}{|t|} \cos\left(\frac{1}{|t|}\right) = \lim_{t\to0} t \sin\left(\frac{1}{t}\right) - \cos\left(\frac{1}{t}\right)$$

והגבול הזה לא קיים.

## 6.2 כלל השרשרת

תזכורת.

תהא $f(x,y)$ פונקציה סקלרית גזירה, $\xi,\eta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ פונקציות גזירות אז מתקיים:

$$\frac{\partial}{\partial t} f(\xi(t),\eta(t)) = \frac{\partial f}{\partial \xi}(\xi(t),\eta(t))\frac{\partial \xi}{\partial t}(t) + \frac{\partial f}{\partial \eta}(\xi(t),\eta(t))\frac{\partial \eta}{\partial t}(t)$$

לפעמים נסמן את $\xi,\eta$ על ידי $x,y$ ואז זה קצת מבלבל, אבל הכוונה ל$x,y$ כפונקציות של $t$.
במקרה ש $\xi,\eta$ פונקציות של 2 משתנים, $\xi(u,v),\eta(u,v)$ נקבל:

$$\frac{\partial}{\partial u} f(\xi(u,v),\eta(u,v)) = \frac{\partial f}{\partial \xi}(\xi(u,v),\eta(u,v))\frac{\partial \xi}{\partial u}(u,v) + \frac{\partial f}{\partial \eta}(\xi(u,v),\eta(u,v))\frac{\partial \eta}{\partial u}(u,v)$$

$$\frac{\partial}{\partial v} f(\xi(u,v),\eta(u,v)) = \frac{\partial f}{\partial \xi}(\xi(u,v),\eta(u,v))\frac{\partial \xi}{\partial v}(u,v) + \frac{\partial f}{\partial \eta}(\xi(u,v),\eta(u,v))\frac{\partial \eta}{\partial v}(u,v)$$

את הנוסחאות האלה אפשר לכתוב בכתיב מקוצר:

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial t}$$

או:

$$\frac{\partial f}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial u}$$

$$\frac{\partial f}{\partial v} = \frac{\partial f}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial v}$$

תרגיל 6.2.1.

תהא $f(x,y) = e^{2x-y}$, $x(t) = \sin(t), y(t) = t^4$, חשבו את $\frac{\partial f}{\partial t}$.

**פתרון התרגיל:**

נפתור את התרגיל הזה ב2 דרכים שונות, עם כלל השרשרת ובעזרת חישוב ישיר, נתחיל עם כלל השרשרת:

$$\frac{\partial f}{\partial t}=\underbrace{\frac{\partial f}{\partial x}}_{2e^{2x-y}}\underbrace{\frac{\partial x}{\partial t}}_{\cos(t)}+\underbrace{\frac{\partial f}{\partial y}}_{-e^{2x-y}}\underbrace{\frac{\partial y}{\partial t}}_{4t^3}=2e^{2\sin(t)-t^4}\cos(t)-e^{2\sin(t)-t^4}4t^3=e^{2\sin(t)-t^4}\left(2\cos(t)-4t^3\right)$$

מצד שני, החישוב הישיר נותן לנו:

$$f(x(t),y(t))=e^{2\sin(t)-t^4}\implies\frac{\partial f}{\partial t}=e^{2\sin(t)-t^4}(2\cos(t)-4t^3)$$

## תרגיל 6.2.2.

תהא $f(x,y)=x^2+xy+y^2$, עבור קואורדינטות פולאריות, $\begin{cases}x=r\cos(\theta)\\y=r\sin(\theta)\end{cases}$ חשבו את $\frac{\partial f}{\partial r},\frac{\partial f}{\partial \theta}$.

**פתרון התרגיל:**

נשתמש בכלל השרשרת:

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial r}&=\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r}=(2x+y)\big|_{\substack{x=r\sin(\theta)\\y=r\sin(\theta)}}\cos(\theta)+(2y+x)\big|_{\substack{x=r\sin(\theta)\\y=r\sin(\theta)}}\sin(\theta)\\&=(2r\cos(\theta)+r\sin(\theta))\cos(\theta)+(2r\sin(\theta)+r\cos(\theta))\sin(\theta)\\&=r(2\cos^2(\theta)+\cos(\theta)\sin(\theta)+2\sin^2(\theta)+\cos(\theta)\sin(\theta))=2r(1+\cos(\theta)\sin(\theta))\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial \theta}&=\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \theta}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \theta}=(2x+y)\big|_{\substack{x=r\sin(\theta)\\y=r\sin(\theta)}}(-r\sin(\theta))+(2y+x)\big|_{\substack{x=r\sin(\theta)\\y=r\sin(\theta)}}(r\cos(\theta))\\&=(2r\cos(\theta)+r\sin(\theta))((-r\sin(\theta)))+(2r\sin(\theta)+r\cos(\theta))(r\cos(\theta))\\&=r^2(-2\cos(\theta)\sin(\theta)-\sin^2(\theta)+2\sin(\theta)\cos(\theta)+\cos^2(\theta))=r^2(\cos^2(\theta)-\sin^2(\theta))\end{aligned}$$

## תרגיל 6.2.3.

תהא $f(x,y)$ גזירה, נגדיר:

$$g(u,v)=f(3u-v,u^2+v)$$

בהנתן:

$$f'_x(7,3)=1,f'_y(7,3)=2$$

חשבו את:

$$\left.\frac{\partial g}{\partial u}\right|_{(u,v)=(2,-1)},\left.\frac{\partial g}{\partial v}\right|_{(u,v)=(2,-1)}$$

**פתרון התרגיל:**

נשים לב כי אם נסמן $x(u,v) = 3u - v, y(u,v) = u^2 + v$, אז $x, y$ גזירות, ולכן ניתן להשתמש בכלל השרשרת:

$$\left.\frac{\partial g}{\partial u}\right|_{(u,v)=(2,-1)} = \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(x,y)=(x(2,-1),y(2,-1))} \left.\frac{\partial x}{\partial u}\right|_{(u,v)=(2,-1)} + \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(x,y)=(x(2,-1),y(2,-1))} \left.\frac{\partial y}{\partial u}\right|_{(u,v)=(2,-1)}$$

נחשב:

$$x(2,-1) = 3(2) - (-1) = 7, y(2,-1) = 2^2 - 1 = 3$$

$$\left.\frac{\partial x}{\partial u}\right|_{(u,v)=(2,-1)} = 3, \left.\frac{\partial y}{\partial u}\right|_{(u,v)=(2,-1)} = 2u = 4$$

אז:

$$\left.\frac{\partial g}{\partial u}\right|_{(u,v)=(2,-1)} = f'_x(7,3)\cdot 3 + f'_y(7,3)\cdot 4 = 3 + 4\cdot 2 = 11$$

אותו דבר נעשה עבור $\left.\frac{\partial g}{\partial v}\right|_{(u,v)=(2,-1)}$:

$$\begin{aligned}\left.\frac{\partial g}{\partial v}\right|_{(u,v)=(2,-1)} &= \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(x,y)=(x(2,-1),y(2,-1))} \left.\frac{\partial x}{\partial v}\right|_{(u,v)=(2,-1)} + \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(x,y)=(x(2,-1),y(2,-1))} \left.\frac{\partial y}{\partial v}\right|_{(u,v)=(2,-1)} \\ &= f'_x(7,3)\cdot(-1) + f'_y(7,3)\cdot 1 = -1 + 2 = 1\end{aligned}$$

### תרגיל 6.2.4.

תהא $f(x,y,z)$ גזירה, עבור $g(u,v,w) = f(u-v, v-w, w-u)$ הראו כי $\frac{\partial g}{\partial u} + \frac{\partial g}{\partial v} + \frac{\partial g}{\partial w} = 0$.

**פתרון התרגיל:**

עבור $\begin{cases} x = u - v \\ y = v - w \\ z = w - u \end{cases}$, אז:

$$\frac{\partial g}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial z}$$

$$\frac{\partial g}{\partial v} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial v} = -\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}$$

$$\frac{\partial g}{\partial w} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial w} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial w} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial w} = -\frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z}$$

והשוויון מתקבל.

## 6.3 נגזרת מכוונת וגרדיאנט

**תזכורת.**

תהא $f(x,y):D\subset\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, ווקטור $\hat{n}=(n_1,n_2)\in\mathbb{R}^2$, אז נגדיר:

$$\frac{\partial f}{\partial\hat{n}}(x_0,y_0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+hn_1,y_0+hn_2)-f(x_0,y_0)}{h}$$

זה השיפור של גרף הפונקציה $f$, בנקודה $(x_0,y_0)$ בכיוון $\hat{n}$ .
נשים לב כי אם $\hat{n}=(1,0)$, אז $\frac{\partial f}{\partial\hat{n}}=f_x$, ואם $\hat{w}=(0,1)$ אז $\frac{\partial f}{\partial\hat{w}}=f_y$.
אם $f(x,y)$ דיפרנציאבילית ב$(x_0,y_0)$, אז קיימת לה נגזרת מכוונת בכל כיוון $\vec{v}$ ב$(x_0,y_0)$.

**תזכורת.**

אם $f(x,y)$ דיפרנציאבילית ב$(x_0,y_0)$ אז לכל $\hat{n}=(n_1,n_2)\in\mathbb{R}^2$ מתקיים:

$$\frac{\partial f}{\partial\hat{n}}(x_0,y_0)=\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)n_1+\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)n_2$$

אם נגדיר את הגרדיאנט של $f$ להיות הווקטור $\nabla f(x_0,y_0)=\begin{pmatrix}\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\\ \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\end{pmatrix}$ ונזכר במכפלה סקלרית:

$$\left\langle\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\gamma\\ \delta\end{pmatrix}\right\rangle=\alpha\gamma+\beta\delta$$

אז נוכל לכתוב:

$$\frac{\partial f}{\partial\hat{n}}(x,y)=\langle\nabla f(x,y),\hat{n}\rangle$$

נזכר גם כי $\langle\vec{v},\vec{w}\rangle$ מקסימלי כאשר $\vec{v},\vec{w}$ וקטורים מקבילים, כלומר $\frac{\partial f}{\partial\hat{n}}=\langle\nabla f,\hat{n}\rangle$ מקסימלי כאשר $\nabla f,\hat{n}$ מצביעים באותו כיוון, כלומר $\nabla f$, כווקטור מצביע בכיוון הגידול המקסימלי של $f$.

**תרגיל 6.3.1.**

תהא $f(x,y)=e^x\sin(y)$, חשבו את $\frac{\partial f}{\partial\vec{v}}(3,4)$ עבור $\hat{n}=\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

**פתרון התרגיל:**
נחשב את $\nabla f(3,4)$:

$$f_x(3,4)=e^x\sin(y)|_{(x,y)=(3,4)}=e^3\sin(4)$$
$$f_y(3,4)=e^x\cos(y)|_{(x,y)=(3,4)}=e^3\cos(4)$$

אז:

$$\frac{\partial f}{\partial \hat{n}}(3,4) = \left\langle \begin{pmatrix} e^3 \sin(4) \\ e^3 \cos(4) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \right\rangle = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(e^3 \sin(4) + e^3 \cos(4)\right)$$

### תרגיל 6.3.2.

תהא $f(x,y) = x^2 + y^2$, חשבו את $\frac{\partial f}{\partial \hat{n}}$ עבור וקטור כללי $\hat{n} = (n_1, n_2)$ בנקודה כללית $(x,y)$.

**פתרון התרגיל:**

נחשב בעזרת הגרדיאנט, ראשית ברור כי $f(x,y)$ דיפרנציאבילית בכל $\mathbb{R}^2$, נחשב:

$$\left\langle \begin{pmatrix} f_x(x,y) \\ f_y(x,y) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \end{pmatrix} \right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \end{pmatrix} \right\rangle = 2xn_1 + 2yn_2$$

### תרגיל 6.3.3.

(שאלה ממבחן)

1. תהא $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ פונקציה זוגית וגזירה ב$0$ כך ש $g'(0) = 0$, נגדיר $f(x,y) = g\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)$, הוכיחו כי $f$ דיפרנציאבילית ב$(0,0)$.
2. תהא $f(x,y) = \cos\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)$, חשבו את $\frac{\partial f}{\partial \hat{n}}(0,0)$ עבור $\hat{n} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

**פתרון התרגיל:**

1. נתחיל בחישוב $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0), \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$, עפ"י הגדרה:

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) &= \lim_{h\to 0}\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{g(\sqrt{h^2})-g(0)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{g(|h|)-g(0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{g(h)-g(0)}{h} = g'(0) = 0\end{aligned}$$

חישוב דומה יראה לנו כי $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$, אז עפ"י הגדרה, $f$ דיפרנציאבילית ב$(0,0)$ אם $\epsilon(x,y) \xrightarrow{(x,y)\to(0,0)} 0$ עבור:

$$\epsilon(x,y) = \frac{f(x,y) - f(0,0) - \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)(x) - \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{f(x,y)-f(0,0)}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

נעבור לקואורדינטות פולאריות:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \epsilon(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y)-f(0,0)}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{g\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)-g(0)}{\sqrt{x^2+y^2}}$$
$$= \lim_{r\to 0^+} \frac{g(r)-g(0)}{r} = g'(0) = 0$$

כלומר, $f(x,y)$ דיפרנציאבילית ב$(0,0)$.

2. הפונקציה $g(t)=\cos(t)$ זוגית וגזירה ומקיימת $g'(0)=-\sin(0)=0$, אז עפ"י החישוב שנעשה בסעיף א' מתקיים כי $\nabla f(0,0)=(0,0)$, ולכן $\frac{\partial f}{\partial \hat{n}}=0$ (לכל $\hat{n}$).

## 6.4 משפט הפונקציה הסתומה

תזכורת.

פונקציה בצורה סתומה היא פונקציה מהצורה:

$$F(x,y)=0$$

משפט הפונקציה הסתומה עוזר לנו למצוא פונקציה $y=f(x)$ כך ש:

$$f(x)=y \iff F(x,y)=0$$

ננסח את המשפט עבור פונקציה ב$2$ משתנים:
אם $F(x,y)=0$ פונקציה סתומה, אז בהנתן $(x_0,y_0)$ כך ש $F(x_0,y_0)=0$, אם מתקיים כי:

1. בסביבה של $(x_0,y_0)$, $F_x, F_y$ רציפות.
2. $F_y(x_0,y_0)\neq 0$

אז קיימת פונקציה יחידה $y=f(x)$ המוגדרת בסביבה של $(x_0,y_0)$ כך ש:

$$y=f(x) \iff F(x,y)=0$$

ומתקיים:

$$\frac{\partial y}{\partial x} = f'(x) = -\frac{F'_x(x,f(x))}{F'_y(x,f(x))}$$

ועבור פונקציה ב$3$ משתנים: תהא פונקציה סתומה:

$$F(x,y,z)=0$$

נחפש $z=f(x,y)$ כך ש:

$$z=f(x,y) \iff F(x,y,f(x,y))=0$$

אז בהנתן $(x_0,y_0,z_0)$ כך ש $F(x_0,y_0,z_0)=0$, אם קיימת סביבה בה:

1. $F_x, F_y, F_z$ רציפות.
2. $F_z(x_0, y_0, z_0) \neq 0$

אז קיימת פונקציה יחידה $z = f(x, y)$ המקיימת כי בסביבה של $(x_0, y_0)$:

$$z = f(x, y) \iff F(x, y, f(x, y)) = 0$$

ומתקיים:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = -\frac{F'_x(x, y, f(x, y))}{F'_z(x, y, f(x, y))}$$
$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = -\frac{F'_y(x, y, f(x, y))}{F'_z(x, y, f(x, y))}$$

### תרגיל 6.4.1.

חשבו את $\frac{\partial y}{\partial x}$ בסביבה של $x = 1, y = 0$ עבור:

$$x^2 y^4 = \sin(xy)$$

**פתרון התרגיל:**

נשים לב כי את הפונקציה הסתומה אפשר לכתוב בצורה:

$$F(x, y) = x^2 y^4 - \sin(xy) = 0$$

נבדוק שמתקיימים תנאי משפט הפונקציה הסתומה:

1. $$F(1, 0) = 0$$

2. $$F'_x = 2xy^4 - y\cos(xy)$$
$$F'_y = 4x^2y^3 - x\cos(xy)$$
רציפות.

3. $$F'_y(1, 0) = 0 - \cos(0) = -1 \neq 0$$

אז בסביבה של $(1, 0)$ מתקיים:

$$\frac{\partial y}{\partial x} = -\frac{F_x}{F_y} = -\frac{2xy^4 - y\cos(xy)}{4x^2y^3 - x\cos(xy)}$$

**תרגיל 6.4.2.**

תהא $\tan(z)=\cos(x)+\sin(y)$, מצאו את $\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y}$ בסביבה של הנקודה $(\frac{\pi}{2},0,0)$.

**פתרון התרגיל:**

נשתמש במשפט הפונקציה הסתומה עבור $F(x,y,z)=\cos(x)+\sin(y)-\tan(z)$. נבדוק את תנאי המשפט.

1.
$$F\left(\frac{\pi}{2},0,0\right)=0$$

2.
$$\frac{\partial F}{\partial x}=-\sin(x),\ \frac{\partial F}{\partial y}=\cos(y),\ \frac{\partial F}{\partial z}=\frac{1}{\cos^2(z)}$$

כולן רציפות סביב $(\frac{\pi}{2},0,0)$.

3.
$$\frac{\partial F}{\partial z}\left(\frac{\pi}{2},0,0\right)=\frac{1}{\cos^2(z)}=\frac{1}{\cos^2(0)}=1\neq 0$$

אז קיימת $z=f(x,y)$ בסביבה של $(\frac{\pi}{2},0,0)$, והיא מקיימת:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=f'_x(x,y)=-\frac{F_x}{F_z}=-\frac{-\sin(x)}{\frac{1}{\cos^2(z)}}=\frac{\sin(x)}{\cos^2(z)}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=f'_y(x,y)=-\frac{F_y}{F_z}=-\frac{\cos(y)}{\frac{1}{\cos^2(z)}}=-\cos(y)\cos^2(z)$$

# תרגול שביעי

## 7.1 תוצאות גיאומטריות ממשפט הפונקציה הסתומה

**תזכורת.**

בהרצאה השתמשנו במשפט הפונקציה הסתומה וראינו את התוצאה הבאה:
תהא $F(x,y,z)$ פונקציה גזירה ברציפות בסביבית $(x_0,y_0,z_0)$ כך שמתקיים:

1. $F(x_0,y_0,z_0)=0$.
2. $\nabla F(x_0,y_0,z_0)\neq\vec{0}$.

אז למשטח רמה $F(x,y,z)=0$, קיים מישור משיק ב$(x_0,y_0,z_0)$ כך שמשוואתו:

$$\left\langle \nabla F(x_0,y_0,z_0), \begin{pmatrix} x-x_0 \\ y-y_0 \\ z-z_0 \end{pmatrix} \right\rangle = 0$$

כלומר:

$$F'_x(x_0,y_0,z_0)(x-x_0)+F'_y(x_0,y_0,z_0)(y-y_0)+F'_z(x_0,y_0,z_0)(z-z_0)=0$$

אותה תוצאה אפשר לראות גם עבור פונקציה סתומה $G(x,y)$, כלומר:
תהא $G(x,y)$ פונקציה גזירה ברציפות בסביבה של $(x_0,y_0)$, כך שמתקיים:

1. $G(x_0,y_0)=0$.
2. $\nabla G(x_0,y_0)\neq\vec{0}$.

אז לקו גובה $G(x,y)=0$ קיים מישור משיק ב$(x_0,y_0)$ ומשוואתו:

$$\left\langle \nabla G(x_0,y_0), \begin{pmatrix} x-x_0 \\ y-y_0 \end{pmatrix} \right\rangle = 0$$

כלומר:

$$G'_x(x_0,y_0)(x-x_0)+G'_y(x_0,y_0)(y-y_0)=0$$

**רעיון.**

בשני משתנים : נתונה פונקציה $F:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ ונתון מספר $k\in\mathbb{R}$. נוכל להתבונן במשוואה

$$F(x,y)=k$$

נראה להביע את $y$ כפונקציה של $x$, כלומר $y=y(x)$, כך שיתקיים

$$F(x,y(x))=k$$

לצורך כך נגזור את $F$ לפי $x$ ונקבל מכלל השרשרת ומכך ש- $F(x,y)=k$:

$$0=\frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x}=F_x+F_y y'$$

ומכאן נובע

$$\frac{dy}{dx}=y'=-\frac{F_x}{F_y}$$

**שימו לב!!** הנוסחה עובדת כאשר אפשר להציג את $y$ כפונקציה של $x$ (בסביבה של נקודה מסוימת).
בשלושה משתנים : נניח כי $F(x,y,z)=c$ , ונרצה לחפש $z=z(x,y)$. הנגזרות של $z$ לפי $x,y$ נתונות ע"י

$$z_x(x_0,y_0)=\left[-\frac{F_x}{F_z}\right]_{(x_0,y_0)},\ z_y(x_0,y_0)=\left[-\frac{F_y}{F_z}\right]_{(x_0,y_0)}$$

נראה זאת : נגזור לפי $x$ :

$$F_x\cdot\frac{dx}{dx}+F_y\cdot\frac{dy}{dx}+F_z\cdot\frac{dz}{dx}\quad=\quad F_x\cdot 1+F_y\cdot 0+F_z\cdot z_x=0$$

כי $y$ אינה פונקציה של $x$, והנגזרת של $x$ לפי $x$ היא 1 (כל משתנה בעל נגזרת $1$ ביחס לעצמו).
אם נגזור לפי $y$ :

$$F_x\cdot\frac{dx}{dy}+F_y\cdot\frac{dy}{dy}+F_z\cdot\frac{dz}{dy}=F_x\cdot 0+F_y\cdot 1+F_z\cdot z_y=0$$

לאחר העברת אגפים נקבל את הדרוש.
**גם כאן, הנוסחאות עובדות רק כאשר אפשר להציג את $z$ כפונקציה של $(x,y)$.**

**תרגיל 7.1.1.**

הראו כי עבור המשוואה $1+x+y=\cos(xy)$ ניתן לבודד את $y$ כפונקציה של $x$ בסביבה של הנקודה $(0,0)$ ומצאו את $\frac{dy}{dx}$ בנקודה זו.

**פתרון התרגיל:**

נעביר תחילה להצגה סתומה:

$$\begin{aligned} 1+x+y-\cos(xy) &= 0 \\ F(x,y) &= 1+x+y-\cos(xy) \end{aligned}$$

ראשית, נשים לב כי אכן מתקיים $F(0,0)=0$, שנית נבדוק את אם הנגזרת מתאפסת:

$$F_y = 1+x\sin(xy)$$

ובאמת עבור הנקודה הנתונה מתקיים:

$$F_y(0,0) = 1+0 \neq 0$$

בנוסף, כל הנגזרות החלקיות רציפות ולכן נוכל להשתמש במשפט הפונקציה הסתומה על מנת להסיק שניתן לכתוב $y=y(x)$ ומתקיים:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{F_x}{F_y} = -\frac{1+y\sin(xy)}{1+x\sin(xy)}$$

ובנקודה המבוקשת:

$$\frac{dy}{dx}(0,0) = \frac{1+0}{1+0} = 1$$

**תרגיל 7.1.2.**

נתונה משוואה סתומה:

$$F(x,y,z) = z^2-e^{x^2+y^2}+(x+y)\sin z = 0$$

1. הראו כי קיימת פונקציה $z(x,y)$ המקיימת את המשוואה בסביבה של הנקודה $(0,0,1)$, וחשבו את $z_x(0,0), z_y(0,0)$.
2. חשבו את משוואת המישור המשיק למשטח הנתון על ידי המשוואה הזו בנקודה $(0,0,1)$, ואת ישר הנורמל למישור המשיק בנקודה זו בצורה פרמטרית.

**פתרון התרגיל:**

1. ראשית, נשים לב כי $F(0,0,1) = 1 - e^0 = 0$, שנית, נחשב את הנגזרות החלקיות של $F$:

$$F_x = -2xe^{x^2+y^2} + \sin z, \quad F_y = -2ye^{x^2+y^2} + \sin z, \quad F_z = 2z + (x+y)\cos z$$

ובאמת, כל הנ"ח רציפות ומתקיים $F_z(0,0,1) = 2 \neq 0$ ולכן ניתן להשתמש במשפט הפונקציה הסתומה ולקבל:

$$\begin{aligned} z_x(0,0) = \left[-\frac{F_x}{F_z}\right]_{(0,0)} &= -\frac{0+\sin 1}{2} = -\frac{1}{2}\sin 1 \\ z_y(0,0) = \left[-\frac{F_y}{F_z}\right]_{(0,0)} &= -\frac{0+\sin 1}{2} = -\frac{1}{2}\sin 1 \end{aligned}$$

2. עפ"י הסעיף הקודם, הווקטור הנורמלי למישור המשיק בנקודה הנ"ל נתון על ידי

$$\begin{aligned} \vec{N} = (F_x, F_y, F_z) &= \left(-2xe^{x^2+y^2} + \sin z, -2ye^{x^2+y^2} + \sin z, 2z + (x+y)\cos z\right) \\ &= (0 + \sin 1, 0 + \sin 1, 2 + 0) = (\sin 1, \sin 1, 2) \end{aligned}$$

ולכן המישור המשיק נתון על ידי המשוואה:

$$\vec{N} \cdot (x-0, y-0, z-1) = 0$$

כלומר:

$$(\sin 1)\, x + (\sin 1)\, y + 2z = 0$$

ישר הנורמל נתון על ידי לקיחת הנקודה $p = (0,0,1)$ והוספת כפולה של הווקטור $\vec{N}$:

$$\begin{aligned} p + t\vec{N} &= (0,0,1) + (t\sin 1, t\sin 1, 2t) \\ &= (t\sin 1, t\sin 1, 2t+1) \end{aligned}$$

תרגיל 7.1.3.

(תרגיל ממבחן)
הראו שקיימת פונקציה $z=z\left(x,y\right)$ המקיימת את המשוואה $x^{2}+y^{2}+z^{3}+z=1$, והראו כי הפונקציה $G\left(x,y\right)=e^{x^{2}+y^{2}}+e^{z(x,y)}$ מקיימת $yG_{x}=xG_{y}$.

**פתרון התרגיל:**
נגדיר $F(x,y,z)=x^{2}+y^{2}+z^{3}+z-1$. נגזור:

$$F_{z}=3z^{2}+1$$

נשים לב כי $F_{z}>0$, בנוסף, $F_{x},F_{y}$ רציפות (כפולינומים), כלומר בכל נקודה המקיימת $F(x,y,z)=0$ ניתן להפעיל את משפט הפונקציה הסתומה ולקבל:

$$\begin{aligned}
z_{x} &= -\frac{F_{x}}{F_{z}}=-\frac{2x}{3z^{2}+1}\\
z_{y} &= -\frac{F_{y}}{F_{z}}=-\frac{2y}{3z^{2}+1}\\
G_{x} &= e^{x^{2}+y^{2}}\left(2x\right)+e^{z}\left(z_{x}\right)\\
&= e^{x^{2}+y^{2}}\left(2x\right)+e^{z}\left(-\frac{2x}{3z^{2}+1}\right)\\
G_{y} &= e^{x^{2}+y^{2}}\left(2y\right)+e^{z}\left(z_{y}\right)\\
&= e^{x^{2}+y^{2}}\left(2y\right)+e^{z}\left(-\frac{2y}{3z^{2}+1}\right)\\
yG_{x} &= 2xye^{x^{2}+y^{2}}-e^{z}\frac{2xy}{3z^{2}+1}\\
xG_{y} &= 2xye^{x^{2}+y^{2}}-e^{z}\frac{2yx}{3z^{2}+1}
\end{aligned}$$

## 7.2 חזרה לפולינום טיילור

תזכורת.

תהא $f(x,y)$ פונקציה סקלרית, ב2 משתנים, גזירה $n+1$ פעמים, אז נוכל לדבר על הפולינום טיילור שלה סביב $(x_{0},y_{0})$:

$$T_{n}(x,y)=\sum_{l=0}^{n}\left(\frac{1}{l!}\sum_{k=0}^{l}\binom{l}{k}f_{x^{k}y^{l-k}}(x_{0},y_{0})(x-x_{0})^{k}(y-y_{0})^{l-k}\right)$$

בנוסף, נוכל לדון בשארית טיילור שלה:

$$R_n(x,y)=f(x,y)-T_n(x,y)$$

כעט נתמקד $n=2$ ונקבל את המשפט הבא:
תהא $f(x,y)$ פונקציה סקלרית ב2 משתנים שגזירה לפחות 3 פעמים, אז בסביבה של $(x_0,y_0)$ מתקיים:

$$\begin{aligned}f(x,y)&=T_2(x,y)+R_2(x,y)\\&=f\left(x_0,y_0\right)+f_x\left(x_0,y_0\right)\cdot\left(x-x_0\right)+f_y\left(x_0,y_0\right)\cdot\left(y-y_0\right)\\&+\frac{1}{2}\left(f_{xx}\left(x_0,y_0\right)\left(x-x_0\right)^2+2f_{xy}\left(x_0,y_0\right)\left(x-x_0\right)\left(y-y_0\right)+f_{yy}(x_0,y_0)(y-y_0)^2\right)\\&+R_2(x,y)\end{aligned}$$

כאשר $R_2(x,y)$ מקיים:

$$R_2\left(x,y\right)=\frac{1}{3!}\left(f_{xxx}\left(x',y'\right)\left(x-x_0\right)^3+\cdots+f_{yyy}\left(x',y'\right)\left(y-y_0\right)^3\right)$$

כאשר $(x',y')$ נמצאת בין $(x_0,y_0)$ (הנקודה סביבה מפתחים) ל–$(x,y)$ (הנקודה בה מנסים להעריך את הפונקציה).

הערה.

בממדים גבוהים, הכוונה ב"בין.." היא שהנקודה $(x',y')$ נמצאת בתור הכדור שמרכזו $(x_0,y_0)$ ורדיוסו המרחק בין $(x_0,y_0)\,,(x,y)$.

תרגיל 7.2.1.

רשום פיתוח טיילור מסדר שני עבור $f=x^y$, $x>0$, בסביבת הנקודה $(1,1)$.

**פתרון התרגיל:**

$$\begin{aligned}f_x&=yx^{y-1}\quad,\quad f_y=x^y\ln x\\f_{xx}&=y\left(y-1\right)x^{y-2}\quad,\quad f_{yy}=x^y\left(\ln x\right)^2\\f_{xy}&=x^{y-1}+yx^{y-1}\ln x\quad,\quad f_{yx}=yx^{y-1}\ln x+x^y\cdot\frac{1}{x}\end{aligned}$$

נחשב את ערכי הנגזרות בנקודה $(1,1)$:

$$\begin{aligned}f_x\left(1,1\right)&=1\quad,\quad f_y\left(1,1\right)=0\\f_{xx}\left(1,1\right)&=0\quad,\quad f_{yy}\left(1,1\right)=0\\f_{xy}\left(1,1\right)&=1\quad,\quad f_{yx}\left(1,1\right)=1\end{aligned}$$

נציב בנוסחה :

$$\begin{aligned} x^y &= 1+1\cdot(x-1)+0\cdot(y-1)+\frac{1}{2}\Big(0\cdot(x-1)^2+1\cdot(x-1)(y-1) \\ &\quad +0\cdot(y-1)^2+1\cdot(x-1)(y-1)\Big)+R_2(x) \\ &= 1+(x-1)+(x-1)(y-1)+R_2(x,y) \end{aligned}$$

הערה.

**שאלה למחשבה:** מה צריך להיות $f(0,0)$? האם פולינום הטיילור שחישבנו מספיק על מנת להסיק על ערך זה?

תרגיל 7.2.2.

תהי פונקציה $F(x,y)$ בעלת נגזרות חלקיות רציפות עד סדר 3. נתון פיתוח הטיילור שלה סביב הנקודה $(3,6)$:

$$\begin{aligned} F(x,y) =& 1+9\cdot(x-3)+3\cdot(y-6)-2\cdot(x-3)^2+\frac{1}{2}\cdot(x-3)(y-6) \\ & -3\cdot(y-6)^2+\frac{1}{2}\cdot(x-3)(y-6)+R_2(x,y) \end{aligned}$$

נתונה המשוואה הסתומה $F(x,y)=1$. הראו שניתן לחלץ את $y$ כפונקציה של $x$, וחשבו את $y''(3)\,,y'(3)$.

**פתרון התרגיל:**

ראשית, $F(3,6)=0$, שנית נבדוק האם $F_y\neq 0$ בנקודה, אבל מפני שידוע פיתוח הטיילור, אנו יודעים כי $F_y(3,6)=3\neq 0$ (המקדם של $(y-6)$ בפיתוח טיילור סביב $(3,6)$). לכן אכן ניתן לחלץ את $y$ כפונקציה של $x$. כעת ניזכר בנוסחה של הנגזרת של $y$:

$$y'(x)=-\frac{F_x(x,y(x))}{F_y(x,y(x))}$$

בסביבה של $(3,6)$, ומשום ש $y(3)=6$ אז מתקיים:

$$y'(3)=-\frac{F_x(3,6)}{F_y(3,6)}$$

אבל מהפיתוח נוכל להסיק כי $F_x(3,6)=9, F_y(3,6)=3$ אז $y'(3,6)=-\frac{9}{3}=-3$.

כעת, עבור הנגזרת השנייה, נחשב אותה ע"י גזירה ישירה, בעזרת כלל השרשרת וגזירה של מנה:

$$\begin{aligned}
y''(x) &= \frac{d}{dx}y'(x) = \frac{d}{dx}\left(-\frac{F_x(x,y(x))}{F_y(x,y(x))}\right) \\
&= -\frac{\frac{d}{dx}[F_x(x,y(x))]F_y(x,y(x)) - \frac{d}{dx}[F_y(x,y(x))]F_x(x,y(x))}{\left(F_y(x,y(x))\right)^2} \\
&= -\frac{\left(F_{xx}+y'(x)F_{xy}\right)F_y - \left(F_{yx}+y'(x)F_{yy}\right)F_x}{\left(F_y\right)^2}
\end{aligned}$$

במקרה שלנו:

$$\begin{aligned}
&F(3,6) = 0 \\
&F_x(3,6) = 9 \\
&F_y(3,6) = 3 \\
&\tfrac{1}{2}F_{xx}(3,6) = -2 \implies F_{xx}(3,6) = -4 \\
&\tfrac{1}{2}F_{yy}(3,6) = -3 \implies F_{yy}(3,6) = -\tfrac{3}{2} \\
&F_{xy}(3,6) = 1 \\
&y'(3) = -3
\end{aligned}$$

כלומר:

$$y''(3) = -\frac{(-4-3)\,3 - (1+3\cdot\frac{3}{2})9}{(3)^2} = \frac{47}{6}$$

## 7.3 נקודות קיצון של פונקציות בשני משתנים

**תזכורת.**

תהי $f(x,y)$ פונקציה המוגדרת בתחום $D$. נאמר כי הנקודה $(x_0,y_0)$ היא :

- **מינימום מקומי** של $f$, אם קיימת סביבה של הנקודה $(x_0,y_0)$, עבורה מתקיים $f(x_0,y_0) \le f(x,y)$.
- **מקסימום מקומי** של $f$, אם קיימת סביבה של הנקודה $(x_0,y_0)$, עבורה מתקיים $f(x_0,y_0) \ge f(x,y)$.

ע"פ משפט Fermat, אם $f_x, f_y$ קיימות בנקודת קיצון $(x_0,y_0)$, אזי הן חייבות להתאפס שם, כלומר $\nabla f(x_0,y_0) = 0$. נגדיר נקודה קריטית (או נקודה חשודה לקיצון) להיות נקודה פנימית של התחום $D$ בה $\nabla f = 0$, או שלפחות אחת מהנגזרות החלקיות $f_x, f_y$ אינן קיימות בה.

**הערה.**

- ייתכן שלפחות אחת מהנגזרות החלקיות אינה קיימת בנקודת קיצון.
- ייתכן גם כי הנגזרות מתאפסות בנקודה שאינה קיצון.
- בשבוע הבא נלמד איך להבין אם אכן מדובר בקיצון אמיתי או לא, ואם כן, מאיזה סוג. כרגע נראה כמה

דוגמאות למציאת חשודות.

- נקרא ל $(x_0,y_0)$ **נקודת אוכף** של $f$, אם $\nabla f(x_0,y_0)=0$ ובכל סביבה של הנקודה $(x_0,y_0)$, קיימות $(x,y)$ **עבורן** $f(x_0,y_0)\leq f(x,y)$, **וקיימות** $(x,y)$ **עבורן** $f(x_0,y_0)\geq f(x,y)$ .

### תרגיל 7.3.1.

מצאו את החשודות לקיצון של הפונקציה $f(x,y)=x\sqrt{y-1}-2x$ בתחום הגדרתה.

**פתרון התרגיל:**

נחשב את הנגזרות החלקיות

$$
\begin{aligned}
f_x =& \sqrt{y-1}-2 \\
f_y =& \frac{x}{2\sqrt{y-1}}
\end{aligned}
$$

זאת אומרת שכאשר $y=1$ הנגזרת החלקית לפי $y$ אינה מוגדרת (למרות שזה אכן בתחום ההגדרה של $f$).

בנוסף, נבדוק התאפסות:

$$
\begin{aligned}
f_x = \sqrt{y-1}-2 =& 0 \\
f_y = \frac{x}{2\sqrt{y-1}} =& 0
\end{aligned}
$$

מהמשוואה השנייה נקבל $x=0$ ומהראשונה נקבל $\sqrt{y-1}=2 \Leftarrow y-1=4 \Leftarrow y=5$. סך הכול קיבלנו שהחשודות לקיצון הן כל הנקודות מהצורה $(x,1)$ והנקודה הבודדת $(0,5)$.

### תרגיל 7.3.2.

מצאו קיצון מוחלט לפונקציה:

$$f(x,y)=x^2-2xy+2y^2-4y$$

.

**פתרון התרגיל:**

ראשית, נמצא את החשודות לקיצון. נגזור את הפונקציה ונקבל:

$$
\begin{aligned}
f_x =& 2x-2y \\
f_y =& -2x+4y-4
\end{aligned}
$$

הנגזרות החלקיות מוגדרות בכל המישור, אז נבדוק מתי הן מתאפסות:

$$
\begin{aligned}
2x-2y =& 0 \\
-2x+4y-4 =& 0
\end{aligned}
$$

מהמשוואה הראשונה לקבל ש-$x=y$, אז נציב במשוואה השנייה ונקבל

$$\begin{aligned} -2x+4x-4 =&0 \\ 2x =&4 \\ x =&2 \end{aligned}$$

ולכן הנקודה הקריטית היחידה היא $(2,2)$.
שימו לב - זה לא אומר כלום עדיין! אנחנו נוכיח ידנית שזוהי אכן נקודת קיצון (מוחלטת) של הפונקציה. כלומר, ננסה להוכיח שבה מתקבל הערך הקטן ביותר של הפונקציה, באמצעות השלמה לריבוע. נשים לב כי

$$\begin{aligned} f(x,y) =&x^2-2xy+2y^2-4y \\ =&x^2-2xy+y^2+y^2-4y+4-4 \\ =&(x-y)^2+(y-2)^2-4\geq -4 \end{aligned}$$

ועבור $x=y=2$ נקבל את הערך $-4$ $f(2,2)=(2-2)^2+(2-2)^2-4=-4$. הוכחנו שלכל נקודה, ערך הפונקציה גדול או שווה ל-$-4$, אך בנקודה $(2,2)$ מתקבל הערך $-4$. כעת נותר להראות שלכל נקודה אחרת מתקבל ערך גדול מ-$-4$. נשים לב ששוויון מתקיים אמ"ם שני הריבועים במשוואה מתאפסים, כלומר

$$\begin{aligned} x =&y \\ y =&2 \end{aligned}$$

ואז $x=y=2$. כלומר הנקודה היחידה שבה מתקבל הערך המינימלי היא $(2,2)$ ולכן זהו מינימום מוחלט.

הערה.

בדרך כלל לא נוכל לעשות טריק כזה, ולכן נזדקק לכלים מורכבים יותר על מנת לסווג נקודות קיצון.

# תרגול שמיני

## 8.1 כופלי לגרנז' עם אילוץ יחיד

**רעיון.**

נניח ויש לנו פונקציה $f(x,y)$, כעת אנו יודעים למצוא לה ערכי קיצון בתחום הגדרתה.
בעיה נוספת שאנו עלולים להיתקל בה היא מה קורה אם אנו מגבילים את $f(x,y)$ לתת-קבוצה של תחום הגדרתה, ואז שואלים על נקודות קיצון בקבוצה הזאת?

**תרגיל 8.1.1.**

הוכיחו או הפריכו, תהא $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ פונקציה, ותהא קבוצה $D_1 \subset D$, אז אם ל$f$ נקודת מינימום ב$x_0$ תחת ההגבלה של $D_1$, אז $x_0$ נקודת קיצון מקומית של $f$.

**<u>פתרון התרגיל:</u>**

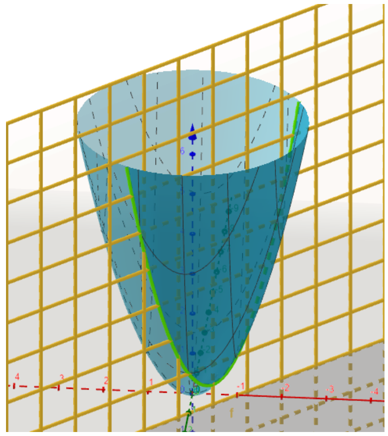
הטענה לא נכונה, נתבונן ב $f(x,y) = x^2 + y^2$ בתחום $D = \mathbb{R}^2$, יש לה נקודת קיצון יחידה ב$(0,0)$, אבל בתחום $D_1 = \{(x,y) | y = x+1\}$, הפונקציה מקבלת את הצורה:

$$f(x,y) = x^2 + (x+1)^2 = 2x^2 + 2x + 1$$

שזו פונקציה עם נקודת קיצון יחידה:

$$\begin{cases} \left(2x^2 + 2x + 1\right)' = 0 \implies 4x = 2 \implies x = \frac{1}{2} \\ y = x + 1 \end{cases} \implies (x,y) = \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$$

, שכמובן לא נקודת קיצון של $f$, נוכל לראות מה קורה פה אם נשרטט את הגרף של הפונקציה, יחד עם הקבוצה $x = y + 1$.



**תזכורת.**

(כופלי לגרנז' של פונקציה עם 2 משתנים ואילוץ יחיד) אנחנו מתעניינים בפונקציה גזירה ברציפות $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ תחת אילוץ "נחמד" - כלומר האילוץ $g(x,y) = c$ עבור $g$ גזירה ברציפות.
נחלק ל3 מקרים:

1. אז במקרה הטוב, אם $g(x,y)$ גרף של פונקציה $y = y(x)$ (כמו שעשינו בתרגיל הקודם, בו $g(x,y) = y - (x+1)$) אז אפשר פשוט להציב את $y(x)$ ב $f(x,y)$, כלומר $\eta(x) = f(x, y(x))$ ואז קיבלנו פונקציה במשתנה יחיד, ואפשר לגזור והכל.

2. במקרה השני, שהוא גם מקרה טוב, הוא שהקבוצה $g(x,y) = 0$ זאת עקומה $\gamma(t)$, אז נוכל להציב ולקבל שוב פונקציה במשתנה אחד, $\eta(t) = f(\gamma(t))$ למשל הקבוצה:

$$g(x,y) = x^2 + y^2 - 1$$

היא לא גרף של פונקציה, אבל, $g(x,y) = 0$ זאת עקומה עם הפרמטריזציה:

$$\gamma(t) = (\cos(t), \sin(t))$$

עבור $0 \leq t < 2\pi$.

3. במקרה הקשה יותר, נצטרך להשתמש בכופלי לגרנז':
יהיו $f, g : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ פונקציות גזירות ברציפות, אם $P = (x_0, y_0)$ נקודה פנימית של $D$ המקיימת $g(P) = 0, \nabla g(P) \neq 0$, ו $P$ נקודת קיצון של $f$ תחת האילוץ $g(x,y) = 0$ אז קיים $\lambda \in \mathbb{R}$ כך ש:

$$\nabla f(p) = \lambda \nabla g(p)$$

ו$\lambda$ נקרא כופל לגרנז'.

**הערה.**

עוד דרך לנסח את התנאי האחרון היא להגדיר <u>פונקצית לגרנז'</u>:

$$L(x,y,\lambda)=f(x,y)-\lambda g(x,y)$$

ואז:

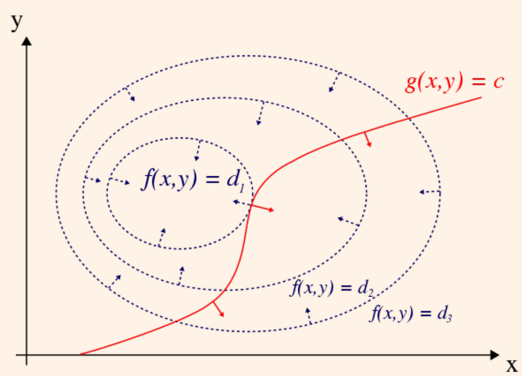
$$\begin{cases}\nabla f(x,y)=\lambda\nabla g(x,y)\\ g(x,y)=0\end{cases}\iff\begin{pmatrix}f_x(x,y)-\lambda g_x(x,y)\\ f_y(x,y)-\lambda g_y(x,y)\\ g(x,y)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\iff\nabla L(x,y,\lambda)=0$$

**הערה.**

את הנקודות בהן $\nabla g=0$ יש לבדוק פרטנית.

**רעיון.**

נרצה למצוא מינימום ל $f(x,y)$, אז נכול לשרטט קווי גובה $f(x,y)=c_k$, (בלוח $x,y$) אז אנחנו רוצים למצוא את ה$c_k$ המינימלי שנחתח עם $g(x,y)=0$, וזה ייקרה מתי שהקבוצה $g(x,y)=0$ משיקה ל $f(x,y)=c_k$, כלומר, גיאומטרית הגרדיאנטים שלהם מקבילים.




**תרגיל 8.1.2.**

(תרגיל ממבחן) מצאו מינימום ומקסימום מוחלטים עבור הפונקציה $f(x,y)=e^{-xy}$ באליפסה $x^2+4y^2\leq 1$.

<u>**פתרון התרגיל:**</u>

(כופלי לגרנז' של פונקציה עם 3 משתנים ושני אילוצים) התחום $x^2+4y^2\leq 1$ חסום וסגור, ובו (ובעצם לכל $\mathbb{R}^2$) $f$ רציפה, כלומר עפ"י משפט ויירשטראס קיים בו מינימום ומקסימום מוחלט.

נקודות הקיציון יכולות להיות או בפנים האליפסה, $x^2+4y^2<1$, או בשפת האליפסה, $x^2+4y^2=1$, נמצא את נקודות הקיצון ב2 הקבוצות הללו.

1. בפנים האליפסה, נקודות הקיצון חייבות לאפס את $\nabla f$, כלומר:

$$\nabla f(x,y)=\begin{pmatrix}-ye^{xy}\\-xe^{xy}\end{pmatrix}=0 \iff (x,y)=(0,0)$$

2. כעת נחפש נקודות קיצון על שפת האליפסה, כלומר על $x^2+4y^2=1$, נשים לב שאם נגדיר $g(x,y)=x^2+4y^2-1$, אז אנו מחפשים נקודות קיצון ל$f$, תחת האילוץ $g(x,y)=0$, נגדיר:

$$L(x,y,\lambda)=f(x,y)-\lambda g(x,y)=e^{-xy}-\lambda(x^2+4y^2-1)$$

ואז:

$$\nabla L=0 \iff \begin{cases}L_x=-ye^{xy}-\lambda(2x)=0\\L_y=-xe^{xy}-\lambda(8y)=0\\L_\lambda=x^2+4y^2-1=0\end{cases}$$

אם $x=0$, אז $y=0$ כי:

$$L_x|_{x=0}=-y$$

$(0,0)$ מקיימת $L_\lambda(0,0)\neq 0$, אז אפשר לחלק ב$x$ וב$y$ את המשוואות:

$$\begin{cases}-\frac{y}{x}e^{xy}-2\lambda=0\\-\frac{x}{y}e^{xy}-8\lambda=0\\x^2+4y^2-1=0\end{cases} \implies \begin{cases}-4\frac{y}{x}e^{xy}-8\lambda=0\\-\frac{x}{y}e^{xy}-8\lambda=0\\x^2+4y^2-1=0\end{cases} \implies \begin{cases}-4\frac{y}{x}e^{xy}=8\lambda\\-\frac{x}{y}e^{xy}=8\lambda\\x^2+4y^2-1=0\end{cases}$$

$$\implies 4\frac{y}{x}e^{xy}=\frac{x}{y}e^{xy} \implies x^2=4y^2$$

נציב במשוואה השלישית:

$$\begin{cases}x^2+4y^2-1=0\\x^2=4y^2\end{cases} \implies 2x^2-1=0 \implies x=\pm\frac{1}{\sqrt{2}} \implies y^2=\frac{1}{8} \implies y=\pm\frac{1}{2\sqrt{2}}$$

בעצם קיבלנו 4 נקודות חשודות:

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{2\sqrt{2}}\right),\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{2\sqrt{2}}\right),\left(\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{2\sqrt{2}}\right),\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)$$

בנפרד נבדוק את הנקודות המקיימות $g(x,y)=0,\nabla g(x,y)=0$:

$$\nabla g(x,y)=0 \implies \begin{pmatrix}2x\\8y\end{pmatrix}=0 \implies (x,y)=(0,0)$$

אבל $g(x,y)=-1\neq 0$.

נחשב את $f(x,y)$ בכל הנקודות החשודות:

$$f(0,0)=1$$

$$f\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)=e^{-\frac{1}{4}}$$

$$f\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)=e^{\frac{1}{4}}$$

$$f\left(\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)=e^{\frac{1}{4}}$$

$$f\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)=e^{-\frac{1}{4}}$$

כלומר המינימום מתקבל ב $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)$ , $\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)$, והמקסימום ב$\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)$ , $\left(\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)$.

### תרגיל 8.1.3.

תהא $f(x,y):D\subset\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ פונקציה אי-שלילית ($f(x,y)\geq 0$), הוכיחו כי $(x_0,y_0)$ נקודת קיצון מקומית $f(x,y)$ אמ"מ היא נקודות קיצון מקומית (מאותו סוג) של $g(x,y)=(f(x,y))^2$.
בנוסף הוכיחו כי $(x_0,y_0)$ נקודת קיצון גלובלית של $f(x,y)$ אמ"מ היא נקודת קיצון גלובלית של $g(x,y)$.

**פתרון התרגיל:**

הערה.

נוכיח רק עבור נקודת מינימום, המקרה של נקודת מקסימום זהה לחלוטין.

נניח כי $(x_0,y_0)$ נקודת מינימום מקומית של $f$, נסמן $f(x_0,y_0)=c$, אז קיימת סביבה $D_1$ כך ש:

$$\forall(x,y)\in D_1 \implies 0\leq f(x,y)\leq f(x_0,y_0)$$

ובכלל שהכל חיובי זה גורר:

$$\forall(x,y)\in D_1, 0\leq (f(x,y))^2\leq (f(x_0,y_0))^2$$

כלומר $(x_0,y_0)$ נקודת מינימום מקומית של $(f(x,y))^2$.
הכיוון השני דומה מאוד, אם $(x_0,y_0)$ מינימום מקומית של $g(x,y)$, אז קיימת סביבה $D_2$ בה:

$$\forall(x,y)\in D_2, 0\leq g(x,y)\leq g(x_0,y_0)$$

אבל בכלל שהכל חיובי:

$$\forall(x,y)\in D_2, 0\leq \underbrace{\sqrt{g(x,y)}}_{f(x,y)}\leq \underbrace{\sqrt{g(x_0,y_0)}}_{f(x_0,y_0)}$$

כלומר $(x_0, y_0)$ מינימום מקומית של $f(x,y)$.
עבור מינימום גלובלית ההוכחה מאוד דומה (אנא השלימו את הפרטים)

$$\forall (x,y) \in D, f(x,y) \leq f(x_0, y_0)$$
$$\Updownarrow$$
$$\forall (x,y) \in D, (f(x,y))^2 \leq (f(x_0, y_0))^2$$

### תרגיל 8.1.4.

האם הטענה הקודמת עובדת עבור $f(x,y)$ שאינה אי-שלילית?

**פתרון התרגיל:**
לא, למשל עבור $f(x,y) = x$, אין לה נקודות קיצון ב$\mathbb{R}^2$, אבל ל$(f(x,y))^2 = x^2$ יש נקודת מינימום גלובלי ב $(0,0)$ (ולמעשה בכל $(0,y)$).

### תרגיל 8.1.5.

(תרגיל ממבחן)
יהא $a > 1$, על המעגל $x^2 + y^2 = 5a^2$, מהי הנקודה הקרובה ביותר ל$A = (1,2)$?

**פתרון התרגיל:**
המרחק של $(x,y)$ מ$A$ היא הפונקציה:

$$\tilde{f}(x,y) = \sqrt{(x-1)^2 + (y-2)^2}$$

אז בעצם אנו שואלים, מהם נקודות הקיצון של $\tilde{f}(x,y)$ שמקיימות:

$$x^2 + y^2 = 5a^2 \iff g(x,y) := x^2 + y^2 - 5a^2, g(x,y) = 0$$

מהתרגיל הקודם, אנו יודעים שהשאלה הזאת שקולה למהן נקודת הקיצון של $f(x,y) = \left(\tilde{f}(x,y)\right)^2 = (x-1)^2 + (y-2)^2$ עבור $g(x,y) = 0$.
וזאת שאלה שנפתור בעזרת כופלי לגרנז'.
פונקציה הלגרנז' שלנו היא:

$$L(x,y,\lambda) = f(x,y) - \lambda g(x,y) = (x-1)^2 + (y-2)^2 - \lambda \left(x^2 + y^2 - 5a^2\right)$$

כלומר:

$$\nabla L(x,y,\lambda) = 0 \iff \begin{cases} 2(x-1) - \lambda(2x) = 0 \\ 2(y-2) - \lambda(2y) = 0 \\ x^2 + y^2 - 5a^2 = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} 2(x-1) = 2\lambda x \\ 2(y-2) = 2\lambda y \\ x^2 + y^2 - 5a^2 = 0 \end{cases}$$

מהמשוואה הראשונה והשנייה אנו יודעים כי $x \neq 0$ וגם $y \neq 0$, אז קיבלנו:

$$\frac{2x-2}{x} = \lambda = \frac{2y-4}{y} \implies 2xy - 2y = 2xy - 4x \implies y = 2x$$

נציב במשוואה השלישית:

$$x^2 + (2x)^2 - 5a^2 = 0 \implies 5x^2 = 5a^2 = x = \pm a$$

כלומר יש לנו 2 נקודות חשודות לקיצון תחת האילוץ:

$$(a, 2a), (-a, -2a)$$

נבדוק מתי $\nabla g(x, y) = 0$, ואכן:

$$\nabla g(x, y) = 0 \iff \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \end{pmatrix} = 0 \iff x = y = 0$$

אבל $g(0, 0) = -5a^2 \neq 0$.
נבדוק את נקודות הקיצון שלנו:

$$f(a, 2a) = (a-1)^2 + (2a-2)^2$$

$$f(-a, -2a) = (-a-1)^2 + (-2a-2)^2 = (a+1)^2 + (2a+2)^2 > f(a, 2a)$$

נשים לב כי הקבוצה $g(x, y) = 0$ היא סגורה וחסומה, וכי הפונקציה $f(x, y)$ רציפה בכל $\mathbb{R}^2$, לכן עפ"י משפט ווירשטראס, $f(x, y)$ מקבלת את הערכי הקיצון שלה תחת האילוץ $g(x, y) = 0$. כלומר, $(-a, -2a)$ היא המקסימום הגלובלי של $f$ - כלומר הנקודה הרחוקה ביותר מ$A$, ו$(a, 2a)$ היא המינימום הגלובלי, כלומר הנקודה הקרובה ביותר.

### תרגיל 8.1.6.

מצאו את ארכי הצלעות של מלבן המקביל לצירים בעל שטח מקסימלי, התחום במעגל $x^2 + y^2 = r^2$ $(r > 0)$.

**<u>פתרון התרגיל:</u>**
נשים לב כי מלבן כנ"ל נקבע עפ"י נקודה על המעגל, כלומר, כל מלבן נחתך ב$(x, y)$ יחיד על המעגל המקיים $x \geq 0, y \geq 0$, והשטח שלו הוא $2x \cdot 2y = 4xy$.
כלומר התרגיל שלנו הוא למקסם את $f(x, y) = 4xy$ בתחום $x, y \geq 0$, תחת האילוץ $x^2 + y^2 = r^2$.
נפתור את התרגיל ב2 דרכים:

1. עם כופלי לגראנז':

$$g(x, y) = x^2 + y^2 - r^2$$

$$L(x, y, z) = 4xy - \lambda(x^2 + y^2 - r^2)$$

אז:

$$\nabla L = 0 \iff \begin{pmatrix} 4y - \lambda(2x) \\ 4x - \lambda(2y) \\ x^2 + y^2 - r^2 \end{pmatrix} = 0 \iff \begin{cases} 4y = 2x\lambda \\ 4x = 2y\lambda \\ x^2 + y^2 = r^2 \end{cases}$$

ברור כי $x = 0$ או $y = 0$ מייצגות מלבן עם שטח $0$, שאינו בעל שטח מקסימלי, לכן נניח כי $x \neq 0$ וכי $y \neq 0$:

$$\frac{4y}{2x} = \lambda = \frac{4x}{2y} \implies x = \pm y$$

נציב במשוואה השלישית ונקבל:

$$2x^2 = r^2 \implies x = \pm\frac{r}{\sqrt{2}}$$

קיבלנו 4 נקודות, רק $\left(\frac{r}{\sqrt{2}}, \frac{r}{\sqrt{2}}\right)$ בתחום שלנו (כל הנקודות נופלות על אותו מלבן) - בנוסף נשים לב כי $(0,r), (r,0)$ נקודות מינימום בתחום שלנו, אך לא קיבלנו אותן כי הן בשפה של תחום הגדרתינו $\{(x,y)|x \geq 0, y \geq 0\}$, אבל אנו יודעים שהן נקודות מינימום.

משום ש $f(x,y)$ רציפה על הקבוצה הסגורה וחסומה $g(x,y) = 0$, היא משיגה את חסמיה, כלומר המלבן הנקבע ע"י $\left(\frac{r}{\sqrt{2}}, \frac{r}{\sqrt{2}}\right)$ הוא בעל שטח מקסימלי.

2. נשים לב כי התחום שלנו, $x^2+y^2 = r^2$ הוא מסילה, $\gamma(t) = (r\cos(t), r\sin(t))$, שוב, בגלל שנקודה אחת קובעת את המלבן, מספק להתבונן על התחום $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ (רבע מעגל), כלומר, אנו רוצים למצוא את המקסימום של:

$$f(\gamma(t)) = 4r^2\cos(t)\sin(t)$$

(שוב, אנו יודעים כי $t = 0$ או $t = \frac{\pi}{2}$ נקודות מינימום, כי הן קובעות מלבן בעל שטח אפס) נגזור:

$$\frac{\partial}{\partial t} f(\gamma(t)) = 4r^2(\cos(t)\cdot\cos(t) + \sin(t)(-\sin(t))) = 4r^2\left(\cos^2(t) - \sin^2(t)\right) = 4r^2\cos(2t)$$

נשווה ל$0$ ונקבל $2t = \frac{\pi}{2} \implies t = \frac{\pi}{4}$, כלומר הנקודה שלנו היא:

$$\left(r\cos\left(\frac{\pi}{4}\right), r\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) = \left(\frac{r}{\sqrt{2}}, \frac{r}{\sqrt{2}}\right)$$

והיא מקסימום מקומית מאותה סיבה כמו בפתרון על כופלי הלגרנז'.

## 8.2 כופלי לגרנז' עם שני אילוצים

תזכורת.

עבור פונקציה $f(x,y,z):D\subset\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$, אם נרצה למצוא נקודות קיצון של $f(x,y,z)$ תחת 2 אילוצים:

$$g_1(x,y,z)=0$$
$$g_2(x,y,z)=0$$

אם $P$ נקודת קיצון של $f(x,y,z)$ בכפוף לאילוצים וגם מתקיים כי, $P$ בפנים תחום הגדרת $f,g_1,g_2$ וגם $\nabla g_1(P),\nabla g_2(P)$ ווקטורים בת"ל.

תזכורת.

שני ווקטורים $v_1,v_2$ נקראים בת"ל הם כפל בסקלר אחד של השני, בפרט, אם אחד הוקטורים הוא ווקטור האפס, אז הם בת"ל.
אם $v_1,v_2\in\mathbb{R}^3$, אז יש לנו מכפלה ווקטורית, אז $v_1,v_2$ בת"ל אמ"מ $v_1\times v_2\neq 0$.

אז קיימים $\lambda_1,\lambda_2\in\mathbb{R}$ כך ש:
$$\nabla f(p)=\lambda_1\nabla g_1(p)+\lambda_2\nabla g_2(p)$$

או באופן שקול:

$$L(x,y,z,\lambda_1,\lambda_2)=f(x,y,z)-\lambda_1 g_1(x,y,z)-\lambda_2 g_2(x,y,z)$$

מקיימת $\nabla L=0$.
כלומר, הנקודות החשודות שלנו הן הנקודות המקיימות $\nabla L=0$ או הנקודות המקיימות $\nabla g_1(p),\nabla g_2(p)$ ת"ל וגם $g_1(p)=g_2(p)=0$

תרגיל 8.2.1.

מצא מינימום ומקסימום מוחלטים עבור $f(x,y,z)=xy+z^2$, על המעגל הנוצר מחיתוך המישור $y-x=0$ והכדור $x^2+y^2+z^2=4$.

**פתרון התרגיל:**

נפעיל כופלי לגנרז' עם
$$\begin{aligned} f(x,y,z)&=xy+z^2\\ g_1(x,y,z)&=y-x\\ g_2(x,y,z)&=x^2+y^2+z^2-4\end{aligned}\ :$$

$$L(x,y,z,\lambda_1,\lambda_2)=xy+z^2-\lambda_1(y-x)-\lambda_2(x^2+y^2+z^2-4)$$

אז:

$$\nabla L=\begin{pmatrix}y-\lambda_1-2x\lambda_2\\x+\lambda_1-2y\lambda_2\\2z-2z\lambda_2\\y-x\\x^2+y^2+z^2-4\end{pmatrix}=0\iff\begin{cases}y-\lambda_1=2x\lambda_2\\y+\lambda_1=2y\lambda_2\\2z=2z\lambda_2\\y=x\\x^2+y^2+z^2=4\end{cases}$$

מחיבור המשוואה הראשונה, השנייה, יחד עם $y=x$ נקבל:

$$2x=4x\lambda_2$$

אם $x=y=0$ אז $z=\pm2$, אחרת נקבל $\lambda_2=2$, אבל אז מהמשוואה השלישית $z=0$, ואז $y=x=\pm\sqrt{2}$.
מתי $\nabla g_1,\nabla g_2$ בת"ל?

$$\nabla g_1=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix},\nabla g_2=\begin{pmatrix}2x\\2y\\2z\end{pmatrix}$$

אז או שאחד הווקטורים אפס, כלומר $\nabla g_2=0$, אבל אז $x=y=z=0$, שלא מקיים את האילוץ $g_2=0$,
או ש:

$$\exists\alpha\neq0,\nabla g_1=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}=\alpha\nabla g_2=\begin{pmatrix}2x\\2x\\2z\end{pmatrix}\implies\begin{cases}2x\alpha=-1\\2x\alpha=1\\2z\alpha=0\end{cases}\implies -1=1$$

וקיבלנו סתירה. כלומר יש לנו 4 נקודות חשודות:

$$\begin{aligned}P_1&=(0,0,2)\implies f(P_1)=4\\P_2&=(0,0,-2)\implies f(P_2)=4\\P_3&=\left(\sqrt{2},\sqrt{2},0\right)\implies f(P_3)=2\\P_4&=\left(-\sqrt{2},-\sqrt{2},0\right)\implies f(P_4)=2\end{aligned}$$

הקבוצה $g_1(x,y,z)=g_2(x,y,z)=0$ סגורה כחיתוך של סגורות וחסומה כי (כי היא מוכלת בכדור $x^2+y^2+z^2=4$) ולכן, משום ש $f$ רציפה, היא מקבלת את חסמיה בקבוצה סגורה וחסומה, כלומר $P_3,P_4$ נקודות מינימום גלובלי ו $P_1,P_2$ נקודות מקסימום גלובלי.

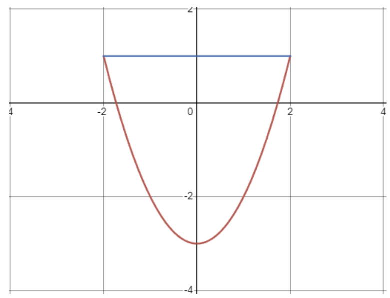
## תרגיל 8.2.2.

מצאו את נקודות הקיצון המוחלט עבור הפונקציה $f\left(x,y\right)=xy$ בתחום החסום ע"י $y=x^2-3$ ,$y=1$.

**פתרון התרגיל:**

נשים לב שיש לנו תחום $D$ סגור, ראשית נחפש נקודות קיצון פנימיות, כמובן גזירה ברציפות בכל $\mathbb{R}^2$, ולכן נקודת קיצון בפנים $D$ מאפסת את $\nabla f=\begin{pmatrix}y\\x\end{pmatrix}$, כלומר הנקודה החשודה היחידה בפנים התחום היא $P_1=$

.$(0,0)$
נחלק את השפה שלנו ל2 חלקים, $B_1=\{(x,1)|x\in[-2,2]\}$, ו $B_2=\{(x,x^2-3)|x\in[-2,2]\}$:



על $B_1$ הפונקציה שלנו היא $f(x,1)=x$, שמקבלת נקודת קיצון ב $P_2=(2,1),P_3=(-2,1)$,
על $B_2$ הפונקציה שלנו היא:

$$f(x,x^2-3)=x^3-3x$$

נגזור ונשווה ל0 ונקבל

$$3x^2-3=0\implies x^2-1=0$$

כלומר $P_4=(1,-2),P_5=(-1,-2)$ (נקודות השפה $x=\pm2$ הן $P_2,P_3$).
כלומר סה"כ יש לנו 5 נקודות חשודות, נבדוק אותן:

$$\begin{array}{l}P_1=(0,0)\Rightarrow f(0,0)=0\\P_2=(2,1)\Rightarrow f(2,1)=2\\P_3=(-2,1)\Rightarrow f(-2,1)=-2\\P_4=(1,-2)\Rightarrow f(1,-2)=-2\\P_5=(-1,-2)\Rightarrow f(-1,-2)=2\end{array}$$

$f$ רציפה בתחום סגור וחסום $D$, ולכן מסיגה את חסמיה, כלומר $P_2,P_5$ נקודות מקסימום מוחלט של $f$ בתחום $D$ ו $P_3,P_4$ נקודות מינימום מוחלט של $f$ בתחום $D$.

### תרגיל 8.2.3.

(שאלה ממבחן) מצא את נקודות הקיצון המוחלטות עבור הפונקציה $f(x,y)=(x^2+y^2)^2+x^2-y^2$ בתחום $x^2+y^2\le1$.

**<u>פתרון התרגיל:</u>**
ראשית, נחפש נקודות קיצון בפנים המעגל $x^2+y^2<1$, הפונקציה גזירה ברציפות שם אז:

$$\nabla f=\begin{pmatrix}4x(x^2+y^2)+2x\\4y(x^2+y^2)-2y\end{pmatrix}=0\implies\begin{cases}4x(x^2+y^2)+2x=4x\left(x^2+y^2+\frac12\right)=0\\4y(x^2+y^2)-2y=4y\left(x^2+y^2-\frac12\right)=0\end{cases}$$

מהמשוואה הראשונה נקבל $x=0$ ($x^2+y^2+\frac12\neq0$ לכל $(x,y)\in\mathbb{R}^2$), נציב במשוואה השנייה $x=0$

ונקבל:

$$4y\left(y^2-\frac{1}{2}\right)=0 \implies y=0 \text{ או } y=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$$

כלומר קיבלנו 3 נקודות קיצון אפשריות:

$$P_1=(0,0)\,,P_2=\left(0,\frac{1}{\sqrt{2}}\right),P_3=\left(0,-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

שלושת הנקודות מקיימות $f(P_1),f(P_2),f(P_3)<1$ ולכן הן נקודות פנימיות של התחום, נבדוק נקודות קיצון בשפה, כלומר עבור $x^2+y^2=1$, נשים לב שלקבוצה זאת קיימת פרמטריזציה, כלומר:

$$\gamma(t)=(\cos(t),\sin(t))$$

עבור $t\in[0,2\pi)$, נציב:

$$f(\gamma(t))=(\cos^2(t)+\sin^2(t))^2+\cos^2(t)-\sin^2(t)=1+\cos(2t)$$

נגזור ונשווה לאפס:

$$\frac{\partial}{\partial t}f(\gamma(t))=-2\sin(2t)=0$$

למשוואה $\sin(2t)=0$ יש 4 פתרונות עבור $t\in[0,2\pi)$:

$$\begin{array}{l} t_0=0\\ t_1=\frac{\pi}{2}\\ t_2=\pi\\ t_3=\frac{3\pi}{2}\end{array} \implies \begin{array}{l}\gamma(t_0)=(1,0)\\ \gamma(t_1)=(0,1)\\ \gamma(t_2)=(-1,0)\\ \gamma(t_3)=(0,-1)\end{array}$$

כלומר יש לנו סה"כ 7 נקודות חשודות לקיצון מוחלט:

$$\begin{array}{l} P_1=(0,0)\\ P_2=\left(0,\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\\ P_3=\left(0,-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\\ P_4=(1,0)\\ P_5=(0,1)\\ P_6=(-1,0)\\ P_7=(0,-1)\end{array} \implies \begin{array}{l} f(P_1)=0\\ f(P_2)=f(P_3)=-\frac{1}{4}\\ f(P_4)=f(P_6)=2\\ f(P_5)=f(P_7)=0\end{array}$$

משום ש $f$ רציפה בתחום הסגור וחסום $x^2+y^2\leq 1$, היא מקבלת בו את חסמיה, כלומר $P_2,P_3$ מינימום ו$P_4,P_6$ מקסימום.

## תרגיל 8.2.4.

מצאו נקודות קיצון ל$f(x,y)=\sqrt{\frac{1}{x^2+y^2+1}}$ בתחום $x^2+y^2\leq 1$.

**פתרון התרגיל:**

נשים לב כי $x^2+y^2$ מופיעים יחד כמקשה אחת, כלומר נוכל לתרגם את השאלה לקואורדינטות פולריות:

$$F(r,\theta)=\sqrt{\frac{1}{r^2+1}}$$

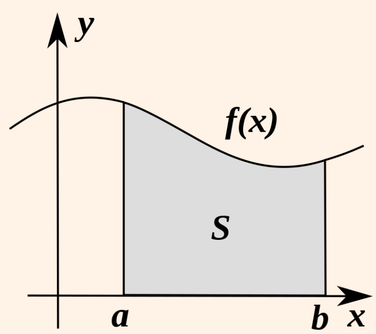
בתחום $0\le r\le 1$. ברור שהפונקציה יורדת ככל ש $r$ גדל, כלומר היא מקבלת מקסימום כאשר $r=0$, כלומר $x=y=0$ ומינימום עבור $r=1$, כלומר כל $(x,y)$ המקיימים $x^2+y^2=1$.

## *תרגול תשיעי*

## 9.1 אינטגרל כפול במלבן ומשפט פוביני

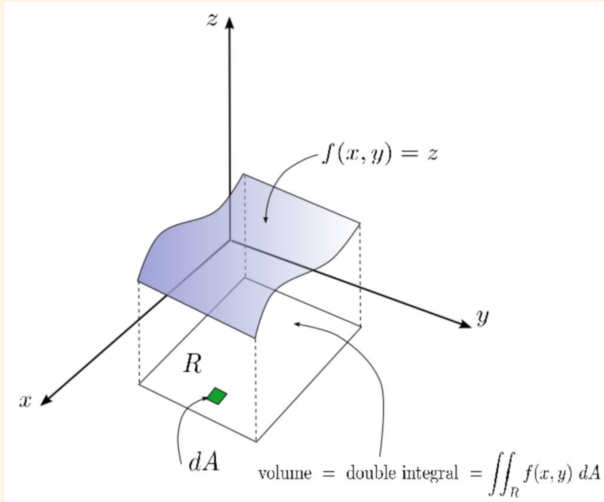
רעיון.

כמו שאינטגרל רגיל עונה על השאלה הבאה, בהנתן $f:[a,b]\to\mathbb{R}^+$, אינטגרבילית, $\int_a^b f(x)\,dx$ הוא השטח הכלוא תחת גרף הפונקציה, מעל ציר ה-$x$, בין $x=a$ לבין $x=b$:




אותה שאלה נוכל לשאול על נפח שכלוא תחת גרף של פונקציה $f:D\subset\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^+$, כלומר, אם $D=[a,b]\times[c,d]=\{(x,y)|a\le x\le b \text{ וגם } c\le y\le d\}\subset\mathbb{R}^2$ מלבן, נחשב את הנפח הזה בעזרת אינטגרל כפול:

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy$$




**הערה.**

ההגדרה הפורמלית של אינטגרל כפול היא בעזרת התכנסות של סכומי רימן, החומר הזה לא יועבר במלואו בתרגול, אבל פונקציה $f(x,y)$ נקראת אינטגרבילית אם הסכומים האלה מתכנסים, כמה משפטים שימושיים:

1. אם $f(x,y)$ אינטגרבילית ב$D$ אז היא חסומה שם.
2. אם $f(x,y)$ רציפה ב$D$ אז היא אינטגרבילית ב$D$.
3. אם $f(x,y)$ רציפה ב$D$ פרט לקבוצה בעלת שטח אפס כלומר $f(x,y)$ לא רציפה רק לאורך מספר עקומים בודדים, אז $f(x,y)$ אינטגרבילית ב$D$.
4. אם $f(x,y), g(x,y)$ אינטגרבילית ב$D$, אז עבור $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $h(x,y) = \alpha f(x,y) + \beta g(x,y)$, אינטגרבילית ומתקיים:
$$\iint_D \alpha f(x,y) + \beta g(x,y)\,dx\,dy = \alpha \iint_D f(x,y)\,dx\,dy + \beta \iint_D g(x,y)\,dx\,dy$$
5. אם $D, D'$ תחומים זרים (כלומר $D \cap D' = \emptyset$) ו $f(x,y)$ אינטגרבילית ב $D, D'$ אז היא אינטגרבילית ב$D \cup D'$ ומתקיים:
$$\iint_{D\cup D'} f(x,y)\,dx\,dy = \iint_D f(x,y)\,dx\,dy + \iint_{D'} f(x,y)\,dx\,dy$$

איך מחשבים אינטגרל כפול?

**תזכורת.**

תהא $f(x,y)$ אינטגרבילית במלבן $D=[a,b]\times[c,d]$, אם לכל $x\in[a,b]$ מוגדר:

$$F(x)=\int_c^d f(x,y)\,dy$$

אז מתקיים:

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy=\int_a^b F(x)\,dx=\int_a^b\left(\int_c^d f(x,y)\,dy\right)\,dx$$

או באופן דומה, אם $G(y)=\int_a^b f(x,y)\,dx$, אז:

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy=\int_c^d G(y)\,dy=\int_c^d\left(\int_a^b f(x,y)\,dx\right)\,dy$$

זה נקרא <u>משפט פוביני</u> הניסוח המלא הוא:

**משפט 9.1.1 – (משפט פוביני).**

אם $f(x,y)$ רציפה במלבן $D=[a,b]\times[c,d]$ אז:

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy=\int_a^b\left(\int_c^d f(x,y)\,dy\right)\,dx=\int_c^d\left(\int_a^b f(x,y)\,dx\right)\,dy$$

**תרגיל 9.1.1.**

חשבו את $\iint_D 3x^3y+xy^5\,dx\,dy$ עבור $D=[0,1]\times[0,\sqrt{2}]$.

<u>**פתרון התרגיל:**</u>

$f(x,y)$ רציפה, ולכן עפ"י פוביני מתקיים:

$$\iint_D 3x^3y+xy^5\,dx\,dy=\int_0^1\left(\int_3^4 3x^3y+xy^5\,dy\right)\,dx$$

נתחיל בחישוב האינטגרל הפנימי:

$$\int_3^4 3x^3y+xy^5\,dy=3x^3\left(\frac{y^2}{2}\right)+x\left(\frac{y^6}{6}\right)\Bigg|_{y=0}^{y=\sqrt{2}}=3x^3+\frac{4x}{3}$$

אז:

$$\iint_D 3x^3y + xy^5\,dx\,dy = \int_0^1 \left(\int_3^4 3x^3y + xy^5\,dy\right)\,dx = \int_0^1 \left(3x^3 + \frac{4x}{3}\right)\,dx$$
$$= 3\cdot\frac{x^4}{4} + \frac{4}{3}\cdot\frac{x^2}{2}\Big|_{x=0}^{x=1} = \frac{3}{4} + \frac{2}{3} = \frac{17}{12}$$

### תרגיל 9.1.2.

תהא $f(x,y)$ פונקציה רציפה כך ש $f(x,y) = A(x)B(y)$, הוכיחו כי:

$$\iint_{[a,b]\times[c,d]} f(x,y)\,dx\,dy = \left(\int_a^b A(x)\,dx\right)\cdot\left(\int_c^d B(y)\,dy\right)$$

**פתרון התרגיל:**
נשים לב כי בעזרת פוביני:

$$\iint_{[a,b]\times[c,d]} f(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)\,dy\right)\,dx = \int_a^b \left(\int_c^d A(x)B(y)\,dy\right)\,dx$$
$$=_\star \int_a^b A(x)\left(\int_c^d B(y)\,dy\right)\,dx = \left(\int_c^d B(y)\,dy\right)\cdot\left(\int_a^b A(x)\,dx\right)$$

כאשר ב$=_\star$ יש שימוש בכך ש$A(x)$ לא תלוי במשתנה $y$, ובלינאריות האינטגרל.

### תרגיל 9.1.3.

חשבו את $\iint_D e^{3x+6y}\,dx\,dy$ כאשר $D = [0,1]\times[0,4]$.

**פתרון התרגיל:**
נשים לב כי $e^{3x+6y} = e^{3x}e^{6y}$, אז אפשר להשתמש בתרגיל הקודם ולקבל:

$$\iint_D e^{3x+6y}\,dx\,dy = \left(\int_0^1 e^{3x}\,dx\right)\left(\int_0^4 e^{6y}\right) = \left(\frac{e^{3x}}{3}\Big|_{x=0}^{x=1}\right)\left(\frac{e^{6y}}{6}\Big|_{y=0}^{y=4}\right)$$
$$= \left(\frac{1}{3}e^3 - \frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{6}e^{24} - \frac{1}{6}\right)$$

## 9.2 אינטגרציה בתחום פשוט

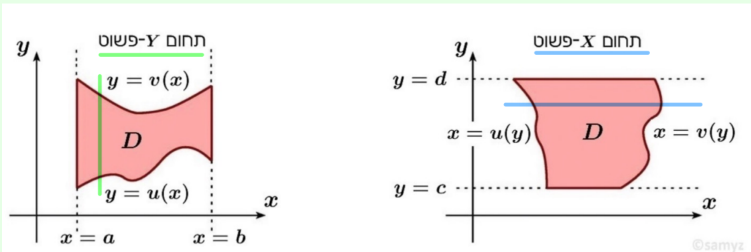
**הגדרה 9.2.1 – (תחום פשוט).**

תחום חסום וסגור $D \subset \mathbb{R}^2$ נקרא <u>פשוט ביחס לציר $y$</u> אם הוא מהצורה:

$$D = \{(x, y)|a \leq x \leq b, v(x) \leq y \leq u(x)\}$$

עבור פונקציות $v, u : [a, b] \to \mathbb{R}$ רציפות.
ובאופן דומה $D$ נקרא <u>פשוט ביחס לציר $x$</u> אם קיימות $p, q : [c, d] \to \mathbb{R}$ כך ש:

$$D = \{(x, y)|c \leq y \leq d, p(y) \leq x \leq q(y)\}$$




**משפט 9.2.1.**

תהא $f(x, y)$ אינטגרבילית בתחום $D$, אם $D = \{(x, y)|a \leq x \leq b, v(x) \leq y \leq u(x)\}$ תחום פשוט ביחס לציר $y$, אז:

$$\iint_D f(x, y) = \int_a^b \left( \int_{v(x)}^{u(x)} f(x, y)\, dy \right) dx$$

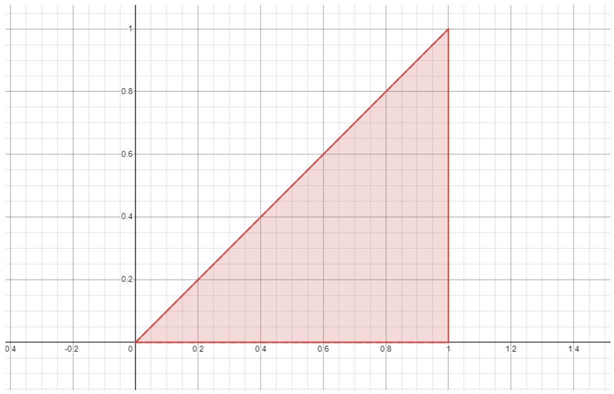
ואם $D = \{(x, y)|c \leq y \leq d, p(y) \leq x \leq q(y)\}$ תחום פשוט ביחס לציר $x$, אז:

$$\iint_D f(x, y) = \int_c^d \left( \int_{p(x)}^{q(x)} f(x, y)\, dx \right) dy$$

**תרגיל 9.2.1.**

חשבו את $\iint_D \frac{\sin x}{x}\, dx\, dy$ עבור $D$ המשולש החסום בין $y = x$, $x = 1$ וציר ה-$x$.

<u>**פתרון התרגיל:**</u>
נתחיל בלשרטט את התחום הזה:




נשים לב כי אפשר לכתוב את התחום הזה על ידי:

$$D = \{(x,y)|0 \le x \le 1, 0 \le y \le x\}$$

כלומר, $D$ תחום פשוט ביחס לציר ה$y$ (האם הוא גם פשוט ביחס לציר ה$x$?), ולכן:

$$\iint_D f(x,y) = \int_0^1 \left( \int_0^x \frac{\sin(x)}{x} \, dy \right) \, dx = \int_0^1 \frac{\sin(x)}{x} \left( \int_0^x \, dy \right) \, dx = \int_0^1 \frac{\sin(x)}{x} \, (x) \, dx$$
$$= \int_0^1 \sin(x) \, dx = [-\cos(x)] \Big|_{x=0}^{x=1} = -\cos(1) + 1 = 1 - \cos(1)$$

תרגיל 9.2.2.

חשבו את שטח עיגול היחידה בעזרת אינטגרל כפול.

**פתרון התרגיל:**

נשים לב כי שטח עיגול היחידה הוא $\iint_D f(x,y) \, dx \, dy$ עבור $f(x,y) = 1$ ו $D$ כדור היחידה, ראשית נשים לב כי:

$$D = \left\{(x,y)|x^2 + y^2 \le 1\right\} = \left\{(x,y)|y^2 \le 1 - x^2\right\}$$
$$= \left\{(x,y)| -\sqrt{1-x^2} \le y \le \sqrt{1-x^2}, -1 \le x \le 1\right\}$$

אז:

$$\iint_D f(x,y) = \int_{-1}^1 \left( \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \, dy \right) \, dx = 2 \int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2} \, dx$$

נבצע החלפת משתנים $x = \sin(u), \frac{dx}{du} = \cos(u) \implies dx = \cos(u) \, du$, וגם

$-1 \le x \le 1 \implies -\frac{\pi}{2} < u \le \frac{\pi}{2}$, אז:

$$\begin{aligned}
2\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}\,dx &= 2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-\sin^2(u)}\cos(u)\,du = 2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}|\cos(u)|\cos(u)\,du \\
&=_\star 2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2(u)\,du = 2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1}{2}+\frac{\cos(2u)}{2}\right)du \\
&= 2\left[\frac{u}{2}+\frac{1}{4}\sin(2u)\right]\Bigg|_{u=-\frac{\pi}{2}}^{u=\frac{\pi}{2}} = \pi
\end{aligned}$$

כאשר $=_\star$ כי $\cos(u)$ חיובית בתחום.
כלומר, השטח של כדור היחידה הוא $\pi$.

### 9.2.1 החלפת סדר אינטגרציה

**תרגיל 9.2.3.**

עבור האינטגרלים הבאים, זהו כי תחום האינטגרציה הוא פשוט גם ביחס לציר $x$ וגם ביחס לציר ה$y$ והשתמשו בכך כדאי להחליף את סדר האינטגרציה.

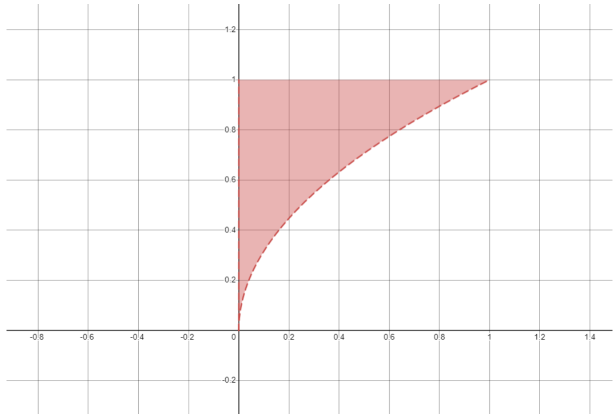
1. $\int_0^1\int_0^{y^2} f(x,y)\,dx\,dy$.
2. $\int_0^1\int_{-y}^{y} f(x,y)\,dx\,dy$.
3. $\int_0^4\int_{\sqrt{x}}^{2} f(x,y)\,dy\,dx$.

**פתרון התרגיל:**

1. התחום הוא:

$$\{(x,y)|0\le y\le 1, 0\le x\le y^2\}$$

נשרטט אותו:

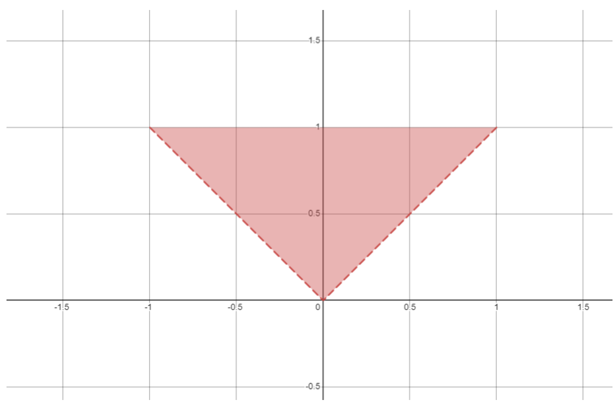



ונשים לב כי $0 \le x \le 1$ ולכן $x$ מתקיים $\sqrt{x} \le y \le 1$, כלומר:

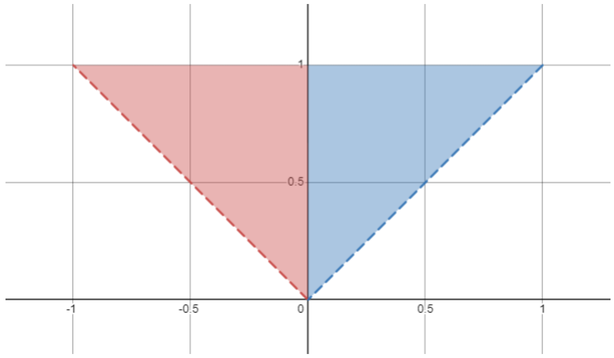
$$\int_0^1 \int_0^{y^2} f(x,y)\,dx\,dy = \int_0^1 \left(\int_{\sqrt{x}}^1 f(x,y)\,dy\right)\,dx$$

2. נשרטט את התחום:

$$\{(x,y)|0 \le y \le 1, -y \le x \le y\}$$



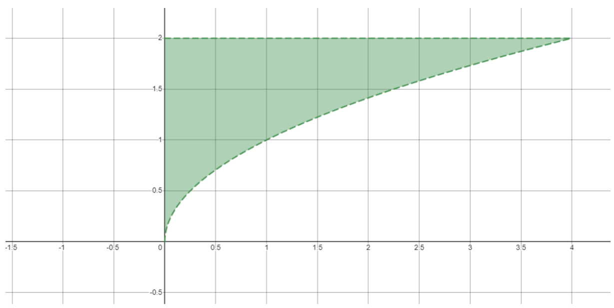

כלומר, $-1 \le x \le 1$, נחלק את התחום ל2 תחומים שונים, עבור $-1 \le x \le 0$ ועבור $0 < x \le 1$:




ונקבל כי עבור $-1 \leq x \leq 0$ מתקיים $-x < y < 1$ ועבור $0 < x \leq 1$ מתקיים $x \leq y \leq 1$, כלומר:

$$\int_0^1 \int_{-y}^{y} f(x,y)\,dx\,dy = \int_{-1}^{0} \left( \int_{-x}^{1} f(x,y)\,dy \right) dx + \int_0^1 \left( \int_x^1 f(x,y)\,dy \right) dx$$

3. נשרטט את התחום:




נשים לב כי $0 \leq y \leq 2$, ולכל $y$ קבוע, $0 \leq x \leq y^2$, אז:

$$\int_0^4 \int_{\sqrt{x}}^{2} f(x,y)\,dy\,dx = \int_0^2 \int_0^{y^2} f(x,y)\,dx\,dy$$

## 9.3 החלפת משתנים

**רעיון.**

החלפת משתנים מאפשרת לנו לפשט את התחום בו מבצעים אינטגרציה ו/או מפשטת את הפונקציה עליה מבצעים אינטגרציה.

**משפט 9.3.1 – (החלפת משתנים).**

נניח ש-$f(x,y)$ רציפה בתחום $D$ (שנתון בקואורדינטות $x,y$) ונניח שנתונה טרנספורמציה חח"ע המעתיקה תחום $\Delta$ (שנתון בקואורדינטות $u,v$) לתחום $D$, ע"י $x=x(u,v)$, $y=y(u,v)$ ב-$\Delta$ כאשר הפונקציות הן רציפות ובעלות נגזרות חלקיות רציפות. (כלומר, $\varphi:\Delta\to D$ מוגדרת על ידי $\varphi(u,v)=(x,y)$ הנ"ל) נגדיר:

$$J=\det\begin{pmatrix}\frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v}\\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v}\end{pmatrix}$$

היעקוביאן של ההעתקה $\varphi$. אזי, אם בכל $\Delta$, $J\neq 0$, אז מתקיים:

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy=\iint_\Delta f(x(u,v),y(u,v))|J|\,du\,dv$$

נוכל להגדיר גם את ההעתקה ההפוכה ל-$\varphi$: $\varphi^{-1}(x,y)=(u,v)$, כלומר $u=u(x,y)$, $v=v(x,y)$ **המתאימה לכל נקודה** $(x,y)\in D$ **נקודה אחת ויחידה** $(u,v)\in\Delta$. היעקוביאן של ההעתקה ההפוכה נתון על ידי

$$J^*=\det\begin{pmatrix}\frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y}\\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y}\end{pmatrix}$$

אפשר להוכיח ש– $J^*=J^{-1}$, כלומר $JJ^*=1$.

$$\iint_\Delta g(u,v)\,du\,dv=\iint_D g(u(x,y),v(x,y))|J^*|\,dx\,dy$$

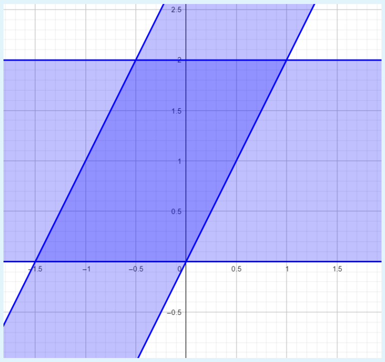
**הערה.**

- מומלץ לחשוב על התחום $D$ בתור התמונה ועל $\Delta$ בתור המקור, ולא בתור תחומים ישן / חדש. מה שהמשפט אומר זה שאפשר לחשב אינטגרל של פונקציה המוגדרת על התמונה במונחים של המקור.
- **היעקוביאן** מתאר את היחס בין אלמנט השטח במישור $xy$, לאלמנט השטח במישור $uv$, כלומר הוא מייצג את <u>רמת עיוות השטח</u> , (זהו האנלוג להחלפת $dx$ ב-$dt$ למשל כאשר מבצעים החלפת משתנים באינטגרל של משתנה יחיד).
- מסקנה מהמשפט היא שנבטא את $x,y$ במונחי $u,v$ או להיפך לפי מה שיותר נוח ונוכל לחשב את היעקוביאן המתאים.
- ניתן לבצע החלפת משתנים גם אם $J=0$, או $\varphi$ לא חח"ע <u>בקבוצה בעלת שטח אפס בלבד</u>, כלומר מספר סופי של עקומים או נקודות (בכל הדוגמאות בקורס שלנו $\varphi$ תהיה כזאת).

**דוגמא.**

חשבו את שטח המקבילית החסומה ע"י הישרים:

$$\begin{cases} y = 2x \\ y = 2x+3 \\ y = 0 \\ y = 2 \end{cases}$$




נסמן את המקבילית על ידי $D$. שימו לב ש־$D$ במישור $xy$! ועלינו לחשב את האינטגרל

$$\iint_D 1\,dx\,dy$$

כלומר כאן הפונקציה $f$ היא קבועה $f(x,y)=1$.
**נחפש כעת תחום במישור $uv$ שיהיה המקור לתמונה $D$ ויהיה נוח לחישוב אינטגרלים. כלומר תחום $\Delta$ וההעתקה שתעביר אותו ל-$D$.**
התחום בו הכי קל לנו לחשב אינטגרל כפול הינו מלבן, לכן ננסה להחליף את המשתנים בצורה כזו שהמקור שנקבל יהיה מלבני. אידיאלית נרצה לתאר את התחום כחסום בין קוי גובה של פונקציות.

$$\begin{cases} u = y-2x \\ v = y \end{cases}$$

**שימו לב:** קיבלנו למעשה את ההעתקה ההפוכה, כלומר זו שמעבירה את $(x,y)$ ל- $(u,v)$.
<u>איך יודעים אם ההעתקה היא הפוכה או לא?</u> שואלים האם ההעתקה שקיבלנו היא מ-$D$ ל-$\Delta$ (ואז הפוכה) או להיפך.
נחשב גבולות אינטגרציה :

$$\begin{array}{rcl} D & & \triangle \\ y=2x & \longrightarrow & u=0 \\ y=2x+3 & \longrightarrow & u=3 \\ y=0 & \longrightarrow & v=0 \\ y=2 & \longrightarrow & v=2 \end{array}$$

נחשב את היעקוביאן של ההעתקה $(u,v) \to (x,y)$. **אפשר לעשות זאת בשתי דרכים.**
אחת, נהפוך את ההעתקה: נציג את $x,y$ כפונקציות של המשתנים החדשים $u,v$ :

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2}(v-u) \\ y = v \end{cases}$$

נחשב :

$$J = \begin{vmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -\frac{1}{2} \neq 0, \forall (u,v) \in \Delta$$

**היעקוביאן שקיבלנו שונה מאפס** ולכן ההעתקה שהגדרנו חח"ע מקומית. לכן המשפט תקף ונקבל :

$$\iint_D dx\,dy = \iint_{\triangle} |J|\,du\,dv = \frac{1}{2}\int_{v=0}^{2}\int_{u=0}^{3} du\,dv = 3$$

**דרך שניה:** בגלל שכבר יש לנו את ההעתקה ההפוכה, אפשר לחשב את היעקוביאן שלה ולהשתמש בכך ש-$J = \frac{1}{J^{-1}}$.

$$J^* = J^{-1} = \det\begin{pmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = -2 \Longrightarrow J = -\frac{1}{2}$$

הערה.

מעבר הקואורדינטות $(x,y) \mapsto (u,v)$ צריך להיות חח"ע בתחומים המדוברים, תנאי מספיק לכך הוא $J \neq 0$ בתחום המדובר. למעשה מספיק שיהיה שונה מאפס פרט לתחומים בעלי שטח $0$, למשל נקודות וישרים על שפת התחום שלנו.

תרגיל 9.3.1.

חשבו $I = \iint_D \frac{x+3y}{x^4} e^{\frac{y}{x^3}}\,dx\,dy$ , כאשר $D$ הוא התחום החסום ע"י המשוואות $\begin{cases} x+y=1 \\ x+y=\frac{1}{2} \\ y=x^3 \\ y=4x^3 \end{cases}$.

**<u>פתרון התרגיל:</u>**

מטרתנו היא "לרבע" את התחום ולכן נבחר בהחלפת המשתנים הבאה : $\begin{cases} v = x+y \\ u = \frac{y}{x^3} \end{cases}$, נחשב את גבולות

האינטגרציה החדשים :

$$\begin{array}{rcl} D & & \Delta \\ x+y=1 & \longrightarrow & v=1 \\ x+y=\frac{1}{2} & \longrightarrow & v=\frac{1}{2} \\ y=x^3 & \longrightarrow & u=1 \\ y=4x^3 & \longrightarrow & u=4 \end{array}$$

נחשב את היעקוביאן, במקרה זה יהיה קל יותר לחשב את היעקוביאן ההופכי, שכן $u,v$ מובאים כבר כפונקציות של $x,y$ :

$$J^{-1}=\begin{vmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} -3yx^{-4} & \frac{1}{x^3} \\ 1 & 1 \end{vmatrix}= -\frac{3y}{x^4}-\frac{1}{x^3}=-\frac{(3y+x)}{x^4}$$
$$\Rightarrow |J|=\left|\tfrac{1}{J^{-1}}\right|=\tfrac{x^4}{3y+x}$$

היעקוביאן מוגדר ושונה מאפס, פרט לקבוצה משטח אפס (מהי? מצאו אותה והסבירו מדוע היא משטח אפס). נחשב:

$$\begin{aligned} I &= \iint_D \frac{x+3y}{x^4}e^{\frac{y}{x^3}}\,dx\,dy=\iint_\Delta \frac{x+3y}{x^4}e^{\frac{y}{x^3}}\,|J|\,du\,dv \\ &=_\star \iint_\Delta e^u\,du\,dv=\int_{v=\frac{1}{2}}^{1}\int_{u=1}^{4}e^u\,du\,dv=\frac{1}{2}\left(e^4-e\right) \end{aligned}$$

כאשר $=_\star$ מכיוון שלכל $(x,y)\in D$ מתקיים $\frac{3y+x}{x^4}>0$.

**הערה.**

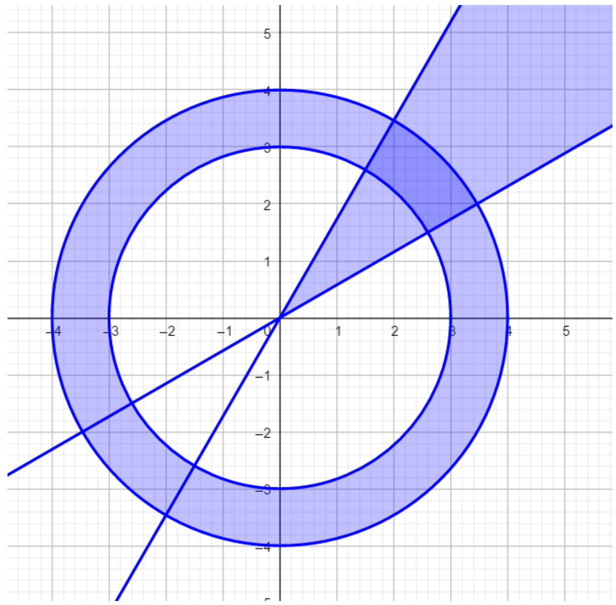
מבחינה פורמלית, ברגע שעשינו החלפת משתנים למשתנים $u,v$, לא ייתכן שיופיע באינטגרל ביטויים של $x,y$, אך כאן עשינו זאת רק בשלב ביניים כדי לראות שהביטויים מצטמצמים.

**תרגיל 9.3.2.**

חשבו את $I=\iint_D \frac{y}{x}\,dx\,dy$, כאשר $D=\left\{\begin{array}{c} 9\le x^2+y^2\le 16 \\ \frac{\sqrt{3}}{3}x\le y\le\sqrt{3}x \\ x>0,y>0 \end{array}\right\}$.

**פתרון התרגיל:**

ראשית נשרטט את התחום:




נפתור את השאלה ב2 דרכים.

1. ע"י החלפת המשתנים הבאה $\begin{cases} u = x^2 + y^2 \\ v = \frac{y}{x} \end{cases}$, נקבל:

$$J^{-1} = \begin{vmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2x & 2y \\ -\frac{y}{x^2} & \frac{1}{x} \end{vmatrix} = 2 + 2\frac{y^2}{x^2} = 2(1+v^2) \neq 0$$

הגבולות יהיו $9 \leq u \leq 16$, $\sqrt{\frac{1}{3}} \leq v \leq \sqrt{3}$, ולכן:

$$\begin{aligned} I &= \iint_D \frac{y}{x}\, dx\, dy = \iint_\Delta v\, |J|\ dv\, du \\ &= \frac{1}{2} \int_{u=9}^{16} \int_{v=\sqrt{\frac{1}{3}}}^{\sqrt{3}} \frac{v}{1+v^2}\, dv\, du = \frac{7}{2} \int_{v=\sqrt{\frac{1}{3}}}^{\sqrt{3}} \frac{v}{1+v^2}\, dv \\ &= \frac{7}{4} \int_{v=\sqrt{\frac{1}{3}}}^{\sqrt{3}} \frac{2v}{1+v^2}\, dv = \frac{7}{4} \left[\ln(1+v^2)\right] |_{\sqrt{\frac{1}{3}}}^{\sqrt{3}} = \frac{7}{4} \left[\ln(1+3) - \ln(1+\tfrac{1}{3})\right] \\ &= \frac{7}{4} \left[\ln(4) - \ln(\frac{4}{3})\right] = \frac{7}{4} \ln\left(\frac{4}{\frac{4}{3}}\right) = \frac{7}{4} \ln(3) \end{aligned}$$

2. בתחומים מהצורה הזו נעדיף לעבור לקואורדינטות פולריות $\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$.

נחשב את גבולות האינטגרציה החדשים :

$$\begin{aligned} 9 \le x^2+y^2 \le 16 &\longrightarrow 3 \le r \le 4 \\ \frac{\sqrt{3}}{3}x \le y \le \sqrt{3}x &\longrightarrow \frac{\sqrt{3}}{3} \le \frac{y}{x} \le \sqrt{3} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} \le \tan\theta \le \sqrt{3} &\longrightarrow \frac{\pi}{6} \le \theta \le \frac{\pi}{3} \end{aligned}$$

נחשב את היעקוביאן :

$$J = \begin{vmatrix} x_r & x_\theta \\ y_r & y_\theta \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} = r$$

ששונה מאפס פרט לקבוצה משטח אפס, ולכן נקבל:

$$\begin{aligned} I &= \iint_D \frac{y}{x}\,dx\,dy = \iint_\Delta \tan\theta\,|J|\,dr\,d\theta \\ &= \int_{\theta=\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\int_{r=3}^{5} \frac{\sin\theta}{\cos\theta} r\,dr\,d\theta = \int_{\theta=\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \left(\frac{16}{2}-\frac{9}{2}\right)\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\,d\theta = -\frac{7}{2}\ln|\cos\theta|\Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \\ &= -\frac{7}{2}\ln\left(\cos\frac{\pi}{3}\right)+\frac{7}{2}\ln\left(\cos\frac{\pi}{6}\right) = \frac{7}{2}\ln\left(\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}}\right) = \frac{7}{2}\ln\sqrt{3} = \frac{7}{4}\ln(3). \end{aligned}$$

**הערה.**

בהינתן $I=\iint_D f(x,y)\,dx\,dy$ נפעל באופן הבא:

1. נבדוק האם $D$ תחום פשוט, אם כן, נחשב את האינטגרל, אחרת נמשיך לשלבים הבאים.
2. נעבור לקואורדינטות נוחות יותר $(u,v)$ (או $(r,\theta)$).
3. נמצא את תחום האינטגרציה החדש $\Delta$, לפי הקואורדינטות החדשות (פשוט מעבירים את שפת התחום $D$ לקואורדינטות החדשות).
4. נחשב נגזרות חלקיות ויעקוביאן.
5. נחשב :

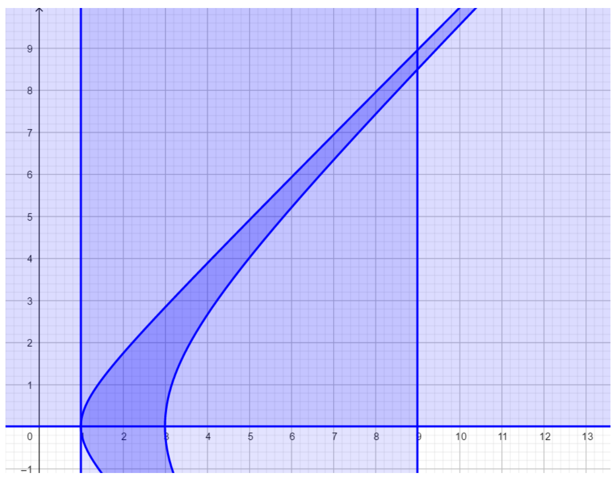
$$I=\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \iint_\Delta f\left(x\left(u,v\right),y\left(u,v\right)\right)|J|\,du\,dv$$

**תרגיל 9.3.3.**

חשבו את $I=\iint_D xye^{x^2-y^2}\,dx\,dy$ , כאשר $D=\begin{cases}1\le x^2-y^2\le 9\\ 1\le x\le 9\\ y\ge 0\end{cases}$.

**פתרון התרגיל:**

נשרטט את התחום:



נבצע את החלפת המשתנים הבאה $\begin{cases}u=x^2-y^2\\ v=x^2\end{cases}$ , נמצא את גבולות האינטגרציה החדשים

$$\begin{array}{rcl} D & & \Delta \\ x^2-y^2=1 & \longrightarrow & u=1 \\ x^2-y^2=9 & \longrightarrow & u=9 \\ x=9 & \longrightarrow & v=81 \\ y=0 & \longrightarrow & v=u \end{array}$$

במקרה זה יהיה קל יותר לחשב את היעקוביאן ההופכי:

$$J^{-1}=\begin{vmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 2x & -2y \\ 2x & 0 \end{vmatrix}=4xy$$

ששונה מאפס פרט לקבוצה משטח אפס, ולכן: $|J| = \frac{1}{|4xy|} = \frac{1}{4xy}$, ונקבל:

$$\begin{aligned}
I &= \iint_D xye^{x^2-y^2}\,dx\,dy = \int_\Delta xye^u \frac{1}{4xy}\,du\,dv = \frac{1}{4}\int_\Delta e^u\,dv\,du \\
&= \frac{1}{4}\int_{u=1}^{9}\left(\int_{v=u}^{81} e^u\,dv\right)du = \frac{1}{4}\int_1^9 e^u\,(81-u)\,du = \frac{81}{4}\int_1^9 e^u\,du - \frac{1}{4}\int_1^9 e^u u\,du \\
&= \left\{\begin{array}{cc} f' = e^u & f = e^u \\ g = u & g' = 1 \end{array}\right\} = \frac{81}{4}\int_1^9 e^u\,du - \frac{1}{4}\left(ue^u|_1^9 - \int_1^9 e^u\,du\right) \\
&= \frac{82}{4}\left(e^9 - e\right) - \frac{1}{4}\left(9e^9 - e\right) = \frac{73}{4}e^9 - \frac{81}{4}e
\end{aligned}$$

### תרגיל 9.3.4.

חשבו את שטח האליפסה $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

**פתרון התרגיל:**

עבור צורות הדומות לאליפסה נוכל לפעמים להיעזר בקואורדינטות פולריות מוכללות

$$\begin{aligned}
x &= ar\cos\theta \\
y &= br\sin\theta
\end{aligned}$$

מתקיים

$$1 = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{a^2r^2\cos^2\theta}{a^2} + \frac{b^2r^2\sin^2\theta}{b^2} = r^2$$

ולכן, תחום האינטגרציה החדש הוא $\begin{cases} 0 \le \theta \le 2\pi \\ 0 \le r \le 1 \end{cases}$ (נשים לב כי $\theta$ אינה מוגדרת באפס באופן חח"ע, על זה תדברו בהרצאה ).
נחשב יעקוביאן :

$$J = \begin{vmatrix} a\cos\theta & -ar\sin\theta \\ b\sin\theta & br\cos\theta \end{vmatrix} = abr\cos^2\theta + abr\sin^2\theta = abr$$

ששונה מאפס פרט לקבוצה משטח אפס, ולכן נקבל:

$$\begin{aligned}
\text{Area} &= \iint_D dx\,dy = \iint_\Delta abr\,dr\,d\theta = ab\int_{\theta=0}^{2\pi}\int_{r=0}^{1} r\,dr\,d\theta \\
&= ab\int_{\theta=0}^{2\pi} \left.\frac{r^2}{2}\right|_{r=0}^{r=1} d\theta = \pi ab
\end{aligned}$$

### תרגיל 9.3.5.

חשבו את השטח החסום ע"י העקומה $(2x+y+1)^2+(x-y)^2=1$.

**פתרון התרגיל:**

ננסה לבחור קואורדינטות חדשות כך שיתקבל מעגל $\begin{cases} u=2x+y+1 \\ v=x-y \end{cases}$, ונקבל כי התחום החדש $\Delta$ חסום ע"י $u^2+v^2=1$.

נחשב יעקוביאן :

$$J^{-1}=\begin{vmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}=-3\neq 0$$

כלומר, $|J|=\frac{1}{3}\neq 0$, נקבל :

$$\text{Area}=\iint_D dx\,dy=\iint_\Delta \frac{1}{3}\,du\,dv=\frac{1}{3}\iint_{u^2+v^2\leq 1} du\,dv=\frac{\pi}{3}$$

שכן, $\iint_{u^2+v^2\leq 1} du\,dv=\pi$ שטח של מעגל ברדיוס 1.

# תרגול עשירי

## 10.1 אינטגרל משולש

רעיון.

תהי $f(x,y,z)$ פונקציה רציפה בתחום $D$ במרחב $\mathbb{R}^3$, כלומר $f : D \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$. אינטגרל משולש הינו אינטגרל מהצורה:

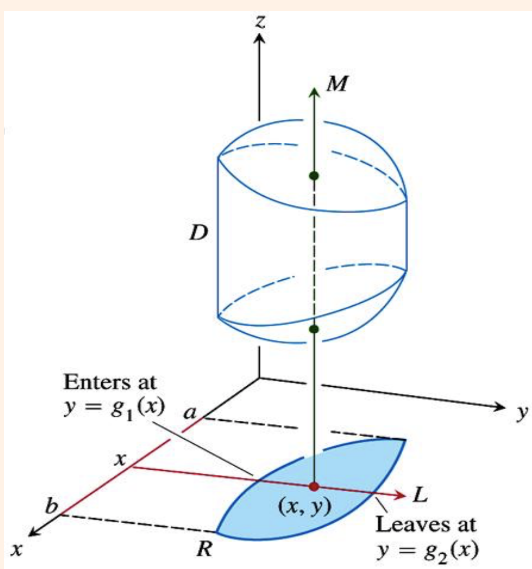
$$\iiint_D f(x,y,z)dV$$

וכמו אינטגרל אינטגרל משולש הוא בעצם הרחבה ישירה של אינטגרל כפול.
כמו באינטגרל כפול, אם נמצא פרמטריזציה נוחה ל$\Omega$, כאשר מהצורה הבאה:

$$R = \{(x,y)|a \le x \le b, g_1(x) \le y \le g_2(x)\}$$

$$D = \{(x,y,z)|(x,y) \in R, f_1(x,y) \le z \le f_2(x,y)\},$$

עבור $f_1, f_2, g_1, g_2$ רציפות.



אז נקבל:

$$\iiint_D h(x,y,z)dV = \int_{x=a}^{b}\int_{y=g_1(x)}^{g_2(x)}\int_{z=f_1(x,y)}^{f_2(x,y)} h(x,y,z)dzdydx$$

### תרגיל 10.1.1.

(תרגיל ממבחן)

חשבו את $\iiint_E \frac{dV}{(x+y+z+1)^3}$ כאשר $E$ הגוף החסום ע"י המישורים:

$$x=0$$

$$y=0$$

$$z=0$$

$$x+y+z=1$$

**פתרון התרגיל:**

$z$ משתנה בין $0$ לבין $1-y-x$. כעת נטיל את המשטח על המישור $xy$: ההיטל הינו התחום במישור החסום ע"י $x=0, y=0, x+y=1$.

כלומר, $y$ משתנה בין $0$ ל-$1-x$, $x$ משתנה בין $0$ ל-$1$. נקבל :

$$\begin{aligned}
I &= \iiint_E \frac{dV}{(x+y+z+1)^3} = \int_{x=0}^{1}\int_{y=0}^{1-x}\int_{z=0}^{1-x-y} \frac{1}{(x+y+z+1)^3}dzdydx \\
&= \int_{x=0}^{1}\int_{y=0}^{1-x}\left[-\frac{1}{2}(x+y+z+1)^{-2}\right]_{z=0}^{1-x-y} dydx \\
&= \int_{x=0}^{1}\int_{y=0}^{1-x}\left(-\frac{1}{8}+\frac{1}{2}(x+y+1)^{-2}\right)dydx \\
&= \int_{x=0}^{1}\left[-\frac{1}{8}y-\frac{1}{2}(x+y+1)^{-1}\right]_{y=0}^{1-x}dx = \int_{x=0}^{1}\left(-\frac{1}{8}(1-x)-\frac{1}{4}+\frac{1}{2}(x+1)^{-1}\right)dx \\
&= \int_{x=0}^{1}\left(-\frac{3}{8}+\frac{x}{8}+\frac{1}{2}(x+1)^{-1}\right)dx = \left[-\frac{3}{8}x+\frac{1}{16}x^2+\frac{1}{2}\ln|x+1|\right]_0^1 = -\frac{3}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{2}\ln 2 \\
&= \frac{1}{2}\ln 2-\frac{5}{16}
\end{aligned}$$

### 10.1.1 נפח

נניח ויש לנו גוף $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, אז נוכל לחשב את הנפח שלו, בעזרת:

$$\text{Vol}\,\Omega = \iint_{\Omega} 1dV$$

**תרגיל 10.1.2.**

(תרגיל ממבחן)
חשבו את נפח הגוף $V$ המוגדר על ידי:

$$x^2 + y^2 \leq 2y$$

$$0 \leq z \leq (x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}$$

**פתרון התרגיל:**

נסמן, $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x^2+y^2 \leq 2y\}$, אז:

$$\text{Vol}\,V = \iiint_V 1dV = \iint_D \left( \int_{z=0}^{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} 1dz \right) dydx = \iint_D (x^2+y^2)^{\frac{3}{2}} dxdy$$

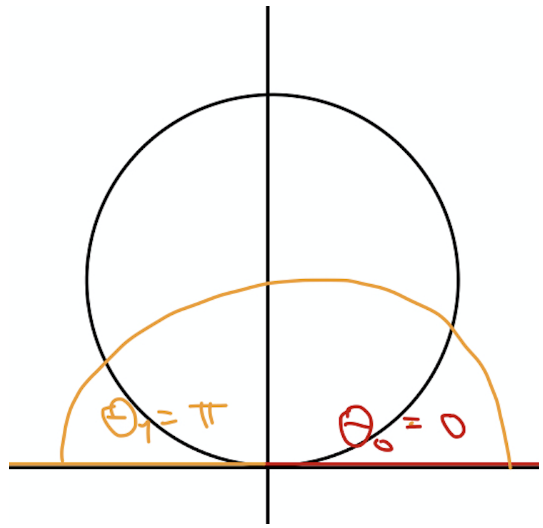
כדי לפשט את התחום $D$ נבצע החלפה קוטבית. כעת האי-שוויון ב– $D$ נרשם כך:

$$0 \leq x^2+y^2 \leq 2y$$

$$0 \leq r^2 \leq 2r\sin\theta$$

$$0 \leq r \leq 2\sin\theta$$

ונותר להבין כיצד הזווית משתנה.
נשים לב כי $0 \leq \sin\theta$ ולכן נסיק כי $0 \leq \theta \leq \pi$, ניתן לראות זאת באיור הבא:




קיבלנו את האינטגרל:

$$\begin{aligned}\text{Vol}(V) &= \iint_D (x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}dxdy = \int_0^{\pi}\int_0^{2\sin\theta}(r^2)^{3/2}rdrd\theta \\ &= \int_0^{\pi}\left[\frac{r^5}{5}\right]_0^{2\sin\theta}d\theta = \frac{32}{5}\int_0^{\pi}(1-\cos^2\theta)^2\sin\theta d\theta \\ &\overset{t=\cos\theta}{=} -\int_1^{-1}(1-t^2)^2dt = \frac{64}{5}\int_0^1(1-t^2)^2dt \\ &= \frac{64}{5}\left[t-\frac{2}{3}t^3+\frac{1}{5}t^5\right]_0^1 = \frac{512}{75}.\end{aligned}$$

### 10.1.2 מסה

נניח ויש לנו גוף במרחב $\Omega$, עם צפיפות $\rho$, כאשר:

$$\rho:\Omega\to\mathbb{R}$$

נוכל לסמן את מסת הגוף $\Omega$ להיות:

$$M=\iiint_{\Omega}\rho\left(x,y,z\right)dV$$

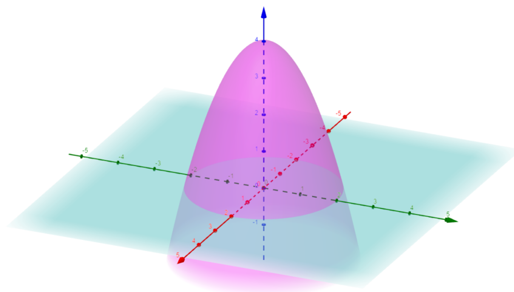
נשים לב כי אם $\rho=1$, אז $M=\text{Vol}\,\Omega$.

**תרגיל 10.1.3.**

מצאו את המסה של גוף $\Omega$, המוגדר להיות הגוף החסום מלמטה ע"י הדיסק $x^2+y^2\le 4$ במישור $xy$ ($z=0$), ומלמעלה ע"י הפרבולואיד $z=4-x^2-y^2$, עם צפיפות אחידה $\delta$.

**פתרון התרגיל:**

נשרטט את הגוף:



אז:

$$M=\iint_{x^2+y^2\leq 4}\int_{z=0}^{4-x^2-y^2}\delta dzdydx=\delta\iint_{x^2+y^2\leq 4}4-x^2-y^2dydx$$

נעבור לקואורדינטות פולריות:

$$M=\delta\int_0^{2\pi}\int_0^2\left(4-r^2\cos^2\theta-r^2\sin^2\theta\right)rdrd\theta=\delta\int_0^{2\pi}\int_0^2 4r-r^3drd\theta$$
$$=\delta\int_0^{2\pi}\left(2r^2-\frac{r^4}{4}\right)|_0^2 d\theta=\delta\int_0^{2\pi}4d\theta=8\pi\delta$$

## 10.2 החלפת משתנים

רעיון.

עבור אינטגרל כפול $\iiint_\Omega fdV$, והעתקה "טובה מספיק", נוכל לבצע החלפת משתנים, כפי שביצענו באינטגרל כפול, כאשר התהליך מאוד דומה.

1. נעבור לקואורדינטות נוחות יותר (המפשטות את התחום ו/או את הפונקציה מתחת לאינטגרל) $(u,v,w)$.

$$\Phi:\Delta\to\Omega$$
$$(x,y,z)=(x(u,v,w),y(u,v,w),z(u,v,w))$$

2. נחשב את היעקוביאן:

$$J=\begin{vmatrix}x_u & x_v & x_w\\ y_u & y_v & y_w\\ z_u & z_v & z_w\end{vmatrix}$$

3. נשתמש בנוסחאת החלפת המשתנים:

$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)\,dxdydz = \iiint_{\Delta} f(x(u,v,w), y(u,v,w), z(u,v,w))\,|J|\,dudvdw$$

### תרגיל 10.2.1.

חשבו $I = \int_0^3 \int_0^4 \int_{\frac{y}{2}}^{\frac{y}{2}+1} \left(\frac{2x-y}{2} + \frac{z}{3}\right) dxdydz$.

**פתרון התרגיל:**

אם נתבונן בתחום האינטגרציה, נשים לב כי $\frac{y}{2} \le x \le \frac{y}{2}+1$, כלומר, $0 \le x - \frac{y}{2} \le 1$, ולכן מתבקש להגדיר $u = x - \frac{y}{2} = \frac{2x-y}{2}$, ואז גם נקבל את $u$ בפונקציה. לגבי שאר גבולות האינטגרציה, הם בעיקרון כבר מלבניים אז לא נשנה אותם, כלומר נשתמש בהחלפת המשתנים הבאה:

$$\begin{cases} u = \frac{2x-y}{2} \\ v = y \\ w = z \end{cases}$$

נחשב יעקוביאן :

$$J^{-1} = \begin{vmatrix} u_x & u_y & u_z \\ v_x & v_y & v_z \\ w_x & w_y & w_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & \frac{-1}{2} \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \Rightarrow |J| = 1$$

נקבל :

$$\begin{aligned} I &= \int_0^3 \int_0^4 \int_0^1 \left(u + \frac{w}{3}\right) |J|\,dudvdw \\ &= \int_0^3 \int_0^4 \frac{1}{2} + \frac{w}{3} dvdw = 4\int_0^3 \frac{1}{2} + \frac{w}{3} dw = 4\left(\frac{1}{2}w + \frac{w^2}{6}\right)\Big|_{w=0}^{w=3} \\ &= 4\left(\frac{3}{2} + \frac{9}{6}\right) = 4 \cdot \frac{18}{6} = 12 \end{aligned}$$

### תרגיל 10.2.2.

(תרגיל ממבחן).

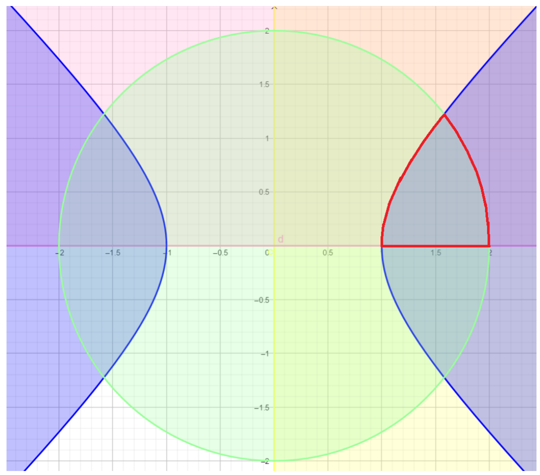
חשבו $I = \iiint_V (x^5yz - y^5xz)\,dxdydz$ , כאשר $V$ חסום ע"י המשטחים:

$$z = 1, z = 0, y = 0, x = 0$$
$$x^2 - y^2 \ge 1, 0 \le x^2 + y^2 \le 4$$

כאשר $x \ge 0$, $y \ge 0$.

**פתרון התרגיל:**

תחילה נבין מהו תחום האינטגרציה, קל לראות כי $0 \le z \le 1$, ובמישור $x, y$ מתקבל הציור הבא:



ברביע הראשון נבטא את $x$ כפונקציה של $y$ על פני העקומות:

$$x_1(y) = \sqrt{1+y^2}, x_2(y) = \sqrt{4-y^2}$$

נמצא את נקודת החיתוך ברביע הראשון:

$$\sqrt{4-y^2} = \sqrt{1+y^2} \Rightarrow y = \sqrt{\frac{3}{2}}$$

אם כך במישור $xy$ תחום האינטגרציה:

$$\left\{(x,y)\middle|\sqrt{1+y^2} \le x \le \sqrt{4-y^2}, \le y \le \sqrt{\frac{3}{2}}\right\} = \left\{(x,y)\middle|1+y^2 \le x^2 \le 4-y^2, \le y \le \sqrt{\frac{3}{2}}\right\}$$
$$= \left\{(x,y)\middle|1 \le x^2 - y^2 \le 4-2y^2, \le y \le \sqrt{\frac{3}{2}}\right\}$$

נבצע החלפת משתנים:

$$\begin{cases} w = z \\ v = y^2 \\ u = x^2 - y^2 \end{cases}$$

אז נקבל את התחום:

$$\Delta = \left\{(u,v,w)\middle|1 \le u \le 4-2v, 0 \le v \le \frac{3}{2}, 0 \le w \le 1\right\}$$

נחשב:

$$J^{-1}=\begin{vmatrix} 2x & -2y & 0 \\ 0 & 2y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}=4xy\neq 0$$

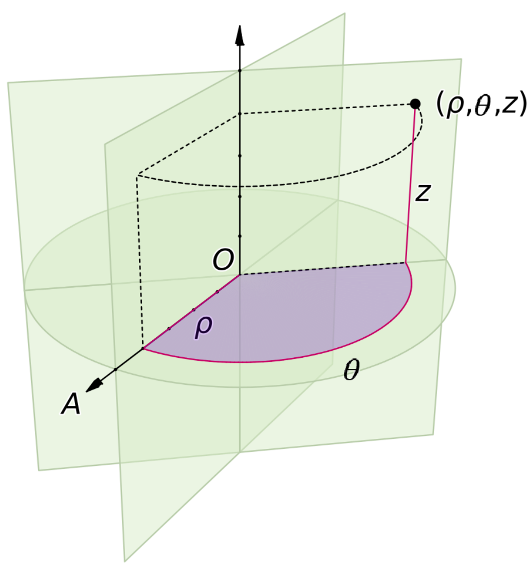
$$J=\frac{1}{4xy}>0$$

ולכן מתקיים:

$$\begin{aligned}
\iiint_V\left(x^5yz-y^5xz\right)dxdydz &= \iiint_\Delta\left(x^5yz-y^5xz\right)\cdot\tfrac{1}{4xy}dudvdw \\
&= \tfrac{1}{4}\iiint_\Delta\left(x^4-y^4\right)zdudvdw \\
&= \tfrac{1}{4}\int_0^1\int_0^{\frac{3}{2}}\int_1^{4-2v}\left(x^2-y^2\right)\left(x^2+y^2\right)zdudvdw \\
&= \tfrac{1}{4}\int_0^1\int_0^{\frac{3}{2}}\int_1^{4-2v}u\left(u+2v\right)wdudvdw \\
&= \tfrac{1}{4}\left(\int_0^{\frac{3}{2}}\int_1^{4-2v}\left(u^2+2vu\right)dudv\right)\left(\int_0^1 wdw\right) \\
&= \tfrac{1}{8}\left(\int_0^{\frac{3}{2}}\left[\tfrac{u^3}{3}+vu^2\right]_1^{4-2v}dv\right) \\
&= \tfrac{1}{8}\left(\int_0^{\frac{3}{2}}\left(\tfrac{(4-2v)^3}{3}+v(4-2v)^2-\tfrac{1}{3}-v\right)dv\right)\approx 1.63281
\end{aligned}$$

### 10.2.1 החלפות משתנים נפוצות

**קואורדינטות גליליות**



הקואורדינטות החדשות במקרה זה הן $(\rho,\theta,z)$ :

$$\begin{cases} x=\rho\cos\theta \\ y=\rho\sin\theta \\ z=z \end{cases} ,|J|=\rho, \quad \rho\geq 0, 0\leq\theta<2\pi, -\infty\leq z\leq\infty$$

**תרגיל 10.2.3.**

חשבו $I=\iiint_V \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}dxdydz$, כאשר:

$$V=\left\{(x,y,z)\,|0\leq z\leq\sqrt{x^2+y^2}+1, x^2+y^2\leq 1\right\}$$

**פתרון התרגיל:**

נשים לב כי מדובר בגליל שחלקו העליון נחתך ע"י חרוט, לכן ניעזר בקואורדינטות גליליות. תחום האינטגרציה החדש :

$$\begin{cases} 0\leq\rho\leq 1 \\ 0\leq\theta\leq 2\pi \\ 0\leq z\leq\rho+1 \end{cases}$$

נחשב:

$$\begin{aligned} I &= \iiint_\Delta \frac{z}{\rho}\cdot\rho dV=\int_0^{2\pi}\int_0^1\int_0^{\rho+1} zdzd\rho d\theta=\int_0^{2\pi}\int_0^1\frac{(\rho+1)^2}{2}d\rho d\theta \\ &= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\left(\frac{(\rho+1)^3}{3}|_0^1\right)d\theta=\frac{1}{2}\cdot 2\pi\cdot\left(\frac{8}{3}-\frac{1}{3}\right)=\frac{7\pi}{3} \end{aligned}$$

### קואורדינטות גליליות מוכללות

זהו המקרה שבמישור $x,y$ ישנה אליפסה ולא עיגול, כלומר מתקיימת המשוואה:

$$\rho^2=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}$$

$$\begin{cases} x=a\rho\cos\theta \\ y=b\rho\sin\theta \\ z=z \end{cases} ,|J|=|ab|\rho, \rho\geq 0, 0\leq\theta<2\pi, -\infty\leq z\leq\infty$$

**תרגיל 10.2.4.**

מצאו את הנפח החסום ע"י המשטחים $z = 1 + \sqrt{x^2 + 16y^2}$ ו– $z = 3 - \sqrt{x^2 + 16y^2}$.

**פתרון התרגיל:**

עלינו לחשב:

$$\iint_D \int_{1+\sqrt{x^2+16y^2}}^{3-\sqrt{x^2+16y^2}} 1 dz dA$$

נותר להבין מהו התחום $D$.
נמצא את משוואת החיתוך של הצורות:

$$\begin{aligned} 1 + \sqrt{x^2 + 16y^2} &= 3 - \sqrt{x^2 + 16y^2} \\ x^2 + 16y^2 &= 1 \\ x^2 + \frac{1}{(\frac{1}{4^2})} y^2 &= 1 \end{aligned}$$

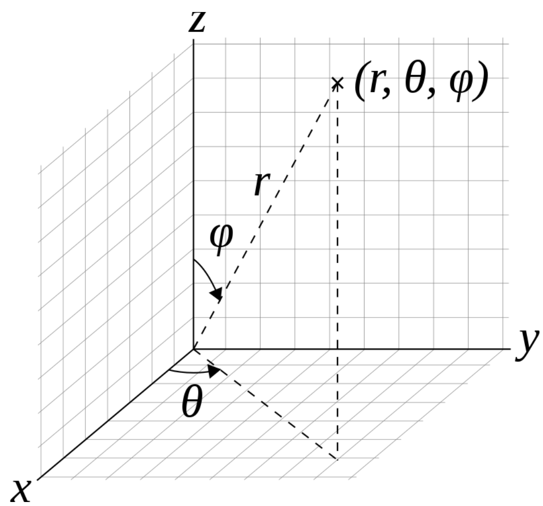
כלומר $D$ הוא האליפסה הנ"ל במישור $xy$.
כעת נבצע החלפת משתנים גלילית מוכללת:

$$R = \{(\rho, \theta, z) | 0 < \theta < 2\pi, 0 < \rho < 1, 1 + \rho < z < 3 - \rho\}, J = \frac{1}{4}\rho$$

כלומר:

$$\text{Vol} = \int_0^{2\pi} \int_0^1 \int_{1+\rho}^{3-\rho} \frac{1}{4} \rho dz d\rho d\theta = ... = \frac{\pi}{6}$$

**קואורדינטות כדוריות**




הקואורדינטות החדשות במקרה זה הן $(r, \theta, \varphi)$:

$$\begin{cases} x = r\sin\varphi\cos\theta \\ y = r\sin\varphi\sin\theta \\ z = r\cos\varphi \end{cases}, |J| = r^2\sin\varphi, r > 0, 0 \le \theta < 2\pi, 0 \le \varphi \le \pi$$

**תרגיל 10.2.5.**

חשבון $I = \iiint_V \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+(z-1)^2}}dxdydz$ , כאשר

$$\begin{aligned} V &= \{(x,y,z)\,|x^2+y^2+z^2 \le 2z\} \\ &= \left\{(x,y,z)\,|x^2+y^2+(z-1)^2 \le 1\right\} \end{aligned}$$

**פתרון התרגיל:**

מדובר בכדור ברדיוס $1$ סביב הנקודה $(0,0,1)$. כאן לא נשתמש בקואורדינטות כדוריות , שכן אילו נוחות רק כאשר יש סימטריה לראשית, אך נשתמש בקואורדינטות כדוריות קצת שונות :

$$\begin{cases} x = r\sin\varphi\cos\theta \\ y = r\sin\varphi\sin\theta \\ z - 1 = r\cos\varphi \end{cases}$$

כמו בכדוריות נקבל כי $|J| = r^2 \sin\varphi$, גבולות האינטגרציה החדשים $\begin{cases} 0 \le \theta \le 2\pi \\ 0 \le \varphi \le \pi \\ 0 \le r \le 1 \end{cases}$.

$$I = \iiint_\Delta \frac{1}{r} \cdot r^2 \sin\varphi dV = \int_0^{2\pi} \int_0^1 \int_0^\pi r \sin\varphi dV d\varphi dr d\theta = 2\pi \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 = 2\pi.$$

# תרגול אחד עשרה

## 11.1 עקומים

**תזכורת.**

עקום הוא פונקציה רציפה:

$$\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$$

כאשר נתמקד בעיקר ב$n = 2$ או $n = 3$, לפעמים נסמן:

$$\gamma(t) = (x(t), y(t), z(t))$$

- אם $\gamma(a) = \gamma(b)$, אז נקרא ל$\gamma$ עקום סגור.
- אם $\gamma$ לא חותך אץ עצמו באף נקודה, פרט אולי לקצוות, כלומר:

$$\forall t \neq s \in (a, b), \gamma(t) \neq \gamma(s)$$

נקרא ל$\gamma$ עקום פשוט.

כאשר אנו מדברים על עקום $\gamma$, בד"כ אנו מתכוונים לעקום, איך שהוא מונח במרחב, כלומר, בד"כ לא אכפת לנו מהפונקציה $\gamma$, אלא מהקבוצה $\text{Im}\,\gamma = \{\gamma(t) | t \in [a, b]\} \subset \mathbb{R}^n$, כלומר, נחשוב על 2 העקומים:

$$\gamma_1(t) = (0, t), t \in [0, 1]$$

$$\gamma_2(t) = (0, 1 - t), t \in [0, 1]$$

$$\gamma_3(t) = (0, \sin(t)), t \in [0, \pi]$$

$$\gamma_4(t) = (0, 3t + 1)\,, t \in [-3, 0]$$

כאותו עקום, להבדל ביניהם נקרא פרמטריזציה.
אם $\gamma$ עקום גזיר, אז $\gamma'(t_0) = (x'(t_0), y'(t_0), z'(t_0))$ הוא הוקטור המשיק לעקום $\gamma$ בנקודה $t_0$.

**תזכורת.**

בהנתן עקום גזיר ברציפות $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^3$, אורך העקום נתון על ידי:

$$\ell = \int_a^b \|\gamma'(t)\| dt = \int_a^b \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2} dt$$

או אם $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^2$:

$$\ell = \int_a^b \|\gamma'(t)\| dt = \int_a^b \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} dt$$

אורך עקום לא תלוי בפרמטריזציה.

### תרגיל 11.1.1.

מצאו פרמטריזציה לישר היוצא מ $(3,-1,1)$ ומסתיים ב$(1,2,0)$.

**פתרון התרגיל:**

דרך ראשונה:

נשים לב כי הפרמטריזציה מקיימת $t \in [0,1]$, $\gamma(0) = (3,-1,1)$, $\gamma(1) = (1,2,0)$:

$$\begin{aligned}
\gamma(t) &= (3,-1,1) + t \cdot (\text{כיוון הווקטור}) \\
&= (3,-1,1) + t \cdot ((1,2,0) - (3,-1,1)) \\
&= (3,-1,1) + t \cdot (-2,3,-1) \\
&= (3-2t, -1+3t, 1-t)
\end{aligned}$$

דרך שנייה:

$$t \in [0,1] \qquad \gamma(t) = (1-t)(3,-1,1) + t(1,2,0) = (3-2t, 3t-1, 1-t)$$

### תרגיל 11.1.2.

מצאו פרמטריזציה נגד כיוון השעון לעקומים הבאים:

1. $$x^2 + y^2 = r^2$$
2. $$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$
3. $$x^{\frac{2}{5}} + y^{\frac{2}{5}} = a^{\frac{2}{5}}$$

**פתרון התרגיל:**

.1

$$\begin{cases} x = R\cos\theta \\ y = R\sin\theta \\ \theta \in [0, 2\pi] \end{cases}$$

.2

$$\begin{cases} x = a\cos\theta \\ y = b\sin\theta \\ \theta \in [0, 2\pi] \end{cases}$$

.3

$$\begin{cases} x = a\cos^5\theta \\ y = a\sin^5\theta \\ \theta \in [0, 2\pi] \end{cases}$$

### תרגיל .11.1.3

מצאו ביטוי להיקף אליפסה כללית, הסיקו ההיקף של מעגל (ברדיוס 1).

**פתרון התרגיל:**

עבור הפרמטריזציה שמצאנו:

$$\begin{cases} x = a\cos\theta \\ y = b\sin\theta \\ \theta \in [0, 2\pi] \end{cases}$$

מתקיים:

$$\gamma'(t) = (-a\sin\theta, b\cos\theta)$$

אז:

$$\|\gamma'(t)\| = \sqrt{a^2\sin^2\theta + b^2\cos^2\theta}$$

כלומר:

$$\ell = \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2\sin^2\theta + b^2\cos^2\theta d\theta}$$

עבור מעגל, נקבל $a = b = 1$, ואז:

$$\ell = \int_0^{2\pi} \sqrt{\sin^2\theta + \cos^2\theta d\theta} = \int_0^{2\pi} 1 d\theta = 2\pi$$

הערה.

להעשרה בלבד
לאינטגרל שמצאנו:

$$\ell=\int_0^{2\pi}\sqrt{a^2\sin^2\theta+b^2\cos^2\theta d\theta}$$

אין פתרון כללי, וחוץ ממקרים ספציפיים, נאלץ להשתמש בשיטות נומריות להעריך את הפתרון שלו.

תרגיל 11.1.4.

חשבו את אורך העקומה הנתונה ע"י הפרמטריזציה $t\in[0,2\pi]$ $\begin{cases}x(t)=\cos^3 t\\ y(t)=\sin^3 t\end{cases}$, עקומה זו מתארת אסטרואיד.

**פתרון התרגיל:**

$$\begin{aligned}\ell&=\int_0^{2\pi}\|\gamma'(t)\|dt=\int_0^{2\pi}\sqrt{\left(-3\cos^2 t\sin t\right)^2+\left(3\sin^2 t\cos t\right)^2}dt\\&=3\int_0^{2\pi}\sqrt{\cos^4 t\sin^2 t+\sin^4 t\cos^2 t}dt\\&=3\int_0^{2\pi}\sqrt{\cos^2 t\sin^2 t\left(\cos^2 t+\sin^2 t\right)}dt\\&=3\int_0^{2\pi}\left|\cos t\sin t\right|dt=3\cdot 4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos t\sin tdt=...=6\end{aligned}$$

## 11.2 אינטגרל קווי מסוג ראשון

תזכורת.

בהנתן עקום $\gamma:[a,b]\to\mathbb{R}^3$ גזיר ברציפות, ופונקציה רציפה $f:D\subset\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$, כאשר $\operatorname{Im}\gamma\subset D$,
אינטגרל קווי מסוג ראשון הוא האינטגרל:

$$\int_\gamma fd\ell=\int_a^b f(\gamma(t))\|\gamma'(t)\|dt$$

ערך האינטגרל אינו תלוי בפרמטריזציה של $\gamma$.
אם $\gamma$ חבל במרחב, עם צפיפות $\rho$ אז נגדיר את מסת החבל להיות:

$$\int_\gamma \rho d\ell$$

נשים לב כי אם $\rho(x,y,z)=\delta$ קבוע, אז מסת החבל היא אורך החבל כפול $\delta$.

**תרגיל 11.2.1.**

חשבו את $\int_C \left(x^2+y^2\right)d\ell$ כאשר $C$ עקומה הנתונה ע"י הפרמטריזציה

$$\begin{cases} x\left(t\right)=a\left(\cos t+t\sin t\right)\\ y\left(t\right)=a\left(\sin t-t\cos t\right)\end{cases},\ t\in[0,2\pi]$$

עבור $a>0$ קבוע.

**פתרון התרגיל:**
נחשב את $f(\gamma(t))$ ואת $\|\gamma(t)\|$ ונציב באינטגרל הקווי:

$$\begin{aligned} f\left(\gamma\left(t\right)\right)&=f\left(a\left(\cos t+t\sin t\right),a\left(\sin t-t\cos t\right)\right)\\ &=\left(a\left(\cos t+t\sin t\right)\right)^2+\left(a\left(\sin t-t\cos t\right)\right)^2\\ &=a^2\left(\cos^2 t+2t\cos t\sin t+t^2\sin^2 t+\sin^2 t-2\sin t\cos t+t^2\cos^2 t\right)=a^2\left(1+t^2\right)\end{aligned}$$

$$\gamma'\left(t\right)=\left(a\left(-\sin t+\sin t+t\cos t\right),a\left(\cos t-\cos t+t\sin t\right)\right)=\left(at\cos t,at\sin t\right)$$

$$\|\gamma'\left(t\right)\|=\sqrt{\left(at\cos t\right)^2+\left(at\sin t\right)^2}=|at|=at$$

ולכן:

$$\begin{aligned}\int_C\left(x^2+y^2\right)d\ell&=\int_0^{2\pi}a^2\left(1+t^2\right)atdt=a^3\left(\frac{t^2}{2}+\frac{t^4}{4}\right)\Big|_0^{2\pi}\\ &=a^3\left(\frac{4\pi^2}{2}+\frac{16\pi^4}{4}\right)\end{aligned}$$

**תרגיל 11.2.2.**

חשבו את מסת החוט שהוא הספירלה $t\in[0,2\pi]$ $\begin{cases}x=a\cos t\\ y=a\sin t\\ z=bt\end{cases}$ וצפיפותו נתונה ע"י $\frac{1}{x^2+y^2+z^2}$.

**פתרון התרגיל:**
נסמן $f\left(x,y,z\right)=\frac{1}{x^2+y^2+z^2}$, ונחשב את $\int_C f(x,y,z)$.

$$\begin{aligned} f\left(\gamma\left(t\right)\right)&=f\left(a\cos t,a\sin t,bt\right)\\ &=\frac{1}{\left(a\cos t\right)^2+\left(a\sin t\right)^2+\left(bt\right)^2}=\frac{1}{a^2+b^2t^2}\end{aligned}$$

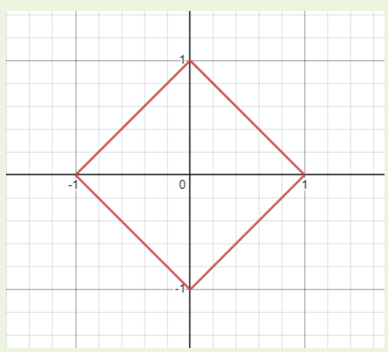
$$\begin{aligned}
\gamma'(t) &= (-a\sin t, a\cos t, b) \\
\|\gamma'(t)\| &= \sqrt{(-a\sin t)^2 + (a\cos t)^2 + b^2} = \sqrt{a^2+b^2}
\end{aligned}$$

אז:

$$\begin{aligned}
\int_C f(x,y)\,d\ell &= \int_a^b f(\gamma(t))\cdot\|\gamma'(t)\|dt = \int_0^{2\pi} \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a^2+b^2t^2}dt \\
&= \sqrt{a^2+b^2}\cdot\int_0^{2\pi}\frac{1}{a^2}\cdot\frac{1}{\left(1+\left(\frac{b}{a}\right)^2t^2\right)}dt \\
&= \sqrt{a^2+b^2}\cdot\frac{1}{a^2}\int_0^{2\pi}\frac{1}{\left(1+\left(\frac{b}{a}t\right)^2\right)}dt, \left\{\begin{array}{cc} s=\frac{b}{a}t & t=0\Rightarrow s=0 \\ ds=\frac{b}{a}dt & t=2\pi\Rightarrow s=\frac{2b\pi}{a}\end{array}\right\} \\
&= \sqrt{a^2+b^2}\cdot\frac{1}{a^2}\cdot\frac{a}{b}\int_0^{\frac{2b\pi}{a}}\frac{1}{(1+s^2)}ds = \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{ab}\left(\arctan(s)\Big|_0^{\frac{2b\pi}{a}}\right) \\
&= \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{ab}\left(\arctan\left(\frac{2b\pi}{a}\right)\right)
\end{aligned}$$

### תרגיל 11.2.3.

חשבו את $\int_C xyd\ell$ כאשר $C$ המסילה $|x|+|y|=1$.




**פתרון התרגיל:**

נחלק את המסילה ל4 מסילות שונות, כאשר כל מסילה היא ישר.

$$\int_C xyd\ell = \int_{C_1} xyd\ell + \int_{C_2} xyd\ell + \int_{C_3} xyd\ell + \int_{C_4} xyd\ell$$

כאשר:

$$C_1=\{\gamma_1(t)=(1-t,t):t\in[0,1]\}\quad\Rightarrow\quad\begin{cases}f(\gamma_1(t))=t(1-t)\\ \|\gamma_1'(t)\|=\sqrt{2}\end{cases}$$

$$C_2=\{\gamma_2(t)=(-t,1-t):t\in[0,1]\}\quad\Rightarrow\quad\begin{cases}f(\gamma_2(t))=-t(1-t)\\ \|\gamma_2'(t)\|=\sqrt{2}\end{cases}$$

ו־$C_3$ ישר מ־$(-1,0)$ ל־$(0,-1)$, ו־$C_4$ מ־$(0,-1)$ ל־$(1,0)$.
אז:

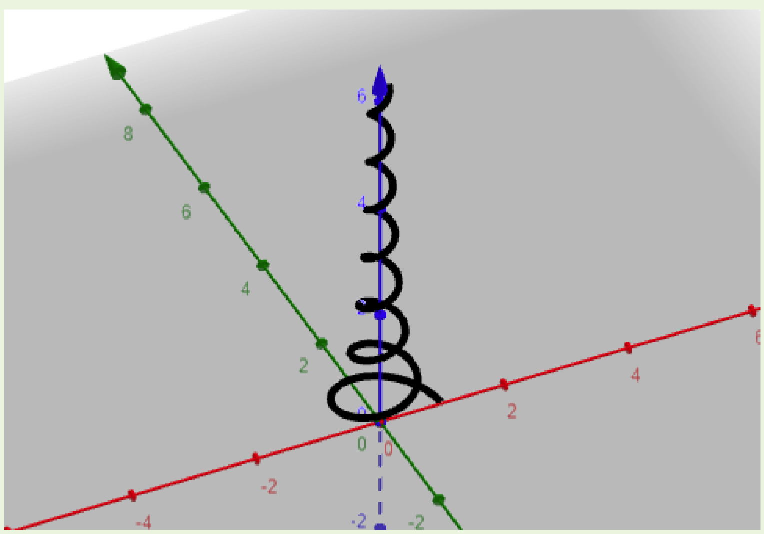
$$\int_{C_1}xyd\ell+\int_{C_2}xyd\ell=\int_0^1\sqrt{2}t(1-t)\,dt-\int_0^1\sqrt{2}t(1-t)\,dt=0$$

באותו האופן מתקיים כי $\int_{C_3}xyd\ell+\int_{C_4}xyd\ell=0$ לכן, סה"כ $\int_C xyd\ell=0$.

### תרגיל 11.2.4.

תהא המסילה הבאה ב־$\mathbb{R}^3$:

$$\gamma(t)=\left(\frac{1}{t+1}\cos(t),\frac{1}{t+1}\sin(t),t\right),t\in[0,2\pi]$$




חשבו את השטח ש־$\gamma$ גורפת מעל ציר ה־$z$ - מצאו ביטוי בעזרת אינטגרל, אין צורך לחשב אותו.

**פתרון התרגיל:**

נשים לב כי אפשר לחשוב על השטח הזה כ"מסה" של חבל:

$$\tau(t) = \left(\frac{1}{t+1}\cos(t), \frac{1}{t+1}\sin(t)\right)$$

ובכל נקודה $\tau(t)$, הגובה של החבל הוא $t$, כלומר אפשר לחשוב על השטח הזה, שנסמנו $A$ בתור המסה של חבל $\tau(t)$, עם פונקצית צפיפות $\rho(\tau(t)) = t$, כלומר:

$$A = \int_\tau \rho d\ell = \int_0^{2\pi} \rho(\tau(t))\|\gamma'(t)\|dt$$

נחשב את $\|\gamma'(t)\|$:

$$\gamma'(t) = \left(-\frac{1}{(t+1)^2}\cos(t) - \frac{\sin(t)}{t+1}, -\frac{1}{(t+1)^2}\sin(t) + \frac{\cos(t)}{t+1}\right)$$

אז:

$$\begin{aligned}\|\gamma'(t)\| &= \sqrt{\left(-\frac{1}{(t+1)^2}\cos(t) - \frac{\sin(t)}{t+1}\right)^2 + \left(-\frac{1}{(t+1)^2}\sin(t) + \frac{\cos(t)}{t+1}\right)^2} \\ &= \sqrt{\left(\frac{1}{(t+1)^2}\right)^2 + \frac{1}{(t+1)^2}} \\ &= \sqrt{\frac{1}{(t+1)^4} + \frac{1}{(t+1)^2}}\end{aligned}$$

אז:

$$A = \int_0^{2\pi} t\sqrt{\frac{1}{(t+1)^4} + \frac{1}{(t+1)^2}}dt$$

## 11.3 אינטגרל קווי מסוג שני

**תזכורת.**

בהנתן שדה וקטורי:

$$\vec{F} : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$$

שנסמן:

$$\vec{F}(x,y) = (P(x,y), Q(x,y))$$

ועקום $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^2$ שנמצא ב$D$, אפשר לחשוב על $\vec{F}$ ככוח ועל $\gamma$ כמסילה של חלקיק ואז אפשר לשאול מהי העבודה ש $\vec{F}$ הפעיל על החלקיק בזמן שנע ב$\gamma$.

נחשב את העבודה בעזרת <u>אינטגרל קווי מסוג שני</u>:

$$\begin{aligned}\int_\gamma \vec{F}\cdot d\vec{r} &= \int_a^b \vec{F}(\gamma(t))\cdot\gamma'(t)dt\\ &= \int_a^b (P(x(t),y(t)),Q(x(t),y(t)))\cdot(x'(t),y'(t))dt\\ &= \int_a^b \left(P(x(t),y(t))x'(t)+Q(x(t),y(t))y'(t)\right)dt\\ &= \int_a^b Pdx+Qdy\end{aligned}$$

כאשר אנו מסמנים:

$$\begin{cases} x=x(t) \implies dx=x'(t)dt\\ y=y(t) \implies dy=y'(t)dt\end{cases}$$

**הערה.**

לפעמים נסמן $\vec{v}\cdot\vec{w}=\langle\vec{v},\vec{w}\rangle$, במקרה זה:

$$\int_\gamma \vec{F}d\vec{r} = \int_a^b \left\langle \vec{F}(\gamma(t)),\gamma'(t)\right\rangle dt$$

אינטגרל זה אינו תלוי בפרמטריזציה של $\gamma$ <u>אבל</u> הוא תלוי בכיוון המסילה, כלומר אם $\tau,\gamma$ פרמטריזציות של אותה מסילה, <u>וגם</u> $\gamma(a)=\tau(a)=A,\gamma(b)=\tau(b)=B$, אז באמת:

$$\int_\gamma \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_\tau \vec{F}\cdot d\vec{r}$$

אבל אם $\gamma(a)=A,\gamma(b)=B$ אבל $\tau(a)=B,\tau(b)=A$, כלומר $\gamma,\tau$ פרמטריזציות של אותה מסילה, בכיוונים הפוכים, נקבל כי האינטגרלים שונים בסימן:

$$\int_\gamma \vec{F}\cdot d\vec{r} = -\int_\tau \vec{F}\cdot d\vec{r}$$

**הערה.**

גם על שדה $F:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$, כאשר:

$$F(x,y,z)=(P(x,y,z),Q(x,y,z),R(x,y,z))$$

ומסילה $\gamma:[a,b]\to\mathbb{R}^3$ אפשר לעשות חישוב דומה:

$$\begin{aligned}\int_\gamma \vec{F}\cdot d\vec{r} &= \int_a^b \vec{F}(\gamma(t))\cdot\gamma'(t)dt\\ &= \int_a^b (P(x,y,z),Q(x,y,z),R(x,y,z))\cdot(x',y',z')dt\\ &= \int_a^b Pdx+Qdy+Rdz\end{aligned}$$

**תרגיל 11.3.1.**

חשבו $\int_C (ydx+xdy)$ כאשר $C$ הינו המסלול $y=x^2$ עבור $x$ בין 0 ל-1.

**פתרון התרגיל:**

נסמן $\vec{F}=(P,Q)=(y,x)$, כלומר $P(x,y)=y, Q(x,y)=x$. נשתמש בפרמטריזציה $\gamma(t)=(t,t^2), t\in[0,1]$ אז בעזרת חישוב ישיר:

$$\begin{aligned}\int_C (ydx+xdy) &= \int_0^1 \left(P(x(t),y(t))x'(t)+Q(x(t),y(t))y'(t)\right)dt=\int_0^1 \left(t^2\cdot 1+t\cdot 2t\right)dt\\ &= \int_0^1 \left(3t^2\right)dt=\left.\frac{3t^3}{3}\right|_0^1=1\end{aligned}$$

**תרגיל 11.3.2.**

חשבו את העבודה של השדה הוקטורי $\vec{F}=\left(x^2,2y,z^2\right)$ לאורך הישר מ- $(1,2,0)$ ל-$(3,-1,1)$.

**פתרון התרגיל:**

נמצא פרמטריזציה של העקום:

$$\gamma(t)=(1-t)(1,2,0)+t(3,-1,1)=(1+2t,2-3t,t), t\in[0,1]$$

אז האינטגרל הוא:

$$\begin{aligned}
\int_L \vec{F}d\vec{r} &= \int_L \left(x^2dx + 2ydy + z^2dz\right) = \left[\begin{array}{c} x\left(t\right) = 1+2t \Rightarrow dx = 2dt \\ y\left(t\right) = 2-3t \Rightarrow dy = -3dt \\ z\left(t\right) = t \Rightarrow dz = dt \end{array}\right] \\
&= \int_0^1 \left(\left(1+2t\right)^2 2 + 2\left(2-3t\right)\left(-3\right) + t^2\right) dt \\
&= \int_0^1 \left(2\left(1+4t+4t^2\right) - 6\left(2-3t\right) + t^2\right) dt \\
&= \int_0^1 \left(9t^2 + 26t - 10\right) dt = \left[3t^3 + 13t^2 - 10t\right]\Big|_0^1 = 6
\end{aligned}$$

# תרגול שנים עשר

## 12.1 משפט גרין

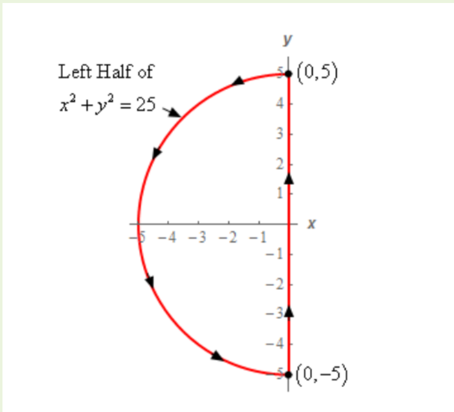
**תזכורת.**

משפט גרין מחבר לנו בין אינטגרל מסילתי מסוג שני, $\oint Pdx + Qdy$ ואינטגרל כפול.
יהא $D$ תחום סגור וחסום שהוא איחוד סופי של תחומים פשוטים (ביחס לצירים $x$ או $y$) ב-$\mathbb{R}^2$, כאשר $\partial D$ עקום חלק למקוטעין בעל מגמה חיובית כלומר $D$ נמצא <u>משמאל</u> לכיוון ההתקדמות, אז:

$$\oint_{\partial D} Pdx + Qdy = \iint_D \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} dxdy$$

**תרגיל 12.1.1.**

חשבו את $\oint_C y^3dx - x^3dy$, כאשר $C$ המסילה הבאה:




<u>**פתרון התרגיל:**</u>
נשים לב כי השטח הכלוא ע"י $C$ הוא חצי מעגל, שקל לחשב עליו אינטגרל עם חילוף משתנים, אז נסמן אותו ב-$D$ ונשתמש בגרין:

$$\oint_C y^3dx - x^3dy = \iint_D \frac{\partial}{\partial y}(y^3) - \frac{\partial}{\partial x}(-x^3)dxdy = \iint_D 3y^2 + 3x^2dxdy$$

נשתמש בהחלפת משתנים, ונקבל:

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}\int_0^5 3r^3 dr d\theta = \pi\int_0^5 3r^3 dr = \pi\frac{3}{4}\cdot 5^4$$

### תרגיל 12.1.2.

חשבו את $\oint_C \vec{F}\cdot d\vec{r}$, כאשר $\vec{F}(x,y) = (e^y, -\sin(\pi x))$, ו-$C$ המשולש העובר בין הקודקודים:

$$(1,0),(0,1),(-1,0)$$

נגד כיוון השעון.

**פתרון התרגיל:**
נשתמש במשפט גרין, אז אם $C=\partial T$, אז:

$$\oint_C \vec{F}\cdot d\vec{r} = \iint_T \frac{\partial}{\partial x}(-\sin(\pi x)) - \frac{\partial}{\partial y}e^y dxdy = \iint_T -\pi\cos(\pi x) - e^y dxdy$$

$T$ הוא התחום הפשוט הבא:

$$T = \{(x,y)|y\in[0,1], y-1\le x\le 1-y\}$$

אז:

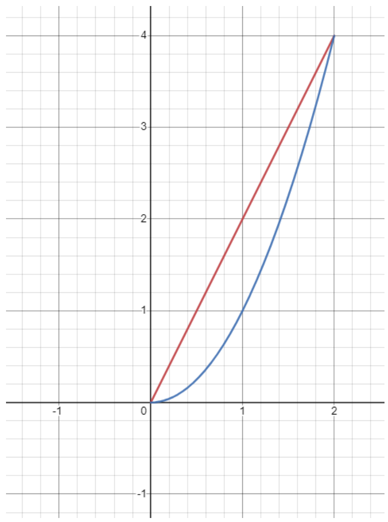
$$\begin{aligned}\oint_C \vec{F}\cdot d\vec{r} &= \int_0^1\int_{1-y1}^{y-1} -\pi\cos(\pi x) - e^y dxdy\\ &= \int_0^1 [-\sin(\pi x) - xe^y]\Big|_{x=y-1}^{x=1-y} dy\\ &= \int_0^1 [-\sin(\pi(1-y)) + \sin(\pi(y-1)) - (1-y)e^y + (y-1)e^y]\,dy\\ &= \int_0^1 [-2\sin(\pi(1-y)) - 2(1-y)e^y]\,dy\\ &= \ldots = 4-2e-\frac{4}{\pi}\end{aligned}$$

### תרגיל 12.1.3.

חשבו את העבודה שחלקיק עושה כאשר נע בקו ישר בין $(0,0)$ ל $(2,4)$, ואז חוזר דרך $y=x^2$ לראשית, דרך שדה הכוח $\vec{F}(x,y)=(e^{x^{45}\sin x},e^x)$.

**פתרון התרגיל:**

נשרטט את המסילה.




נשים לב כי המסילה היא באוריינטציה שלילית, אז נסמן את המסילה עם אוריינטציה חיובית ב$\gamma$, ונחשב את $-\oint_\gamma \vec{F}\cdot d\vec{r}$.

עפ"י משפט גרין:

$$-W=\oint_\gamma \vec{F}\cdot d\vec{r}=\iint_D \frac{\partial}{\partial x}e^x-\frac{\partial}{\partial y}(e^{x^{45}\sin x})=\iint_D e^x$$

כאשר $D$ התחום:

$$D=\{(x,y)|x\in[0,2]|x^2<y<2x\}$$

אז:

$$-W=\iint_D e^x dxdy=\int_0^2\int_{x^2}^{2x}e^x dydx=\int_0^2 e^x\int_{x^2}^{2x}dydx=\int_0^2 e^x(x^2-2x)dx=...=4$$

כלומר $W=-4$.

**תרגיל 12.1.4.**

(תרגיל ממבחן).
חשבו את השטח החסום בעקום $C(t)=\left(\cos^2 t-\sin^2 t,\sin t+\cos t\right), t\in\left[-\frac{\pi}{4},\frac{7\pi}{4}\right]$.

**פתרון התרגיל:**
נבדוק מתי המסילה חותכת את עצמה

$$\left(\cos^2 t-\sin^2 t,\sin t+\cos t\right)=\left(\cos^2 s-\sin^2 s,\sin s+\cos s\right)$$
$$(\cos 2t,\sin t+\cos t)=(\cos 2s,\sin s+\cos s)$$
$$\begin{cases}\cos 2t & =\cos 2s\\ \sin t+\cos t & =\sin s+\cos s\end{cases}$$

מהמשוואה הראשונה נקבל:

$$\begin{aligned}\cos 2t&=\cos 2s\\ 2t&=\pm 2s+2\pi k\\ t&=\pm s+\pi k\end{aligned}$$

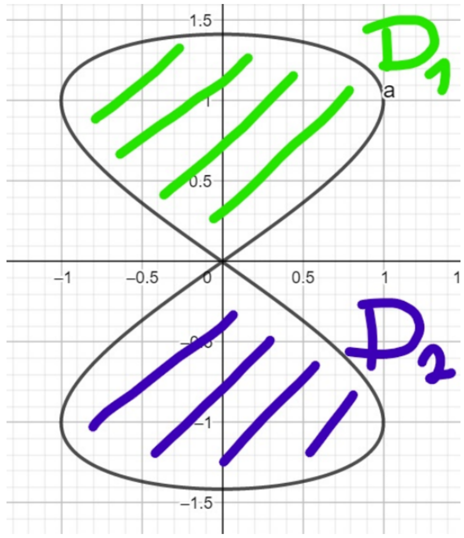
כאשר $k\in\{0,1\}$. מהמשוואה השנייה נקבל כי:

$$\begin{aligned}\sin t-\sin s&=\cos s-\cos t\\ \cos\left(\frac{t+s}{2}\right)\sin\left(\frac{t-s}{2}\right)&=-\sin\left(\frac{t+s}{2}\right)\sin\left(-\frac{t-s}{2}\right)\\ \cos\left(\frac{t+s}{2}\right)&=\sin\left(\frac{t+s}{2}\right)\\ \frac{t+s}{2}&=\frac{\pi}{4}+\pi k\\ t&=\frac{\pi}{2}+2\pi k-s\end{aligned}$$

ביחד:

$$\begin{aligned}\pm s+\pi k_1&=\frac{\pi}{2}+2\pi k_2-s\\ s(1\pm 1)&=\frac{\pi}{2}+\pi(2k_2-k_1)\\ s&=\frac{\pi}{4}+\pi k_3\\ s&=-\frac{\pi}{4},\frac{3}{4}\pi,\frac{7}{4}\pi\end{aligned}$$

כאשר לקחנו בסוף רק את האפשרויות הרלוונטיות לתחום שלנו.
נסיק כי צריך לפצל את חישוב לשני חלקים: כאשר $t\in\left[-\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4}\right]$ וכאשר $t\in\left[\frac{3\pi}{4},\frac{7\pi}{4}\right]$. נסמן את העקומות המתאימות ב-$C_1,C_2$, השטח הרצוי ב-$D$, ואת שני השטחים המתאימים ב-$D_1$ ו-$D_2$ בהתאמה.




ניזכר שהשטח נתון ע"י $\text{Area}\,(D)=\int_D 1dA$. אם נבחר שדה וקטורי $F=(P,Q)$ כך ש-$Q_x-P_y=1$ נוכל לקבל:

$$A\left(D_i\right)=\int\limits_{D_i}1dA=\iint_{D_i}\left(Q_x-P_y\right)dA=\int\limits_{C_i}Pdx+Qdy$$

כאשר $C$ היא המסילה התוחמת את $D$. לכן, נוכל לבחור $F\left(x,y\right)=\left(-y,0\right)$ למשל, ולקבל:

$$\begin{aligned}A\left(D_1\right)=&\int\limits_{C_1}-ydx+0dy=\int\limits_{C_1}-ydx=\int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}\left(\sin t+\cos t\right)2\sin\left(2t\right)dt\\=&4\int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}\left(\sin t+\cos t\right)\sin t\cos tdt=4\int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}\sin^2 t\cos tdt+4\int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}\cos^2 t\sin tdt\\=&\frac{4}{3}\left[\sin^3 t\right]_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}+\frac{4}{3}\left[-\cos^3 t\right]_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}=\\=&\frac{4}{3}\left[\sin^3\left(\frac{3\pi}{4}\right)-\sin^3\left(-\frac{\pi}{4}\right)-\cos^3\left(\frac{3\pi}{4}\right)+\cos^3\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right]\\=&\frac{4}{3}\left[\frac{1}{2\sqrt{2}}+\frac{1}{2\sqrt{2}}+\frac{1}{2\sqrt{2}}+\frac{1}{2\sqrt{2}}\right]=\frac{8}{3\sqrt{2}}\end{aligned}$$

נשים לב ש-$\text{Area}\,(D_2)=\text{Area}\,(D_1)$, ולכן $\text{Area}\,(D)=2\,\text{Area}\,(D_1)=\frac{16\sqrt{2}}{3}$.

### 12.1.1 שדה משמר

**תזכורת.**

יהא $\vec{F}(x,y)=(P(x,y),Q(x,y))$, שדה וקטורי רציף, הוא נקרא משמר בתחום $D$ אם לכל זוג עקומים, $\gamma_1,\gamma_2\subset D$ שמתחילים ומסתיימים באותה נקודה מתקיים:

$$\int_{\gamma_1}\vec{F}\cdot d\vec{r}=\int_{\gamma_1}\vec{F}\cdot d\vec{r}$$

במקרה זה, לכל מסילה סגורה, $\gamma\subset D$ מתקיים:

$$\oint_{\gamma}\vec{F}\cdot d\vec{r}=0$$

וקיימת פונקציה $U(x,y)$ גזירה ברציפות המקיימת:

$$\nabla U=\vec{F}$$

כלומר $\begin{pmatrix}\frac{\partial U}{\partial x}=P(x,y)\\ \frac{\partial U}{\partial y}=Q(x,y)\end{pmatrix}$, כך שלכל עקום $\gamma$ מנקודה $A$ לנקודה $B$ מתקיים:

$$\int_{\gamma_3}\vec{F}\cdot d\vec{r}=U(B)-U(A)$$

וכמסקנה מכך: כמובן שגם הכיוון השני נכון, אם קיימת $U$ כך ש $\nabla U=\vec{F}$, אז $\vec{F}$ משמר, במקרה זה נקרא ל $U$ הפוטנציאל של $F$, והיא מוגדרת עד כדאי קבוע, כלומר אם $U$ פוטנציאל של $\vec{F}$, אז גם $\tilde{U}(x,y)=U(x,y)+c$.

**תזכורת.**

תחום נקרא פשוט קשר אם הוא הוא קשיר ללא חורים.

אם $D$ פשוט קשר, אז שדה $\vec{F}$ שדה וקטורי גזיר ברציפות הוא משמר אמ"מ $\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}$ ב$D$, וההוכחה לכך פשוטה (לפחות כיוון אחד שלה) כי אם:

$$\begin{cases}U_x=P\\ U_y=Q\end{cases}\implies P_y=U_{xy}=U_{yx}=Q_x$$

**תרגיל 12.1.5.**

הוכיחו כי לא קיימת פונקציה $f(x,y)$ רציפה ומוגדרת בכל $\mathbb{R}^2$, כך ש $\nabla f = \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}$.

**פתרון התרגיל:**

נגדיר את השדה $\vec{F}$ להיות $\vec{F} = (-y,x) = \nabla f$, אז אם קיימת $f$ כבתרגיל, אז $\vec{F}$ שדה משמר, נראה כי $\vec{F}$ אינו שדה משמר ב2 דרכים:

דרך א':

אם $\vec{F}$ שדה משמר בכל $\mathbb{R}^2$, שהוא תחום פשוט קשר אז מתקיים:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

אבל:

$$-1 = \frac{\partial P}{\partial y} \neq \frac{\partial Q}{\partial x} = 1$$

דרך ב':

אם $\vec{F}$ שדה משמר אז לכל מסילה סגורה $\gamma$ מתקיים $\oint_\gamma \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$, ננסה על $\gamma$ עיגול יחידה.

$$\oint_\gamma \vec{F} \cdot d\vec{r} = \oint_\gamma -ydx + xdy = \int_0^{2\pi} -\sin(t)\sin(t) + \cos(t)\cos tdt = 2\pi \neq 0$$

**תרגיל 12.1.6.**

מצאו את הפוטנציאל של הפונקציות הבאות:

1.
$$\vec{F} = (2xy + 3y, x^2 + 3x - 5)$$

2.
$$\vec{F} = \left(\frac{y(3x^3-1)}{x}, x^3 + \cos(y) - \ln(x)\right)$$

**פתרון התרגיל:**

1. נחפש $U$ כך ש $\nabla U = F$, אז ראשית:

$$U = \int (2xy + 3y)\,dx = 2y \cdot \frac{x^2}{2} + 3xy + C_1(y)$$

$$U = \int (x^2 + 3x - 5)\,dy = yx^2 + 3xy - 5y + C_2(x)$$

נשים לב כי $C_1(y)=-5y, C_2(x)=0$ פתרון, כלומר:

$$U(x,y)=yx^2+3xy-5y+c$$

כאשר $c\in\mathbb{R}$ קבוע.

.2

$$U=\int \frac{y(3x^3-1)}{x}dx=\int\left(3yx^2-\frac{y}{x}\right)dx=yx^3-y\ln(x)+C_1(y)$$

$$U=\int\left(x^3+\cos(y)-\ln(x)\right)dy=yx^3+\sin(y)-y\ln(x)+C_2(x)$$

לאחר השוואת הפתרונות נראה כי $C_1(y)=\sin(y), C_2(x)=0$, ולכן:

$$U(x,y)=yx^3+\sin(y)-y\ln(x)+c$$

כאשר $c\in\mathbb{R}$ קבוע.

## תרגיל 12.1.7.

חשבו את האינטגרל

$$\int_C\left(\frac{1}{x^2}\sin y\cdot e^{\frac{1}{x}}+y^3\right)dx+\left(3y^2x+\sin y-\cos y\cdot e^{\frac{1}{x}}\right)dy$$

כאשר $C$ היא מסילה המונחת על חלק מהמעגל $1=(x-2)^2+y^2$, המתחילה בנקודה $(2,1)$ ונגמרת בנקודה $(2,-1)$, עם כיוון השעון.

**פתרון התרגיל:**

ראשית, נשים לב שאינטגרל מאוד מסובך, אז לא נראה שיהיה פורה לנסות לחשב אותו ישירות. במקום זאת, ננסה לבדוק אם השדה משמר, ואם יצא שהוא אכן משמר אז נוכל לחשב לו פוטנציאל ולהשתמש בו על מנת לחשב את האינטגרל בקלות על ידי הצבת קצוות המסילה $C$ בלבד.
ראשית נסמן $\vec{F}=(P,Q)=\left(\frac{1}{x^2}\sin y\cdot e^{\frac{1}{x}}+y^3, 3y^2x+\sin y-\cos y\cdot e^{\frac{1}{x}}\right)$ שנית, נבדוק אם $P_y=Q_x$ בתחום על מנת לבדוק ש-$F$ שדה משמר:

$$P_y=\frac{d}{dy}\left(\frac{1}{x^2}\sin y\cdot e^{\frac{1}{x}}+y^3\right)=\frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}\cos y+3y^2$$

$$Q_x=\frac{d}{dx}\left(3y^2x+\sin y-\cos y\cdot e^{\frac{1}{x}}\right)=3y^2-\frac{-1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}\cos y$$

ואכן מתקיים השוויון הדרוש. נשים לב ש-$\vec{F}$ מוגדרת וגזירה ברציפות בתחום $x>0$, שזהו תחום פשוט קשר, לכן $\vec{F}$ אכן שדה משמר בתחום פשוט קשר, וקיים לה פוטנציאל, $\phi$ המקיימת $\vec{F}=\nabla\phi$. זאת אומרת

$$\phi_x=P$$
$$\phi_y=Q$$

נסביר כעת כיצד מוצאים את הפוטנציאל $\phi$:
ראשית, מהמשוואה הראשונה

$$\phi_x = \frac{1}{x^2}\sin y\cdot e^{\frac{1}{x}} + y^3$$

נבצע אינטגרציה לא מסוימת לפי $x$, ונקבל את הפונקציה הקדומה המתאימה, עד כדי קבוע שעשוי להיות תלוי ב-$y$:

$$\begin{aligned}\phi &= \int \frac{1}{x^2}\sin y\cdot e^{\frac{1}{x}} + y^3 dx\\ &= -\sin y\cdot e^{\frac{1}{x}} + y^3 x + k(y)\end{aligned}$$

כעת, נגזור לפי $y$ את שני האגפים ונשתמש בעובדה ש-$\phi_y = Q$:

$$\begin{aligned}\phi_y &= -\cos y\cdot e^{\frac{1}{x}} + 3y^2 x + k'(y)\\ Q &= 3y^2 x + \sin y - \cos y\cdot e^{\frac{1}{x}}\end{aligned}$$

נשווה בין שני הביטויים ונקבל ש-$k'(y) = \sin y$, ולכן $k(y) = -\cos y$. סה"כ נקבל כי

$$\phi = -\sin y\cdot e^{\frac{1}{x}} + y^3 x - \cos y$$

(שימו לב שהשמטנו קבוע ב-$k$, אבל הקבוע הזה כבר לא משנה, כי כעת נחסר את ערכי $\phi$ בנקודות הקצה, והקבוע יצטמצם). כעת נשתמש בנוסחה לגבי פוטנציאל של שדה משמר:

$$\begin{aligned}\int_C \vec{F}\cdot d\vec{r} &= \phi(2,-1) - \phi(2,1)\\ &= \left(-\sin(-1)\cdot e^{\frac{1}{2}} - 2 - \cos(-1)\right) - \left(-\sin(1)\cdot e^{\frac{1}{2}} + 2 - \cos 1\right)\\ &= 2\sin 1\cdot e^{\frac{1}{2}} - 4\end{aligned}$$

## תרגיל 12.1.8.

(תרגיל ממבחן).
נתון השדה הוקטורי $\vec{F} = \left(\frac{4x-y}{4(x^2+y^2)}, \frac{x+4y}{4(x^2+y^2)}\right)$. חשבו את $\int_C \vec{F} d\vec{r}$ כאשר:

$$C = \left\{\frac{x^2}{100} + \frac{y}{81}^2 = 1\right\}$$

והמסילות מכוונות נגד כיוון השעון.

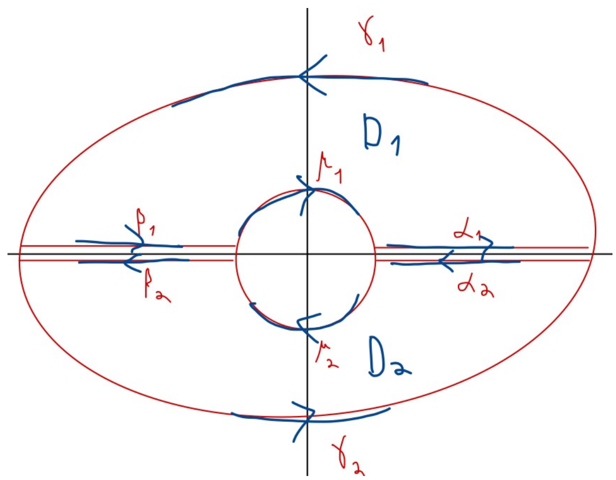
**פתרון התרגיל:**

תחילה נשים לב כי מתקיים:

$$P_y=\frac{-4\left(x^2+y^2\right)-(4x-y)\cdot 8y}{\left(4\left(x^2+y^2\right)\right)^2}=\frac{y^2-x^2-8xy}{4\left(x^2+y^2\right)^2}$$
$$Q_x=\frac{4\left(x^2+y^2\right)-(x+4y)\cdot 8x}{\left(4\left(x^2+y^2\right)\right)^2}=\frac{y^2-x^2-8xy}{4\left(x^2+y^2\right)^2}$$

כלומר $P_y=Q_x$.

כלומר $F$ משמר בכל נקודה שאינה $(0,0)$. נסתכל על אליפסה שבתוכה מעגל יחידה. נגדיר את התחומים $D_1, D_2$ יחד עם המסילות והאוריינטציות שבציור.




אז נקבל כי:

$$\iint_{D_1}\left(Q_x-P_y\right)dA=\iint_{D_2}\left(Q_x-P_y\right)dA=0$$

האינטגרלים על $\beta_1$ מתבטלת עם האינטגרל על $\beta_2$, וכך גם האינטגרלים על $\alpha_1,\alpha_2$, אז נקבל כי:

$$\oint_{\partial D_1}\vec{F}\cdot d\vec{r}+\oint_{\partial D_2}\vec{F}\cdot d\vec{r}=0\implies\oint_{\gamma_1,\gamma_2}\vec{F}\cdot d\vec{r}=-\oint_{\mu_1,\mu_2}\vec{F}\cdot d\vec{r}$$

יהיה לנו קל (יחסית) לחשב את האינטגרל על מעגל היחידה $C'$, נשים לב לכיוון של המעגל, כלומר פרמטריזציה שלו הוא $(\cos(t),-\sin(t)),t\in[0,2\pi]$.

$$\left\{\begin{array}{ll}x=\cos t\Rightarrow & dx=-\sin t\,dt\\ y=-\sin t\Rightarrow & dy=-\cos t\,dt\end{array}\right\}$$

$$
\begin{aligned}
-\int_{C'} \vec{F} d\vec{r} &= -\int_{C'} \left( \frac{4x-y}{4\left(x^2+y^2\right)} dx + \frac{x+4y}{4\left(x^2+y^2\right)} dy \right) \\
&= -\int_0^{2\pi} \left( \frac{4\cos t + \sin t}{4} \left(-\sin t\right) dt + \frac{\cos t - 4\sin t}{4} (-\cos t) dt \right) \\
&= \frac{1}{4} \int_0^{2\pi} dt = \frac{1}{4} \cdot 2\pi = \frac{\pi}{2}
\end{aligned}
$$

# תרגול שלושה עשר

## 13.0.1 פרמטריזציה של משטח

**תזכורת.**

הצגה פרמטרית של משטח ב$\mathbb{R}^3$ זה פונקציה וקטורית:

$$\vec{S} : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$$

רציפה, נסמן:

$$\vec{S}(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v))$$

עבור משטח כזה, בנקודה $(u_0, v_0)$, כלומר על המשטח בנקודה $(x(u_0,v_0), y(u_0,v_0), z(u_0,v_0))$, הנורמל נתון על ידי:

$$\vec{N} = \frac{\partial \vec{S}}{\partial u}(u_0,v_0) \times \frac{\partial \vec{S}}{\partial v}(u_0,v_0)$$

כאשר נשים לב כי $\frac{\partial \vec{S}}{\partial u}(u_0,v_0), \frac{\partial \vec{S}}{\partial v}(u_0,v_0)$ הם <u>ווקטורים משיקים למשטח בנקודה $\vec{S}(u_0,v_0)$</u>.

**תזכורת.**

אם $\vec{S} : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ פרמטריזציה <u>חלקה</u> (גזירה ברציפות כך ש $S_u \times S_v \neq 0$) אז שטח הפנים של המשטח הוא:

$$A = \iint_D \left\|\vec{N}\right\| dudv = \iint_D \left\| \frac{\partial \vec{S}}{\partial u}(u,v) \times \frac{\partial \vec{S}}{\partial v}(u,v) \right\| dudv$$

## 13.0.2 אינטגרל משטחי מסוג ראשון

**תזכורת.**

אם $S$ משטח דו-צצדי, חלק, $f : R \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, כאשר $R$ מכיל את המשטח, אז נוכל לחשב את <u>המסה</u> של המשטח כאשר בכל נקודה $p$ עליו, נחשוב על $f(p)$ בתור הצפיפיות של המשטח, נסמן את הגדול הזה על ידי:

$$\iint_S f(x,y,z) dS$$

ונחשב אותו על ידי:

$$\iint_S f(x,y,z)dS = \iint_D f(S(u,v))\|S_u(u,v) \times S_v(u,v)\|dudv$$

האינטגרל הזה נקרא אינטגרל משטחי מסוג ראשון.

**הערה.**

אם $S$ משטח סגור נסמן $\oiint_S$, בקורס שלנו נתייחס למשטח סגור כמשטח שהוא סגור פרט לקבוצה משטח אפס.

**הערה.**

אם $S$ הוא גרף של פונקציה, כלומר $z = f(x,y)$, אז $\vec{S}(u,v) = (u,v,f(u,v))$ פרמטריזציה, ואז יתקבל:

$$\|N\| = \left\|\det\begin{pmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & 0 & f_u \\ 0 & 1 & f_v \end{pmatrix}\right\| = \left\|\begin{pmatrix} -f_u \\ -f_v \\ 1 \end{pmatrix}\right\| = \sqrt{1+f_u^2+f_v^2}$$

לפרמטריזציה כזאת נקרא פרמטריזציה טבעית.

**תרגיל 13.0.1.**

חשבו את שטח הפנים של המשטח הנתון ע"י הפרמטריזציה: $\begin{cases} x = t\cos\varphi \\ y = t\sin\varphi \\ z = t \end{cases}$

כאשר $0 \le t \le h, 0 \le \varphi \le 2\pi$.

**פתרון התרגיל:**

נפתור את התרגיל הזה ב2 דרכים, ראשית בעזרת הפרמטריזציה הנתונה לנו:

1.

$$\vec{r}(t,\varphi) = (t\cos\varphi, t\sin\varphi, t)$$

$$\begin{aligned} ||\vec{r}_t \times \vec{r}_\varphi|| &= \left\|\begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ x_t & y_t & z_t \\ x_\varphi & y_\varphi & z_\varphi \end{vmatrix}\right\| = \left\|\begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \cos\varphi & \sin\varphi & 1 \\ -t\sin\varphi & t\cos\varphi & 0 \end{vmatrix}\right\| \\ &= ||(-t\cos\varphi, -t\sin\varphi, t)|| = \sqrt{(-t\cos\varphi)^2 + (-t\sin\varphi)^2 + t^2} = \sqrt{2}t \end{aligned}$$

ולכן:

$$\text{Area}(S) = \iint_S 1dS = \int_0^h \int_0^{2\pi} \sqrt{2}td\varphi dt = \sqrt{2}\,(2\pi)\left(\frac{t^2}{2}\Big|_0^h\right) = \sqrt{2}\pi h^2$$

2. נשים לב כי מדובר בחרוט, שהוא גרף של פונקציה:

$$z = \sqrt{x^2+y^2} := f(x,y)$$

אז נוכל לחשב את הנורמל בקלות:

$$f_x = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, f_y = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

כאשר התחום שלנו הוא $x^2+y^2 \le h$, אז:

$$\text{Area}(S) = \iint_{u^2+v^2\le h} \sqrt{1+\left(\frac{u}{\sqrt{v^2+u^2}}\right)^2+\left(\frac{v}{\sqrt{u^2+v^2}}\right)^2} dudv = \sqrt{2}\iint_{u^2+v^2\le h} dudv = \sqrt{2}\pi h^2$$

## תרגיל 13.0.2.

חשבו את שטח הפנים של המשטח הנוצר מחיתוך מעטפת החרוט $z = \sqrt{x^2+y^2}$ הכלוא בגליל $x^2+y^2=2x$, ב-$z \ge 0$.

**פתרון התרגיל:**

נשים לב כי $x^2+y^2 = 2x \Leftarrow (x-1)^2+y^2 = 1$. בעצם עלינו לחשב את שטח הפנים של חלק החרוט הנמצא בדיוק מעל המעגל סביב $(1,0)$, ברדיוס אחד במישור $xy$.
נעבור להצגה גרפית: $z = \sqrt{x^2+y^2}$, ואילו המשוואה $(x-1)^2+y^2 = 1$ מגדירה לנו את תחום האינטגרציה

במישור. אם $S$ המשטח שלנו, אז:

$$\begin{aligned}
\text{Area}(S) &= \\
&= \iint_S 1ds = \iint_D \left\|\vec{N}\right\| dxdy = \iint_D \sqrt{\left((-f_x)^2 + (-f_y)^2 + 1\right)} dxdy \\
&= \iint_D \sqrt{\left(\left(-\frac{2x}{2\sqrt{x^2+y^2}}\right)^2 + \left(-\frac{2y}{2\sqrt{x^2+y^2}}\right)^2 + 1\right)} dxdy \\
&= \iint_D \sqrt{\left(\frac{x^2}{x^2+y^2} + \frac{y^2}{x^2+y^2} + 1\right)} dxdy \\
&= \iint_D \sqrt{2} dxdy = \sqrt{2} \iint_D dxdy \overset{(*)}{=} \sqrt{2} \cdot \pi
\end{aligned}$$

$(*)$ האינטגרל $\iint_D dxdy$ שווה לשטח מעגל ברדיוס 1 .

## תרגיל 13.0.3.

**שאלה ממבחן.**

חשבו את שטח הפנים של הכיפה $S = \left\{(x,y,z) \left| x^2 + y^2 + z^2 = 1, z \geq \frac{1}{2}\right.\right\}$.

**פתרון התרגיל:**

נשתמש בפרמטריזציה כדורית שכן מדובר בחלק מכדור:

$$\vec{r}(\theta, \varphi) = (\sin\varphi\cos\theta, \sin\varphi\sin\theta, \cos\varphi)\ ,\ 0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq \varphi \leq ?$$

ננסה להבין מהו גבול האינטגרציה העליון של $\varphi$, ואכן מתקיים:

$$\cos\varphi = z \geq \frac{1}{2} = \cos\frac{\pi}{3}$$

לכן, $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{3}$.

נחשב את אלמנט השטח:

$$||\vec{r_\theta} \times \vec{r_\varphi}|| = \left\| \begin{matrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ x_\theta & y_\theta & z_\theta \\ x_\varphi & y_\varphi & z_\varphi \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ -\sin\varphi\sin\theta & \sin\varphi\cos\theta & 0 \\ \cos\varphi\cos\theta & \cos\varphi\sin\theta & -\sin\varphi \end{matrix} \right\| =$$

$$\left|\left|\left(-\sin^2\varphi\cos\theta, -\sin^2\varphi\sin\theta, -\sin\varphi\sin\theta\cos\varphi\sin\theta - \sin\varphi\cos\theta\cos\varphi\cos\theta\right)\right|\right| =$$

$$\left|\left|\left(-\sin^2\varphi\cos\theta, -\sin^2\varphi\sin\theta, -\sin\varphi\sin^2\theta\cos\varphi - \sin\varphi\cos^2\theta\cos\varphi\right)\right|\right|$$

$$\left|\left|\left(-\sin^2\varphi\cos\theta, -\sin^2\varphi\sin\theta, -\sin\varphi\cos\varphi\right)\right|\right| =$$

$$\sqrt{\left(-\sin^2\varphi\cos\theta\right)^2 + \left(-\sin^2\varphi\sin\theta\right)^2 + (-\sin\varphi\cos\varphi)^2}$$

$$\sqrt{\sin^4\varphi\cos^2\theta + \sin^4\varphi\sin^2\theta + \sin^2\varphi\cos^2\varphi} =$$

$$\sqrt{\sin^4\varphi + \sin^2\varphi\cos^2\varphi}$$

$$= |\sin\varphi| \overset{(*)}{=} \sin\varphi$$

כאשר במעבר האחרון אנחנו משתמשים בזה ש- $z \geq 0$ לכן $0 \leq \varphi \leq \pi/2$ ובפרט בתחום זה $\sin\varphi \geq 0$.
נחשב :

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin\varphi d\varphi d\theta = 2\pi\left(-\cos\varphi|_0^{\frac{\pi}{3}}\right) \quad = \quad 2\pi\left(-\cos\frac{\pi}{3} + \cos 0\right) = 2\pi\left(-\frac{1}{2} + 1\right) = \pi$$

**הערה.**

משום ש- $z \geq \frac{1}{2}$, היינו יכולים להציג את המשטח ע"י גרף הפונקציה $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$, ולהשתמש בפרמטריזציה טבעית:

$$\vec{S}(x,y) = \left(x, y, \sqrt{1 - x^2 - y^2}\right)$$

$$\vec{N} = (-f_x, -f_y, 1)$$

במקרה זה, היטל המשטח על המישור $xy$ נקבע ע"י :

$$x^2 + y^2 = 1 - z^2 \leq 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{4}$$

כלומר, $\Delta = \left\{x^2 + y^2 \leq \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2\right\}$. את האינטגרל הכפול המתקבל ניתן לפתור ע"י קואורדינטות פולריות.

### תרגיל 13.0.4.

חשבו $\iint_S x^2 dS$ , כאשר $S = \{(x,y,z)\,|x^2+y^2=a^2, 0\le z\le 1\}$.

**פתרון התרגיל:**

$S$ הינו גליל שרדיוס בסיסו הינו $a$, ואורכו 1 (בלי המכסה העליון ובלי המכסה התחתון).
נשתמש בפרמטריזציה הבאה :

$$\vec{r}(\theta,z) = (a\cos\theta, a\sin\theta, z)\ ,\ 0\le\theta\le 2\pi, 0\le z\le 1$$

נחשב :

$$\begin{aligned}||\vec{r_\theta}\times\vec{r_z}|| &= \left\| \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ x_\theta & y_\theta & z_\theta \\ x_z & y_z & z_z \end{vmatrix} \right\| = \left\| \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ -a\sin\theta & a\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \right\| \\ &= ||(a\cos\theta, a\sin\theta, 0)|| = \sqrt{(a\cos\theta)^2 + (a\sin\theta)^2 + (0)^2} = a\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi}\int_0^1 a^2\cos^2\theta\cdot adzd\theta &= a^3\int_0^{2\pi}\cos^2\theta\cdot 1d\theta \\ &\overset{(*)}{=} \frac{a^3}{2}\int_0^{2\pi}(1+\cos 2\theta)\,d\theta \\ &= \frac{a^3}{2}\left(2\pi + \left(\frac{\sin 2\theta}{2}|_0^{2\pi}\right)\right) = \frac{a^3}{2}(2\pi) = a^3\pi\end{aligned}$$

$(*)\ \cos^2\theta = \dfrac{1+\cos 2\theta}{2}$.

### תרגיל 13.0.5.

חשבו את שטח המשטח $z=x^2+y^2$ הנמצא מעל מעגל ברדיוס 1 סביב ראשית הצירים במישור $xy$.

**פתרון התרגיל:**

גרף הפונקציה $z=x^2+y^2$ הינו פרבולואיד. באופן כללי, "הנמצא מעל מעגל ברדיוס 1" שקול ללחתוך את הפרבולואיד עם הגליל $x^2+y^2=1$.
נשתמש בהצגה גרפית:

$$\vec{r}(x,y) = (x, y, x^2+y^2)\ ,\ x^2+y^2\le 1$$

$$||\vec{r_x}\times\vec{r_y}|| = \sqrt{(-f_x)^2 + (-f_y)^2 + 1} = \sqrt{(-2x)^2 + (-2y)^2 + 1} = \sqrt{4(x^2+y^2)+1}$$

שימו לב שקיבלנו אינטגרל כפול על עיגול, לכן סביר לבצע החלפה פולרית. ההחלפה הזאת למעשה שקולה לפרמטריזציה $r(\rho,\theta)=\left(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta,\rho^2\right)$ כאשר $0\le\rho\le1$, $0\le\theta\le2\pi$ .

$$\begin{aligned}\iint_{x^2+y^2\le1}\sqrt{4\left(x^2+y^2\right)+1}dxdy &= \left\{\begin{array}{lll} x=r\cos\theta & 0\le\theta\le2\pi & |J|=r \\ y=r\sin\theta & 0\le r\le1 & \end{array}\right\} \\ &= \int_0^{2\pi}\int_0^1\sqrt{4r^2+1}rdrd\theta \\ &= \left\{\begin{array}{ll} t=4r^2+1 & r=0\Rightarrow t=1 \\ dt=8rdr & r=1\Rightarrow t=5\end{array}\right\} \\ &= \frac{1}{8}\int_0^{2\pi}\int_1^5\sqrt{t}dt=\frac{1}{8}\int_0^{2\pi}\left(\frac{2}{3}(t)^{\frac{3}{2}}|_1^5\right) \\ &= \frac{1}{8}\cdot2\pi\cdot\frac{2}{3}\left(5^{\frac{3}{2}}-1\right)=\frac{\pi}{6}\left(5^{\frac{3}{2}}-1\right)\end{aligned}$$

### תרגיל 13.0.6.

חשבו את שטח הפנים של חלק המישור $x+2y+3z=6$ החסום בין המישורים $x=0,y=0,z=0$.

**פתרון התרגיל:**

נשים לב כי ניתן להציג את המשטח בצורה גרפית:

$$3z=6-x-2y\implies z=f(x,y)=2-\frac{x}{3}-\frac{2y}{3}$$

נשתמש בנוסחא עבר הצגה גרפית ונקבל :

$$\begin{aligned}\iint_\Delta\sqrt{\left(f_x\right)^2+\left(f_y\right)^2+1}dxdy &= \iint_\Delta\sqrt{\left(\frac{1}{3}\right)^2+\left(\frac{2}{3}\right)^2+1}dxdy \\ &= \iint_\Delta\sqrt{\frac{1}{9}+\frac{4}{9}+1}dxdy \\ &= \sqrt{\frac{14}{9}}\iint_\Delta dxdy\overset{(*)}{=}9\cdot\sqrt{\frac{14}{9}}\end{aligned}$$

$(*)$ $\Delta$ הינו ההיטל של המשטח על המישור $xy$, הביטוי $\iint_\Delta dxdy$ שווה לשטח ההיטל במישור, שהוא משולש ישר זווית עם ניצב אחד באורך 3 וניצב אחד בעל אורך 6 , ולכן שטחו שווה ל-$9=\frac{6\cdot3}{2}$.

### תרגיל 13.0.7.

חשבון $\iint_S z^2 dS$ , כאשר $S = \left\{(x,y,z)\left|x^2+y^2+z^2=1\right.\right\}$.

**פתרון התרגיל:**

ניתן להציג את המשטח בצורה גרפית ע"י $z=\pm\sqrt{1-x^2-y^2}$, במקרה זה היינו מפרידים את התחום לשני חלקים, כאשר בחלק אחד היינו מחשבים את האינטגרל בחצי העליון של הספירה $z=\sqrt{1-x^2-y^2}$, ובחלק השני היינו מחשבים את האינטגרל על החצי התחתון של הספירה $z=-\sqrt{1-x^2-y^2}$.
בכדי לא לחלק את האינטגרל נשתמש בפרמטריזציה הבאה:

$$\vec{r}\left(\varphi,\theta\right)=\left(\sin\varphi\cos\theta,\sin\varphi\sin\theta,\cos\varphi\right)\ ,\ 0\le\theta\le2\pi,0\le\varphi\le\pi$$

(כאן $\rho=1$ קבוע ואינו משתנה, שכן מדובר רק על שפת הכדור). נחשב :

$$\left|\left|\vec{r_\theta}\times\vec{r_\varphi}\right|\right|=\left\|\begin{matrix}\hat{i} & \hat{j} & \hat{k}\\ x_\theta & y_\theta & z_\theta\\ x_\varphi & y_\varphi & z_\varphi\end{matrix}\right\|=\left\|\begin{matrix}\hat{i} & \hat{j} & \hat{k}\\ -\sin\varphi\sin\theta & \sin\varphi\cos\theta & 0\\ \cos\varphi\cos\theta & \cos\varphi\sin\theta & -\sin\varphi\end{matrix}\right\|=$$

$$\left|\left|\left(-\sin^2\varphi\cos\theta,-\sin^2\varphi\sin\theta,-\sin\varphi\sin\theta\cos\varphi\sin\theta-\sin\varphi\cos\theta\cos\varphi\cos\theta\right)\right|\right|=$$

$$\left|\left|\left(-\sin^2\varphi\cos\theta,-\sin^2\varphi\sin\theta,-\sin\varphi\sin^2\theta\cos\varphi-\sin\varphi\cos^2\theta\cos\varphi\right)\right|\right|$$

$$\left|\left|\left(-\sin^2\varphi\cos\theta,-\sin^2\varphi\sin\theta,-\sin\varphi\cos\varphi\right)\right|\right|=$$

$$\sqrt{\left(-\sin^2\varphi\cos\theta\right)^2+\left(-\sin^2\varphi\sin\theta\right)^2+\left(-\sin\varphi\cos\varphi\right)^2}$$

$$\sqrt{\sin^4\varphi\cos^2\theta+\sin^4\varphi\sin\theta^2+\sin^2\varphi\cos^2\varphi}=$$

$$\sqrt{\sin^4\varphi+\sin^2\varphi\cos^2\varphi}$$

$$=\left|\sin\varphi\right|\overset{(*)}{=}\sin\varphi$$

$(*)$ $\sin\varphi\ge0$ עבור $0\le\varphi\le\pi$.

$$\begin{aligned}
\iint_S z^2 dS &= \iint_\Delta f\left(x\left(\theta,\varphi\right),y\left(\theta,\varphi\right),z\left(\theta,\varphi\right)\right)\left|\left|\vec{r_\theta}\times\vec{r_\varphi}\right|\right|d\theta d\varphi=\\
\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\cos^2\varphi\sin\varphi d\varphi d\theta &= \left\{\begin{matrix}t=\cos\varphi & \varphi=0\Rightarrow t=1\\ dt=-\sin\varphi d\varphi & \varphi=\pi\Rightarrow t=-1\end{matrix}\right\}\\
&= -\int_0^{2\pi}\int_1^{-1}t^2 dt d\theta=\int_0^{2\pi}\int_{-1}^{1}t^2 dt d\theta\\
&= \int_0^{2\pi}\left(\left.\frac{t^3}{3}\right|_{-1}^{1}\right)d\theta=\int_0^{2\pi}\left(\frac{1}{3}-\left(-\frac{1}{3}\right)\right)d\theta=\frac{4\pi}{3}
\end{aligned}$$

### 13.0.3 אינטגרל משטחי מסוג שני

תזכורת.

אם $S$ משטח חלק, ו$\vec{F}:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ שדה וקטורי רציף, נוכל לשאול את השאלה הבאה, יש לנו נוזל, כאשר בכל נקודה $p$, הוא נע בכיוון (ובעוצמה) $\vec{F}(p)$, כמה נוזל (בנפח) עובר דרך משטח $S$ ביחידת זמן? לגודל הזה נקרא השטף ששדה $F$ מבצע דרך משטח $S$. את הגודל הזה נסמן:

$$\iint_S \vec{F}\cdot d\vec{s} := \iint_S \vec{F}\cdot d\vec{s}$$

ואם יש לנו פרמטריזציה, $S(u,v)$, נחשב את הגדול הזה על ידי:

$$\iint_S \vec{F}\cdot d\vec{s} = \iint_D (\vec{F}(S(u,v))\cdot \underbrace{(S_u\times S_v)}_{\vec{N}})dudv$$

נשים לב לשוויון הבא:

$$(\vec{F}(S(u,v))\cdot \underbrace{(S_u\times S_v)}_{\vec{N}}) = \det\begin{pmatrix}\vec{F}(S(u,v))\\ S_u(u,v)\\ S_v(u,v)\end{pmatrix}$$

האינטגרל הזה נקרא אינטגרל משטחי מסוג שני.

הערה.

בשאלות מהסוג הזה חשוב לציין את כיוון השטף אותו אנו מחפשים, והכיוון הזה יבוא לידי ביטוי בסימון $\pm$ של הנורמל $\vec{N}$.

תרגיל 13.0.8.

חשבו את השטף של השדה הוקטורי $\vec{F}=(x,y,z)$, כלפי חוץ, על ספירת היחידה $x^2+y^2+z^2=1$.

**פתרון התרגיל:**

נעבור לפרמטריזציה כדורית:

$$\vec{L}(\theta,\varphi) = (\sin\varphi\cos\theta, \sin\varphi\sin\theta, \cos\varphi)\ ,\ 0\le\theta\le 2\pi, 0\le\varphi\le\pi$$

ולכן:

$$\vec{N} = \vec{L}_\theta\times\vec{L}_\varphi = \begin{vmatrix}\hat{i} & \hat{j} & \hat{k}\\ -\sin\varphi\sin\theta & \sin\varphi\cos\theta & 0\\ \cos\varphi\cos\theta & \cos\varphi\sin\theta & -\sin\varphi\end{vmatrix}$$
$$= \left(-\sin^2\varphi\cos\theta, -\sin^2\varphi\sin\theta, -\sin\varphi\cos\varphi\right)$$

נציב $\varphi = 0$ $\theta = 0,$ נקבל $(0,0,-1)$, כלומר הכיוון החיצוני מתאים לסימן מינוס, נקבל :

$$\begin{aligned}
I &= \iint_{\Delta} \left(\vec{F}\left(x\left(\varphi,\theta\right), y\left(\varphi,\theta\right), z\left(\varphi,\theta\right)\right) \cdot \vec{N}\left(x\left(\varphi,\theta\right), y\left(\varphi,\theta\right), z\left(\varphi,\theta\right)\right)\right) d\varphi d\theta \\
&= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \left(\sin\varphi\cos\theta, \sin\varphi\sin\theta, \cos\varphi\right) \cdot \left(\sin^2\varphi\cos\theta, \sin^2\varphi\sin\theta, \sin\varphi\cos\varphi\right) d\varphi d\theta \\
&= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \left(\sin^3\varphi\cos^2\theta + \sin^3\varphi\sin^2\theta + \sin\varphi\cos^2\varphi\right) d\varphi d\theta \\
&= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \left(\sin\varphi\right) d\varphi d\theta \\
&= 2\pi\left(-\cos\varphi\Big|_0^{\pi}\right) = 4\pi
\end{aligned}$$

דרך חלופית: באופן כללי בכל נקודה על ספירה מתקיים כי הנורמל <u>החיצוני</u> הינו $\vec{N}(x,y,z) = (x,y,z)$, בפרט עבור המקרה של ספירת היחידה נקבל כי

$$\vec{F}\cdot\hat{n} = (x,y,z)\cdot(x,y,z) = x^2+y^2+z^2 = 1$$

ולכן מתקיים

$$\iint_S \vec{F}\cdot d\vec{s} = \iint_S 1ds \overset{(*)}{=} 4\pi$$

$(*)$שטח ספירת היחידה הינו $4\pi$.

**תרגיל 13.0.9.**

חשבו את השטף של השדה הוקטורי $\vec{F} = \left(-x,-y,z^2\right)$, כלפי חוץ, על המשטח הסגור, החסום ע"י:

$$z = \sqrt{x^2+y^2}, z=1, z=2$$

<u>**פתרון התרגיל:**</u>

יש שלושה חלקים בהם יש לחשב את הנורמל בנפרד. נסמן ב-$S_1$ את המכסה העליון, ב-$S_2$ את המכסה התחתון וב-$S_3$ את מעטפת החרוט.

- על $S_1$,

נעבור לפרמטריזציה גלילית $\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \\ z = 2 \end{cases}$, $0 \le r \le 2, 0 \le \theta \le 2\pi$, מתקיים:

$$\vec{L}_r \times \vec{L}_\theta = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -r\sin\theta & r\cos\theta & 0 \end{vmatrix} = (0,0,r)$$

הנורמל החיצוני הוא $(0,0,r)$.

$$\begin{aligned} I_1 &= \iint_{S_1} \vec{F}\cdot\hat{n}ds = \iint_{\Delta}\left(\vec{F}\cdot\vec{N}\right)d\theta dr \\ &= \int_0^{2\pi}\int_0^2 (-r\cos\theta, -r\sin\theta, 4)\cdot(0,0,r)\,drd\theta \\ &= \int_0^{2\pi}\int_0^2 (4r)\,drd\theta = \int_0^{2\pi}\left(\frac{4r^2}{2}\right)\Big|_0^2 d\theta = 2\pi(8) = 16\pi \end{aligned}$$

- על $S_2$,

נעבור לפרמטריזציה גלילית $\begin{cases} x &= r\cos\theta \\ y &= r\sin\theta \\ z &= 1 \end{cases}$, $0 \le r \le 1, 0 \le \theta \le 2\pi$, מתקיים :

$$\vec{L}_r \times \vec{L}_\theta = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -r\sin\theta & r\cos\theta & 0 \end{vmatrix} = (0,0,r)$$

הנורמל החיצוני הוא $(0,0,-r)$:

$$\begin{aligned} I_2 &= \iint_{S_2} \vec{F}\cdot d\vec{s} = \iint_{\Delta}\left(\vec{F}\cdot\vec{N}\right)d\theta dr = \in_0^t 2\pi\int_0^1 (-r\cos\theta, -r\sin\theta, 1)\cdot(0,0,-r)\,drd\theta \\ &= \int_0^{2\pi}\int_0^1 (-r)\,drd\theta = \int_0^{2\pi}\left(-\frac{r^2}{2}\right)\Big|_0^1 d\theta = 2\pi\left(-\frac{1}{2}\right) = -\pi \end{aligned}$$

- על $S_3$,

נעבור לפרמטריזציה הבאה $0 \le \theta \le 2\pi, 1 \le r \le 2$ , $L(\vec{\theta}, r) = (r\cos\theta, r\sin\theta, r)$.

$$\vec{L}_\theta \times \vec{L}_r = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ -r\sin\theta & r\cos\theta & 0 \\ \cos\theta & \sin\theta & 1 \end{vmatrix} = (r\cos\theta, r\sin\theta, -r)$$

בכדי לקבל את השטף החיצוני, נבחר בנורמל החיצוני הפונה כלפי מטה, כלומר רכיב ה-$z$ הינו שלילי, ולכן נבחר בסימן פלוס, $\vec{N} = (r\cos\theta, r\sin\theta, -r)$.

$$\begin{aligned}
I_3 &= \iint_S \vec{F}\cdot d\vec{s} = \iint_\Delta \left(\vec{F}\cdot\vec{N}\right) d\theta dr \\
&= \int_0^{2\pi}\int_1^2 \left(-r\cos\theta, -r\sin\theta, r^2\right)\cdot\left(r\cos\theta, r\sin\theta, -r\right) dr d\theta \\
&= \int_0^{2\pi}\int_1^2 \left(-r^2\cos^2\theta - r^2\sin^2\theta - r^3\right) dr d\theta = \int_0^{2\pi}\int_1^2 \left(-r^2 - r^3\right) dr d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} \left(-\frac{r^3}{3} - \frac{r^4}{4}\right)\Bigg|_1^2 d\theta \\
&= 2\pi\left(\frac{-2^3}{3} - \frac{2^4}{4} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) = 2\pi\left(\frac{-7}{3} - \frac{15}{4}\right) = -\frac{73}{6}\pi
\end{aligned}$$

סה"כ השטף שווה $I_1 + I_2 + I_3 = 16\pi - \pi - \frac{73}{6}\pi = \frac{90}{6}\pi - \frac{73}{6}\pi = \frac{17}{6}\pi$.

### 13.0.4 קצת אנליזה וקטורית

**תזכורת.**

אם $F:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3, F(x,y,z) = (P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z))$ שדה וקטורי, נגדיר:

$$\operatorname{div} F(x,y,z) = F_x(x,y,z) + F_y(x,y,z) + F_z(x,y,z)$$

$$\overrightarrow{\text{curl}}(x,y,z) = \overrightarrow{\text{rot}}(x,y,z) = \det\begin{pmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{pmatrix}$$

לפעמים גם נסמן:

$$\operatorname{div} F = \nabla\cdot F$$

$$\overrightarrow{\text{rot}F} = \nabla\times F$$

### 13.0.5 משפט סטוקס

תזכורת.

אם $S$ משטח פתוח אשר שפתו $\partial S$ עקום סגור חלק למקוטעין, ו-$\vec{F}=(P(x,y,z),Q(x,y,z),R(x,y,z))$ שדה וקטורי גזיר ברציפות, אז משפט סטוקס אומר לנו כי:

$$\oint_{\partial S}\vec{F}\cdot d\vec{r}=\iint_S \overrightarrow{\text{rot}}(\vec{F})\cdot d\vec{s}$$

כאשר מגמת $\partial S$ חיובית. וכיוון הנורמל באינטגרל המשטחי נקבע בעזרת כלל יד ימין, כלומר, נתבונן ביד ימין, כאשר האצבעות בכיוון המסילה, פנים כך היד בכיוון המשטח, ואגודל בכיוון הנורמל.
כלומר משפט סטוקס מחבר לנו בין אינטגרל מסילתי מסדר שני, ולאינטגרל משטחי מסדר שני.

תרגיל 13.0.10.

יהי $S$ חלק הפרבולואיד $z=9-x^2-y^2$, $z\geq 0$ ויהי $C$ המעגל $x^2+y^2=9$ ($C$ הינה שפת $S$). אמתו את משפט סטוקס עבור השדה $\vec{F}=(z,x,y)$, כאשר כיוון הנורמל ל-$S$ הינו כלפי מעלה.

**פתרון התרגיל:**
עפ"י הנתונים הכיוון החיובי של $C$ הינו נגד כיוון השעון במישור $xy$. נרצה להראות כי אכן מתקיים $\oint_C \vec{F}\cdot d\vec{r}=\iint_S\left(\nabla\times\vec{F}\right)\cdot d\vec{s}$.
**שלב ראשון :** נחשב את האינטגרל הקווי :
פרמטריזציה למסילה

$$\gamma(\theta)=(3\cos\theta,3\sin\theta,0)$$
$$0\leq\theta\leq 2\pi$$
$$\gamma'(\theta)=(-3\sin\theta,3\cos\theta,0)$$

נחשב את $\vec{F}$ תחת הפרמטריזציה :

$$\vec{F}(3\cos\theta,3\sin\theta,0)=(0,3\cos\theta,3\sin\theta)$$

נחשב את האינטגרל :

$$\begin{aligned}\oint_C\vec{F}\cdot d\vec{r} &= \int_0^{2\pi}(0,3\cos\theta,3\sin\theta)\cdot(-3\sin\theta,3\cos\theta,0)\,d\theta\\ \int_0^{2\pi}9\cos^2\theta d\theta &= \frac{9}{2}\int_0^{2\pi}(1+\cos 2\theta)\,d\theta=\frac{9}{2}\left(2\pi+\frac{\sin 2\theta}{2}|_0^{2\pi}\right)=9\pi\end{aligned}$$

**שלב שני :** נחשב את האינטגרל המשטחי :
פרמטריזציה למשטח

$$\vec{r}(x,y)=\left(x,y,9-x^2-y^2\right),\Delta=\left\{x^2+y^2\leq 9\right\}$$
$$\vec{N}=\pm\left(-f_x,-f_y,1\right)=\pm(2x,2y,1)$$

עפ"י נתוני השאלה, נבחר בסימן $+$.
נחשב :

$$\nabla\times\vec{F}=\begin{vmatrix}\hat{i} & \hat{j} & \hat{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ f_1 & f_2 & f_3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\hat{i} & \hat{j} & \hat{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ z & x & y\end{vmatrix}=(1,1,1)$$

נחשב את האינטגרל

$$\begin{aligned}\iint_S\left(\nabla\times\vec{F}\right)\cdot d\vec{s} &= \iint_{x^2+y^2\le 9}(1,1,1)\cdot(2x,2y,1)\,dxdy\\ \iint_{x^2+y^2\le 9}2x+2y+1dxdy &= \int_0^{2\pi}\int_0^3(2r\cos\theta+2r\sin\theta+1)\,rdrd\theta\\ \cdots &= 9\pi\end{aligned}$$

הערה.

**מסקנה מסטוקס**
בכדי לחשב את האינטגרל מספיקה לנו רק שפת המשטח, אין לנו צורך לדעת מה המשטח עצמו. ובעצם ממשפט סטוקס נובע כי לכל שני משטחים $S_1,S_2$ בעלי שפה (מכוונת ) שווה, מתקיים :

$$\iint_{S_1}\left(\nabla\times\vec{F}\right)\cdot d\vec{s}=\iint_{S_2}\left(\nabla\times\vec{F}\right)\cdot d\vec{s}$$

תרגיל 13.0.11.

חשבו $\oint_C\vec{F}\cdot d\vec{r}$ עבור $\vec{F}=\left(xy,x^2,z^2\right)$ כאשר $C$ הינה המסילה המתקבלת מחיתוך הפרבולואיד $z=x^2+y^2$ עם המישור $z=y$, וכיוונה נגד כיוון השעון אם מסתכלים מהחלק החיובי של ציר $z$ מטה.

**פתרון התרגיל:**
$C$ מסילה סגורה שלא חותכת את עצמה ולכן נוכל להשתמש במשפט סטוקס. נבחר את $S$ להיות פנים העקומה $C$, כלומר חלק המישור $z=y$ ש-$C$ שפתו. הנורמל שנבחר עבור $S$ יהיה כלפי מעלה, נחשב :

$$\nabla\times\vec{F}=\begin{vmatrix}\hat{i} & \hat{j} & \hat{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ xy & x^2 & z^2\end{vmatrix}=(0,0,2x-x)=(0,0,x)$$

המשטח נתון ע"י $z=y$ כלומר, המשטח הוא גרף של הפונקציה $z=f(x,y)$, לכן נבחר בפרמטריזציה טבעית $\vec{L}\left(x,y\right)=\left(x,y,y\right),x,y\in D$.

$$\vec{N}=\pm\left(-f_x,-f_y,1\right)=\pm\left(0,-1,1\right)$$

נבחר בסימן פלוס על מנת לקבל רכיב $z$ חיובי. נחשב :

$$\begin{aligned}\iint_S \left(\nabla \times \vec{F}\right) \cdot d\vec{s} &= \iint_D (0,0,x) \cdot (0,-1,1)\, dxdy \\ &= \iint_D xdxdy\end{aligned}$$

התחום $D$ הינו ההיטל על המישור $xy$ של חיתוך הפרבולואיד עם המישור $z = y$ , נקבל $y = x^2 + y^2$,
כלומר ההיטל הוא

$$x^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2$$

נעבור לקואורדינטות פולריות מוזזות

$$\begin{cases} x = r\cos\theta & ,0 \le \theta \le 2\pi \\ y = \frac{1}{2} + r\sin\theta & ,0 \le r \le \frac{1}{2} \end{cases}$$

וכמובן $|J| = r$ :

$$\begin{aligned}\iint_D xdxdy &= \int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{1}{2}} r\cos\theta \cdot rdrd\theta \\ \int_0^{2\pi}\left(\frac{r^3}{3}\Big|_0^{\frac{1}{2}}\right)\cos\theta d\theta &= \frac{1}{24}\left(\sin\theta|_0^{2\pi}\right) = 0\end{aligned}$$

### תרגיל 13.0.12.

חשבו $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$ עבור $\vec{F} = \left(e^x \sin y, e^x \cos y, z^2\right)$, כאשר $C$ נתונה ע"י הפרמטריזציה
$\gamma(t) = \left(\sqrt{t}, t^3, e^{\sqrt{t}}\right), 0 \le t \le 1$.

**פתרון התרגיל:**

תחילה נשים לב כי השדה גזיר ברציפות בכל המרחב וכן מתקיים :

$$\nabla \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ f_1 & f_2 & f_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ e^x \sin y & e^x \cos y & z^2 \end{vmatrix} = (0,0,0)$$

**תזכורת.**

אם $V \subset \mathbb{R}^3$ פשוט קשר, ו$\vec{F}$ שדה וקטורי המקיים $\overrightarrow{\text{rot}}\vec{F} = 0$ ב$V$, אז $F$ שדה משמר ב$V$.

אם כן השדה $\vec{F}$ הינו שדה משמר (בכל $\mathbb{R}^3$), לכן האינטגרל של $\vec{F}$ אינו תלוי במסלול אלא רק בנקודות הקצה. נחפש אם כך מסילה פשוטה יותר המתחילה בנקודה $(0,0,1)$ ומסתיימת בנקודה $(1,1,e)$. נגדיר מסילה חדשה $C' = C_1 + C_2 + C_3$ באופן הבא :

$C_1$ הינה המסילה מהנקודה $(0,0,1)$ לנקודה $(1,0,1)$ :

$$C_1(t) = (t,0,1), 0 \leq t \leq 1$$

$C_2$ הינה המסילה מהנקודה $(1,0,1)$ לנקודה $(1,1,1)$ :

$$C_2(t) = (1,t,1), 0 \leq t \leq 1$$

$C_1$ הינה המסילה מהנקודה $(1,1,1)$ לנקודה $(1,1,e)$ :

$$C_3(t) = (1,1,t), 1 \leq t \leq e$$

מתקיים

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{C'} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{C_1} \vec{F} \cdot d\vec{r} + \int_{C_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} + \int_{C_3} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

$$\begin{aligned} \int_{C_1} \vec{F} \cdot d\vec{r} &= \int_0^1 \vec{F}(t,0,1) \cdot (1,0,0)\, dt \\ &= \int_0^1 (e^t \sin 0, e^t \cos 0, 1) \cdot (1,0,0)\, dt = \int_0^1 0 dt = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_{C_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} &= \int_0^1 \vec{F}(1,t,1) \cdot (0,1,0)\, dt \\ &= \int_0^1 (e^1 \sin t, e^1 \cos t, 1) \cdot (0,1,0)\, dt = \int_0^1 e \cos t dt = e \sin 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_{C_3} \vec{F} \cdot d\vec{r} &= \int_1^e \vec{F}(1,1,t) \cdot (0,0,1)\, dt \\ &= \int_1^e (e^1 \sin 1, e^1 \cos 1, t^2) \cdot (0,0,1)\, dt = \int_1^e t^2 dt = \frac{e^3-1}{3} \end{aligned}$$

סה"כ

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = e \sin 1 + \frac{e^3-1}{3}$$

### 13.0.6 משפט גאוס (משפט הדיברגנץ)

**תזכורת.**

יהא $V\subset\mathbb{R}^3$ גוף סגור, חסום, עם נורמל כלפי חוץ, $\vec{F}:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ שדה וקטורי גזיר ברציפות, אז:

$$\oint\!\!\!\oint_{\partial V}\vec{F}\cdot d\vec{s}=\iiint_V \text{div}(\vec{F})dxdydz$$

**הערה.**

ההסבר האינטואיטיבי לכך הוא ש $\oint\!\!\oint_{\partial V}\vec{F}\cdot d\vec{s}$ הוא השטף ש$\vec{F}$ עושה דרך $\partial V$, ואפשר לחשוב על $\text{div}\,\vec{F}(p)$ בתור כמות החומר שיוצאת מנקודה $p$.

**הערה.**

לא ניתן להשתמש במשפט גאוס על משטחים שאינם סגורים, אבל כן אפשר לסגור משטח, ולהחסיר את השטף שהתווסף.

**תרגיל 13.0.13.**

חשבו את השטף של השדה הוקטורי $\vec{F}=(x,y,z)$, כלפי חוץ, על ספירת היחידה $x^2+y^2+z^2=1$.

**פתרון התרגיל:**

נפתור בעזרת משפט הדיברגנץ: הספירה הינה מעטפת סגורה הסוגרת את כדור היחידה, השדה הוקטורי $\vec{F}$ גזיר ברציפות בכל כדור היחידה ולכן מתקיים:

$$\oint\!\!\!\oint_S\vec{F}\cdot d\vec{s}=\iiint_V \text{div}\,\vec{F}dV$$

כאשר $\text{div}\,\vec{F}=\nabla\cdot\vec{F}=\frac{\partial f_1}{\partial x}+\frac{\partial f_2}{\partial y}+\frac{\partial f_3}{\partial z}=1+1+1=3$, כלומר

$$\oint\!\!\!\oint_S\vec{F}\cdot d\vec{s}=\iiint_V 3dV=3\iiint_V dV\overset{(*)}{=}3\cdot\frac{4\pi}{3}=4\pi$$

כאשר השתמשנו בכך שנפח כדור יחידה הוא $\frac{4\pi}{3}$.

### תרגיל 13.0.14.

חשבו שטף חיצוני של $I = \iint_S \vec{F} \cdot d\vec{s}$ עבור $F(x,y,z) = (y^2, x^5, 5z)$ כאשר

$$S = \left\{(x,y,z) | z = \sqrt{25 - x^2 - y^2}, x^2 + y^2 \le 16\right\} \cup \left\{(x,y,z) | 0 \le z \le 3, x^2 + y^2 = 16\right\}$$

**פתרון התרגיל:**

הגוף הוא גליל ברדיוס 4 ומכסה ספירי ברדיוס 5.
נשים לב שמתקיים:

$$\text{div}\, F = 5$$

על מנת להשתמש במשפט גאוס, נצטרך לסגור את המשטח, כלומר להוסיף את $S_1$ שהוא:

$$S_1 = \{(x,y,0) | x^2 + y^2 \le 16\}$$

אבל, נשים לב כי עליו השטף הוא אפס, כי:

$$\hat{n} = \pm(0,0,1) \implies F \cdot \hat{n} = \pm 5z = 0$$

ולכן כדאי להשתמש במשפט גאוס.

$$\iint_S \vec{F} \cdot d\vec{s} = \oiint_{S \cup S_1} \vec{F} \cdot d\vec{s} = \iiint_V \text{div}\, \vec{F} dV = \iiint_V 5dV$$

כדי לחשב את האינטגרל הנפחי נשתמש בקואורדינטות גליליות:

$$\Delta = \left\{(r,\theta,z) \mid 0 < r \le 4 \;\; 0 \le z \le \sqrt{25 - r^2}, \;\; 0 \le \theta \le 2\pi\right\}$$

על כן:

$$\begin{aligned}\iiint_V 5dV &= 5 \iiint_\Delta r dV = 5 \int_0^{2\pi} \int_0^4 \int_0^{\sqrt{25-r^2}} r dz dr d\theta = 10\pi \int_0^4 r\sqrt{25 - r^2} dr \\ &= 10\pi \left[ (25 - r^2)^{\frac{3}{2}} \cdot \frac{2}{3} \cdot (-\frac{1}{2}) \right] \Bigg|_0^4 = \cdots = \frac{980\pi}{3}\end{aligned}$$

### תרגיל 13.0.15.

חשבו את $I = \iint_S \vec{F} \cdot d\vec{s}$, עבור השדה $\vec{F} = \left(x^3 - \cos y, y^3 + \sqrt{x^3 + z^2}, z + 5xy\right)$,
כאשר $S = \{(x,y,z) \,| z = 4 - x^2 - y^2, z \ge 0\}$ (פרבולואיד).

**פתרון התרגיל:**

מצד אחד $\text{div}\,\vec{F}=\frac{\partial f_1}{\partial x}+\frac{\partial f_2}{\partial y}+\frac{\partial f_3}{\partial z}=3x^2+3y^2+1$ , מצד שני, אם נחשב את האינטגרל המשטחי מסוג שני, כנראה שנקבל אינטגרל לא כל כך יפה משום שהשדה הוקטורי לא כל כך נעים כאן.

לכן, נראה שיהיה פשוט יותר לפתור תרגיל זה עם משפט הדיברגנץ.

**הבעיה:** המשטח אינו סגור. נסגור תחילה את המשטח $S$, בעזרת המכסה שנסמנו $S_1$, ב-$z=0$ ($S$ נראה כמו קערה הפוכה המסתיימת ב-$z=0$). נציב $z=0$ במשוואה $z=4-x^2-y^2$, ונקבל כי המכסה $S_1$ הינו עיגול ברדיוס 2 , כלומר $S_1=\{(x,y,z)\,|x^2+y^2\leq 4, z=0\}$.

עתה, המשטח $S\cup S_1$ הינו משטח סגור, החוסם את הגוף $V$, השדה $\vec{F}$ מוגדר בכל $V$, ולכן עפ"י משפט הדיברגנץ מתקיים :

$$\oiint_{S\cup S_1}\vec{F}\cdot d\vec{s}=\iiint_V \text{div}\,\vec{F}dV=\iiint_V\left(3x^2+3y^2+1\right)dxdydz$$

נבצע החלפת משתנים לקואורדינטות גליליות:

$$\begin{cases}x=r\cos\theta\\ y=r\sin\theta\\ z=z\end{cases}\quad ,\ |J|=r, 0\leq z\leq 4-r^2, 0\leq\theta\leq 2\pi, 0\leq r\leq 2$$

ולכן:

$$\begin{aligned}
\iiint_V 3x^2+3y^2+1dxdydz &= \int_0^{2\pi}\int_0^2\int_0^{4-r^2}\left(3r^2+1\right)rdzdrd\theta\\
&= \int_0^{2\pi}\int_0^2\left(3r^2+1\right)r\left(z\Big|_0^{4-r^2}\right)drd\theta\\
&= \int_0^{2\pi}\int_0^2\left(3r^2+1\right)r\left(4-r^2\right)drd\theta\\
&= \int_0^{2\pi}\int_0^2\left(12r^3+4r-3r^5-r^3\right)drd\theta\\
&= \int_0^{2\pi}\left(\frac{12r^4}{4}+\frac{4r^2}{2}-\frac{3r^6}{6}-\frac{r^4}{4}\right)|_0^2 d\theta\\
&= \int_0^{2\pi}\left(\frac{12\cdot 16}{4}+\frac{4\cdot 4}{2}-\frac{3\cdot 64}{6}-\frac{16}{4}\right)d\theta\\
&= 2\pi\left(48+8-\frac{64}{2}-4\right)=2\pi\left(52-\frac{64}{2}\right)\\
&= \pi\left(104-64\right)=40\pi
\end{aligned}$$

נותר לנו לחשב את האינטגרל המשטחי מסוג שני של השדה:

$$\vec{F}=\left(x^3-\cos y, y^3+\sqrt{x^3+z^2}, z+5xy\right)$$

על המשטח

$$S_1 = \{(x,y,z)\,|x^2+y^2 \le 4, z=0\}$$

נשתמש בפרמטריזציה גרפית, $z=0$, אז $N=(0,0,-1)$ פונה החוצה מהגוף.

$$\iint_{S_1} FdS = \iint_{\Delta} -z - 5xydxdy = -5\iint_{\Delta} xydxdy$$

נעבור לקואורדינטות פולריות ונקבל

$$= -5\int_0^{2\pi}\int_0^2 r^3\cos\theta\sin\theta drd\theta = -\frac{5\cdot 16}{4\cdot 2}\int_0^{2\pi}\sin 2tdt = 0$$

**הערה.**

אפשר גם להשתמש בפרמטריזציה גלילית $0\le r\le 2, 0\le\theta\le 2\pi,$ $\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \\ z=0 \end{cases},$

$$\vec{L}_r \times \vec{L}_\theta = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -r\sin\theta & r\cos\theta & 0 \end{vmatrix} = (0,0,r)$$

כאן הסימן המתאים לנורמל החיצוני הוא מינוס (מצביע כלפי מטה ולכן בעל רכיב $z$ שלילי) :

$$\begin{aligned}
\iint_{S_1}\vec{F}\cdot d\vec{s} &= \iint_{\Delta}\left(\vec{F}\cdot\vec{N}\right)d\theta dr = \int_0^{2\pi}\int_0^2 \left(5r^2\cos\theta\sin\theta\right)\cdot(-r)\,drd\theta \\
&= \int_0^{2\pi}\int_0^2\left(-5r^3\cos\theta\sin\theta\right)drd\theta = -5\int_0^{2\pi}\int_0^2 r^3\cos\theta\sin\theta drd\theta \\
&= -5\int_0^{2\pi}\cos\theta\sin\theta\left(\left.\frac{r^4}{4}\right|_0^2\right)d\theta = -20\int_0^{2\pi}\cos\theta\sin\theta d\theta \\
&= -\frac{20}{2}\int_0^{2\pi}2\cos\theta\sin\theta d\theta = -10\left(\left.\sin^2\theta\right|_0^{2\pi}\right) = 0
\end{aligned}$$

**סה"כ:**

$$\iint_S \vec{F}\cdot d\vec{s} = \iint_{S\cup S_1}\vec{F}\cdot d\vec{s} - \iint_{S_1}\vec{F}\cdot d\vec{s} = 40\pi - 0 = 40\pi$$