

---

## רשימות תרגול לקורס חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי 2ב' להנדסת חשמל ואלקטרוניקה

---

רשימות תרגול לקורס חדו"א 2ב' - סמסטר ב' תשפ"ו.

הרשימות עלולות להכיל טעויות, חוסרים או אי דיוקים, תיקונים יתקבלו בברכה.



נכתב ע"י בן פוירשטיין - [bf1@mail.tau.ac.il](mailto:bf1@mail.tau.ac.il)

## תוכן העניינים

|           |                                                                  |
|-----------|------------------------------------------------------------------|
| <b>3</b>  | <b>1 תרגול ראשון</b>                                             |
| 3         | 1.1 התכנסות נקודתית של סדרת פונקציות . . . . .                   |
| 6         | 1.2 התכנסות במידה שווה של סדרת פונקציות . . . . .                |
| <b>12</b> | <b>2 תרגול שני</b>                                               |
| 12        | 2.1 התכנסות טורי פונקציות . . . . .                              |
| 17        | 2.2 גזירה ואינטגרציה של סדרות וטורי פונקציות . . . . .           |
| <b>22</b> | <b>3 תרגול שלישי</b>                                             |
| 22        | 3.1 חזרה מהתרגול הקודם - גזירה של סדרות וטורי פונקציות . . . . . |
| 23        | 3.2 טורי חזקות . . . . .                                         |
| <b>33</b> | <b>4 תרגול רביעי</b>                                             |
| 33        | 4.1 וקטורים . . . . .                                            |
| 38        | 4.2 טופולוגיה . . . . .                                          |
| 41        | 4.3 פונקציות במספר משתנים . . . . .                              |
| 46        | 4.4 משטחים ריבועיים . . . . .                                    |
| 49        | 4.5 טורי טיילור - תרגול עצמי . . . . .                           |
| <b>53</b> | <b>5 תרגול חמישי</b>                                             |
| 53        | 5.1 גבולות ורציפות . . . . .                                     |
| 60        | 5.2 מעבר לקואורדינטות פולאריות בחישוב גבולות . . . . .           |
| 63        | 5.3 נגזרות חלקיות . . . . .                                      |
| 66        | 5.4 דיפרנציאביליות . . . . .                                     |
| <b>69</b> | <b>6 תרגול שישי</b>                                              |
| 69        | 6.1 מישור משיק . . . . .                                         |
| 72        | 6.2 כלל השרשרת . . . . .                                         |
| 75        | 6.3 נגזרת כיוונית וגרדיאנט . . . . .                             |
| <b>80</b> | <b>7 תרגול שביעי</b>                                             |
| 80        | 7.1 כלל ליבניץ לגזירת אינטגרל עם פרמטר . . . . .                 |
| 81        | 7.2 משפט הפונקציה הסתומה . . . . .                               |
| 86        | 7.3 חישוב מישור משיק לפונקציה סתומה . . . . .                    |

|            |                                       |           |
|------------|---------------------------------------|-----------|
| 88         | נגזרות מסדר גבוה                      | 7.4       |
| 92         | נקודות קיצון של פונקציות בשני משתנים  | 7.5       |
| <b>97</b>  | <b>תרגול שמיני</b>                    | <b>8</b>  |
| 97         | כופלי לגרנז' עם אילוץ יחיד            | 8.1       |
| 106        | כופלי לגרנז' עם שני אילוצים           | 8.2       |
| 108        | 8.2.1 מציאת נקודות קיצון - תרגול נוסף |           |
| <b>110</b> | <b>תרגול תשיעי</b>                    | <b>9</b>  |
| 110        | אינטגרל כפול במלבן ומשפט פוביני       | 9.1       |
| 113        | אינטגרציה בתחום פשוט                  | 9.2       |
| 117        | החלפת משתנים באינטגרל כפול            | 9.3       |
| 124        | תרגול נוסף                            | 9.4       |
| <b>128</b> | <b>תרגול עשירי</b>                    | <b>10</b> |
| 128        | אינטגרל משולש                         | 10.1      |
| 132        | החלפת משתנים באינטגרל משולש           | 10.2      |
| 137        | החלפת משתנים לקואורדינטות גליליות     | 10.3      |
| 140        | החלפת משתנים לקואורדינטות כדוריות     | 10.4      |
| <b>142</b> | <b>תרגול אחד עשר</b>                  | <b>11</b> |
| 142        | עקומים                                | 11.1      |
| 145        | אינטגרל קווי מסוג ראשון               | 11.2      |
| 149        | אינטגרל קווי מסוג שני                 | 11.3      |
| <b>153</b> | <b>תרגול שנים עשר</b>                 | <b>12</b> |
| 153        | שדה משמר ופונקציית פוטנציאל           | 12.1      |
| 157        | משפט גרין                             | 12.2      |
| 162        | פרמטריזציה של משטח                    | 12.3      |
| <b>166</b> | <b>תרגול חזרה למבחן</b>               | <b>13</b> |
| 166        | סדרות פונקציות                        | 13.1      |
| 169        | פונקציות במספר משתנים                 | 13.2      |
| 174        | אינטגרלים                             | 13.3      |

## תרגול ראשון

### 1.1 | התכנסות נקודתית של סדרת פונקציות

#### תזכורת – (התכנסות נקודתית של סדרת פונקציות)

יהא  $I \subset \mathbb{R}$  קטע (או  $I = \mathbb{R}$  כולו). סדרת פונקציות היא אוסף של פונקציות  $(f_n)_{n=1}^\infty$  מהצורה  $f_n : I \rightarrow \mathbb{R}$ , כלומר לכל  $n \geq 1$  קיימת פונקציה  $f_n : I \rightarrow \mathbb{R}$ . נאמר כי סדרת הפונקציות  $f_n$  מתכנסת נקודתית לפונקציה  $f$  אם לכל  $x_0 \in I$  סדרת הערכים  $\{f_n(x_0)\}_{n=1}^\infty$  מתכנסת ל- $f(x_0)$ , כלומר:

$$\forall x_0 \in I, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x_0) = f(x_0)$$

או בכתיב יותר מפורט:

$$\forall x \in I, \forall \varepsilon > 0, \exists N_{\varepsilon, x} \in \mathbb{N}, \forall n > N_{\varepsilon, x}, \quad |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

במקרה זה נקרא  $f$  הפונקציה הגבולית של הסדרה  $(f_n)_{n=1}^\infty$  ונסמן  $f_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f$ .

#### תרגיל 1.1.

תהא סדרת הפונקציות  $f_n : (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$  המוגדרת על ידי  $f_n(x) = \frac{n^2 x}{1+n^2 x^2}$ . מצאו פונקציה  $f$  כך ש  $f_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f$ .

#### פתרון:

לפני שנפתור את התרגיל, רק בשביל לקבל תחושה לגבי ההתכנסות הנקודתית, נשים לב כי, למשל עבור  $x = \frac{1}{2}$  מתקיים:

$$f_1\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1^2 \cdot \frac{1}{2}}{1 + 1^2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\frac{1}{2}}{1 + \frac{1}{4}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{5}{4}} = \frac{2}{5}$$

$$f_2\left(\frac{1}{2}\right) = 1, \quad f_3\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{18}{13}, \quad f_5\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{50}{29}, \quad f_{10}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{25}{13}, \quad f_{100}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{5000}{2501}$$

ובכלל, נשים לב כי

$$f_n\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\frac{n^2}{2}}{1 + \frac{n^2}{4}} = \frac{\frac{n^2}{2}}{\frac{n^2+4}{4}} = \frac{2n^2}{n^2+4} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 2$$

כלומר, נצפה מהפונקציה הגבולית  $f$ , לקיים  $f\left(\frac{1}{2}\right) = 2$ .  
 כעת נפתור את התרגיל באופן מלא.

לכל  $x \in (0, 1)$  נרצה לחשב את  $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 x}{1 + n^2 x^2}$  נשים לב כי  $n^2 x \neq 0$  לכל  $n \in \mathbb{N}$ ,  
 ולכל  $x \in (0, 1)$ , ולכן ניתן לחלק ב- $n^2 x$ , כלומר:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\frac{1}{n^2 x} + x} = \frac{1}{x}$$

כלומר, הפונקציה הגבולית היא  $f(x) = \frac{1}{x}$ , כלומר  $f_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f$ .

## תרגיל 1.2.

תהא סדרת הפונקציות  $f_n : (0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f_n = \begin{cases} n & x \in (0, \frac{1}{n}) \\ x^2 & \text{אחרת} \end{cases}$ .

1. מצאו פונקציה  $f$  שעבורה  $f_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f$ .

2. בדקו האם:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f_n(x) dx = \int_0^1 f(x) dx$$

## פתרון:

1. נתבונן בסדרה  $f_n$ .

$$f_1(x) = \begin{cases} 1 & x \in (0, 1) \\ x^2 & x = 1 \end{cases} \Rightarrow f_1(x) = 1.$$

$$f_2(x) = \begin{cases} 2 & x \in (0, \frac{1}{2}) \\ x^2 & \frac{1}{2} \leq x \leq 1 \end{cases}, \quad f_3(x) = \begin{cases} 3 & x \in (0, \frac{1}{3}) \\ x^2 & \frac{1}{3} \leq x \leq 1 \end{cases}, \quad f_4(x) = \begin{cases} 4 & x \in (0, \frac{1}{4}) \\ x^2 & \frac{1}{4} \leq x \leq 1 \end{cases} \dots$$

נבחר  $x_0 \in (0, 1]$  אינטואיטיבית, עבור  $n$  גדול מאוד,  $f_n(x_0) = x_0^2$ .  
 פורמלית - קיים  $N$  כך שלכל  $n > N$ , מתקיים  $\frac{1}{n} < x_0$ , כלומר  $f_n(x_0) = x_0^2$ , כלומר:

$$(f_n(x_0))_{n=1}^\infty = (1, 2, 3, \dots, N, x_0^2, x_0^2, x_0^2, \dots, x_0^2, \dots)$$

למשל, עבור  $x = 0.19$  מתקיים:

$$(f_n(0.19))_{n=1}^\infty = (1, 2, 3, 4, 5, (0.19)^2, (0.19)^2, \dots, (0.19)^2, \dots)$$

כלומר, הסדרה קבועה החל ממקום מסוים, ולכן  $x_0^2 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} (f_n(x_0))_{n=1}^\infty$ , כלומר עבור  $x^2$  מתקיים

$$f_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f$$

2. את האינטגרל נחשב ישירות:

$$\int_0^1 f_n(x) dx = \int_0^{\frac{1}{n}} n dx + \int_{\frac{1}{n}}^1 x^2 dx = 1 + \left[ \frac{x^3}{3} \right]_{x=\frac{1}{n}}^{x=1} = \frac{4}{3} - \frac{1}{3n^3} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{4}{3}.$$

ומצד שני:

$$\int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3}$$

כלומר:

$$\frac{1}{3} = \int_0^1 \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) dx \neq \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f_n(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4}{3} - \frac{1}{3n^3} = \frac{4}{3}$$

#### הערה

אנו רואים פה חולשה בהגדרת המושג של התכנסות פונקציות, שכן היינו מצפים ש  $f_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f$  יגרור  $\int_0^1 f_n(x) dx \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f(x) dx$ , תכף נדבר על המושג של התכנסות במידה שווה, ובהמשך הקורס נראה כי מושג זה (סוג של) פותר את הבעיה הזאת.

#### תרגיל 1.3.

תהא  $f_n : [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}$  הסדרה  $f_n(x) = (-1)^n x^2$ , הוכיחו כי סדרת הפונקציות לא מתכנסת לאף פונקציה גבולית.

פתרון:

נשים לב כי:

$$(f_n(1))_{n=1}^\infty = (-1, 1, -1, \dots)$$

זו סדרת מספרים שלא מתכנסת, ולכן סדרת הפונקציות לא מתכנסת.

## 1.2 | התכנסות במידה שווה של סדרת פונקציות

### תזכורת – (התכנסות במידה שווה)

יהא  $I \subset \mathbb{R}$  קטע (או כולו), ותהא  $f_n : I \rightarrow \mathbb{R}$  סדרת פונקציות, ו  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  פונקציה נוספת. נאמר כי סדרת הפונקציות  $(f_n)_{n=1}^{\infty}$  מתכנסת במידה שווה ל  $f$  אם:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N} : \forall x \in I, \forall n > N_\varepsilon, \quad |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

במקרה זה, נסמן  $f_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{Uniform}} f$  (לפעמים נסמן  $f_n \xrightarrow{u} f$  או  $f_n \rightrightarrows f$ ).

### הערה

התכנסות במ"ש זו תכונה חזקה מהתכנסות, כלומר אם  $f_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{Uniform}} f$  אז בהכרח  $f_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} f$  (אבל לא להפך).

### תזכורת – (קריטריון הסופרמום)

קריטריון הסופרמום אומר כי:

$$f_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{Uniform}} f \iff \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in I} |f_n(x) - f(x)| = 0$$

כלומר,  $f_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{Uniform}} f$  אם"מ סדרת המספרים  $\sup_{x \in I} |f_n(x) - f(x)|$  מתכנסת לאפס.

### תרגיל 1.4.

תהא סדרת הפונקציות  $f : I \rightarrow \mathbb{R}, f_n(x) = \frac{x}{n}$ .

1. במקרה בו  $I = \mathbb{R}$ , מצאו  $f$  כך ש  $f_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} f$ .

2. במקרה בו  $I = \mathbb{R}$  בדקו האם  $f_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{Uniform}} f$ .

3. במקרה בו  $I = [-2026, 2026]$  בדקו האם  $f_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{Uniform}} f$ .

### פתרון:

1. יהא  $x \in I$ , נשים לב מיד כי:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x}{n} = 0$$

כלומר סדרת הפונקציות מתכנסת נקודתית לפונקציה  $f(x) \equiv 0$ .

2. בדוק התכנסות במ"ש עבור  $I = \mathbb{R}$ , נשים לב כי:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in \mathbb{R}} |f_n(x) - f(x)| = \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in \mathbb{R}} \left| \frac{x}{n} \right| = \infty \neq 0$$

כלומר סדרת הפונקציות אינה מתכנסת במ"ש בכל  $\mathbb{R}$ .

3. בדוק התכנסות במ"ש עבור  $I = [-2026, 2026]$ :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in [-2026, 2026]} |f_n(x) - f(x)| = \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in [-2026, 2026]} \left| \frac{x}{n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2026}{n} = 0$$

### תרגיל 1.5.

זכר כי פונקציה  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  נקראת חסומה אם קיים  $M > 0$  כך שלכל  $x \in I$  מתקיים  $|f(x)| \leq M$ . הוכיחו או הפריכו:

1. תהא  $f_n: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  סדרת פונקציות חסומות המתכנסות נקודתית לפונקציה  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , אז  $f$  חסומה.
2. תהא  $f_n: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  סדרת פונקציות חסומות המתכנסות במידה שווה לפונקציה  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , אז  $f$  חסומה.
3. יהא  $M > 0$ , ותהא  $f_n: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  סדרת פונקציות כך שלכל  $n$ ,  $f_n$  חסומה ע"י  $M$ , ו  $f_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f$ , אז  $f$  חסומה ע"י  $M$ .

### פתרון:

1. נפריך את הטענה, נתבונן בסדרת הפונקציות  $f_n(x) = \begin{cases} x & x \in [-n, n] \\ 0 & \text{אחרת} \end{cases}$ , נשים לב כי לכל  $n$ , מתקיים  $|f_n(x)| \leq n$ , כלומר  $f_n$  חסומה. נשים לב כי לכל  $x \in \mathbb{R}$ ,  $f_n(x) = x$  החל ממקום מסוים, כלומר  $f_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f$  כאשר  $f(x) = x$ , אבל  $f$  אינה חסומה.

2. היות ש  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in \mathbb{R}} |f_n(x) - f(x)| = 0$  כך ש  $\sup_{x \in \mathbb{R}} |f_n(x) - f(x)| \leq 1$ , כלומר לכל  $x \in \mathbb{R}$  מתקיים:

$$|f_n(x) - f(x)| < 1$$

אז לכל  $x \in \mathbb{R}$

$$|f(x)| = |f(x) - f_n(x) + f_n(x)| \leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x)| \leq 1 + |f_n(x)|$$

אבל  $f_n$  חסומה, אז קיים  $M > 0$  כך שלכל  $x \in \mathbb{R}$  מתקיים  $|f_n(x)| \leq M$ , אז:

$$|f(x)| \leq 1 + |f_n(x)| \leq M + 1$$

לכל  $x \in \mathbb{R}$ , כלומר  $f(x)$  חסומה.

3. נוכיח את הטענה, על ידי שימוש בטענה הבאה מחדו"א 1: אם  $a_n \rightarrow a$  סדרת מספרים מתכנסת המקיימת  $|a_n| \leq M$  לכל  $n$ , אז  $|a| \leq M$ .  
 נבחר  $x_0 \in \mathbb{R}$ , נשים לב כי  $|f_n(x_0)| \leq M$  לכל  $n$ , ולכן  $|f(x_0)| \leq M$ , היות ש  $x_0$  נבחר באופן שרירותי, לכל  $x \in \mathbb{R}$  מתקיים  $|f(x)| \leq M$ , כלומר  $f$  חסומה ע"י  $M$ .

### תרגיל 1.6.

האם סדרת הפונקציות  $f_n(x) = \frac{x^n}{3+2x^n}$  מתכנסת נקודתית או במ"ש ב  $[0, 2]$ ?

#### פתרון:

נתחיל בלמצוא את הפונקציה הגבולית, לשם כך נחלק למקרים:

1. עבור  $x = 0$ , מתקיים  $f_n(0) = 0$ .

2. עבור  $0 < x < 1$  מתקיים:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^n}{3 + 2x^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\underbrace{\frac{3}{x^n}}_{\rightarrow \infty} + 2} = 0$$

3. עבור  $x = 1$  מתקיים  $f_n(1) = \frac{1}{5}$ .

4. עבור  $1 < x \leq 2$  מתקיים:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^n}{3 + 2x^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\underbrace{\frac{3}{x^n}}_{\rightarrow 0} + 2} = \frac{1}{2}$$

כלומר הפונקציה הגבולית הינה:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \in [0, 1) \\ \frac{1}{5} & x = 1 \\ \frac{1}{2} & x \in (1, 2] \end{cases}$$

כעת, נזכר במשפט שראינו בהרצאה.

#### תזכורת

תהא  $f_n : I \rightarrow \mathbb{R}$  סדרת פונקציות רציפות. אם  $f_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{Uniform}} f$ , אז  $f$  רציפה.

נשים לב כי  $f_n$  רציפה לכל  $n$ , ו  $f$  אינה רציפה, לכן ההתכנסות אינה במידה שווה.

תרגיל 1.7.

האם סדרת הפונקציות  $f_n(x) = x^n - x^{n+1}$ ,  $f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  מתכנסת במ"ש?

**פתרון:**

ראשית נבדוק התכנסות נקודתית, נבדוק את הקצוות:

$$\forall n \in \mathbb{N}, f_n(0) = f_n(1) = 0$$

עבור  $x \in (0, 1)$  בעזרת א"ש המשולש:

$$|f_n(x)| = |x^n - x^{n+1}| \leq |x^n| + |x^{n+1}| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

כלומר  $f_n$  מתכנסות נקודתית ל- $f(x) = 0$ .  
על מנת להוכיח התכנסות במ"ש, נחשב:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in [0, 1]} |f_n(x) - f(x)| = \lim_{n \rightarrow \infty} \underbrace{\sup_{x \in [0, 1]} |x^n - x^{n+1}|}_{:= M_n}$$

היות ש- $x^n - x^{n+1}$  רציפה בקטע סגור, עפ"י משפט ויירשטראס,  $g(x) = x^n - x^{n+1}$  מקבלת את ערכה המקסימלי והמינימלי בקטע  $[0, 1]$ , על מנת למצוא אותו נגזור ונשווה לאפס:

$$g'(x) = nx^{n-1} - (n+1)x^n = 0$$

משום ש- $f_n(x) \geq 0$  אפשר להניח כי המקסימום לא מתקבל ב- $x = 0$  (כי  $f_n(0) = 0$ ) ולכן ניתן לחלק ב- $x^{n-1}$  ונקבל:

$$n - (n+1)x = 0 \Rightarrow x = \frac{n}{n+1}$$

ומאותה סיבה, נקודה זאת היא אכן המקסימום המוחלט, ולכן:

$$M_n = f_n\left(\frac{n}{n+1}\right) = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n - \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n \left(1 - \frac{n}{n+1}\right)$$

נרצה לחשב את  $\lim_{n \rightarrow \infty} M_n$ , ולשם כך נפשט את  $M_n$ :

$$\begin{aligned} M_n &= \left(\frac{n}{n+1}\right)^n \left(1 - \frac{n}{n+1}\right) = \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^n \left(1 - \frac{n}{n+1}\right) \\ &= \left(1 + \frac{-1}{n+1}\right)^n \left(1 - \frac{n}{n+1}\right) = \left(1 + \frac{-1}{n+1}\right)^{n+1} \left(1 + \frac{-1}{n+1}\right)^{-1} \left(1 - \frac{n}{n+1}\right) \end{aligned}$$

ולכן:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} M_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{-1}{n+1}\right)^{n+1} \xrightarrow{\frac{1}{e}} \left(1 + \frac{-1}{n+1}\right)^{-1} \xrightarrow{1} \left(1 - \frac{n}{n+1}\right) \xrightarrow{0} 0$$

ולכן סדרת הפונקציות מתכנסת במידה שווה.

## תרגיל 1.8.

נגדיר  $f_n(x) = 2^n x^n$ , כאשר  $f_n : (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \rightarrow \mathbb{R}$ , ונגדיר  $s_n(x) = \sum_{k=1}^n f_k(x)$ , כלומר:

$$s_n(x) = f_1(x) + f_2(x) + \dots + f_n(x) = 2x + 4x^2 + \dots + 2^n x^n$$

מצאו פונקציה  $s(x)$  כך ש  $s_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} s$ .

פתרון:

נזכר בנוסחה של סכום סדרה הנדסית, שאם  $|q| < 1$ , אז:

$$\sum_{k=1}^N q^k = q^1 + q^2 + \dots + q^N = \frac{1 - q^{N+1}}{1 - q} - 1 = \frac{q(1 - q^N)}{1 - q}$$

ובפרט:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n q^k = \sum_{k=1}^{\infty} q^k = \frac{q}{1 - q}$$

נחזור לתרגיל עצמו. נרצה למצוא  $s(x)$  כך שלכל  $x \in (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n(x) = s(x)$ .  
יהא  $x \in (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$  נשים לב כי:

$$s_n(x) = \sum_{k=1}^n 2^k x^k = \sum_{k=1}^n (2x)^k$$

ובפרט,  $-1 < 2x < 1$  (כלומר  $|2x| < 1$ ), ולכן:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n(x) = \sum_{k=1}^{\infty} (2x)^k = \frac{2x}{1 - 2x}$$

וסיימנו! כלומר,  $s_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} s$  כאשר  $s(x) = \frac{2x}{1 - 2x}$ .

## תרגיל 1.9.

תהא  $s_n(x) = \sum_{k=1}^n f_k(x)$  סדרת פונקציות המתכנסת נקודתית (כלומר הסדרה  $(s_n(x))$  הוכיחו כי  $f_n(x)$  מתכנסת נקודתית לפונקציה  $f(x) \equiv 0$ .

פתרון:

נסמן ב  $I$  את התחום של הפונקציות  $f_n$ , כלומר  $f_n : I \rightarrow \mathbb{R}$ . נבחר  $x_0 \in I$  נשים לב כי הטור  $\sum_{i=1}^{\infty} f_i(x_0)$  מתכנס, ולכן  $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x_0) = 0$ , היות ש  $x_0$  נבחר באופן שרירותי, לכל  $x \in I$  מתקיים  $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = 0$ , כלומר  $f_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f$  כאשר  $f(x) \equiv 0$ .

## תרגיל 1.10.

נגדיר את סדרת הפונקציות:

$$f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f_n(x) = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k}{x^2 + \sqrt{k}}$$

הוכיחו כי סדרת הפונקציות מתכנסת נקודתית לפונקציה כלשהי  $f$  (אין צורך למצוא אותה!).פתרון:

נזכר במבחן לייבניץ להתכנסות טור מתחלף מחדו"א 1.

## תזכורת – (מבחן לייבניץ)

תהא  $(a_n)_{n=1}^\infty$  סדרה, אם מתקיימים התנאים הבאים:

1. לכל  $n$ ,  $a_n \geq 0$ .

2.  $a_n$  סדרה מונוטונית יורדת.

3.  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ .

אז טור המספרים  $\sum_{n=1}^\infty (-1)^n a_n$  מתכנס, ויותר מזה, מתקיים כי:

$$\forall n \in \mathbb{N}, \left| \sum_{i=1}^n (-1)^i a_i - \sum_{i=1}^\infty (-1)^i a_i \right| \leq a_{n+1}$$

בשביל להראות שסדרת הפונקציות מתכנסת נקודתית, יש להראות כי לכל  $x_0 \in \mathbb{R}$  סדרת המספרים  $f_n(x_0)$  מתכנסת, כלומר הטור  $\sum_{i=1}^\infty \frac{(-1)^i}{x_0^2 + \sqrt{i}}$  מתכנס.נקבע  $x_0 \in \mathbb{R}$ , ונתבונן בסדרת המספרים  $\left( \frac{1}{x_0^2 + \sqrt{n}} \right)_{n=1}^\infty$ , ונשים לב שסדרה זאת היא אכן סדרת לייבניץ:

1. לכל  $n$ ,  $\frac{1}{x_0^2 + \sqrt{n}} > 0$ .

2. כלומר הסדרה מונוטונית,  $\frac{1}{x_0^2 + \sqrt{n}} > \frac{1}{x_0^2 + \sqrt{n+1}}$ .

3.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{x_0^2 + \sqrt{n}} = 0$ .

אז לפי מבחן לייבניץ, הטור  $\sum_{i=1}^\infty \frac{(-1)^i}{x_0^2 + \sqrt{i}}$  מתכנס, ולכן סדרת הפונקציות מתכנסת נקודתית.

## תרגול שני

### 2.1 | התכנסות טורי פונקציות

#### תזכורת – (טור פונקציות)

מקרה פרטי של סדרת פונקציות שנעסוק בו רבות בקורס הוא טור פונקציות, כלומר אם יש לנו סדרת פונקציות  $f_n(x) : I \rightarrow \mathbb{R}$  אז נגדיר:

$$s_n(x) = \sum_{i=1}^n f_i(x)$$

ונקבל סדרת פונקציות חדשה, אם הסדרה מתכנסת נקודתית, נסמן את הפונקציה הגבולית שלה ע"י:

$$s(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n(x) = \sum_{i=1}^{\infty} f_i(x)$$

כמו במקרים הקודמים, נרצה לדבר על התכנסות נקודתית ובמ"ש של הסדרה  $s_n$  לפונקציה  $s$ .

#### תרגיל 2.1.

יהא הטור  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{2^n}$ , בדקו התכנסות נקודתית ובמ"ש בכל  $\mathbb{R}$ .

#### פתרון:

נקבע  $x_0 \in \mathbb{R}$ , נשים לב כי הסכום הוא סכום סדרה הנדסית.

#### תזכורת

סכום סדרה הנדסית  $q, q^2, \dots, q^N$  הוא:

$$\sum_{n=1}^N q^n = \frac{1 - q^{N+1}}{1 - q} - 1 = \frac{q(1 - q^N)}{1 - q}$$

כלומר:

$$s_n(x_0) = \sum_{k=1}^n \frac{x_0}{2^k} = x_0 \sum_{k=1}^n \frac{1}{2^k} = x_0 \left( \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{2}} - 1 \right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x_0 \left( \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} - 1 \right) = x_0$$

כלומר הטור מתכנס נקודתית:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{2^n} = x$$

נבדוק התכנסות במ"ש, בעזרת קריטריון הסופרמום, יהא  $n \in \mathbb{N}$ , אז:

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |s_n(x) - x| = \sup_{x \in \mathbb{R}} \left| \sum_{k=1}^n \frac{x}{2^k} - x \right| = \sup_{x \in \mathbb{R}} |x| \underbrace{\left| \sum_{k=1}^n \frac{1}{2^k} - 1 \right|}_{\text{מספר חיובי}} = \infty$$

ולכן ההתכנסות אינה במידה שווה.

#### תרגול עצמי

מצאו מפורשות את ערך הביטוי הבא, והוכיחו כי הוא חיובי:

$$\left| \sum_{k=1}^n \frac{1}{2^k} - 1 \right|$$

#### תרגיל 2.2

יהא הטור:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{x^n}{n^2} - \frac{x^{n+1}}{(n+1)^2} \right)$$

בדקו התכנסות נקודתית ובמ"ש ב  $[-1, 1]$ .

**פתרון:**

נשים לב כי:

$$\begin{aligned} s_1(x) &= x - \frac{x^2}{2^2} \\ s_2(x) &= x - \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^2}{2^2} - \frac{x^3}{3^2} \\ s_3(x) &= x - \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^2}{2^2} - \frac{x^3}{3^2} + \frac{x^3}{3^2} - \frac{x^4}{4^2} \end{aligned}$$

כלומר, הטור הוא טלסקופי. נמשיך ובאופן דומה נקבל כי:

$$s_n(x) = x - \frac{x^{n+1}}{(n+1)^2}$$

#### תרגול עצמי

הוכיחו זאת באינדוקציה.

נשים לב כי עבור  $x_0 \in [-1, 1]$  מתקיים:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n(x_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( x_0 - \frac{x_0^{n+1}}{(n+1)^2} \right) = x_0$$

כלומר:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{x^n}{n^2} - \frac{x^{n+1}}{(n+1)^2} \right) = x$$

ועבור התכנסות במ"ש:

$$\begin{aligned} \sup_{x \in [-1, 1]} |s_n(x) - x| &= \sup_{x \in [-1, 1]} \left| x - \frac{x^{n+1}}{(n+1)^2} - x \right| \\ &= \sup_{x \in [-1, 1]} \left| \frac{x^{n+1}}{(n+1)^2} \right| = \sup_{x \in [-1, 1]} \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)^2} \\ &= \frac{1}{(n+1)^2} \sup_{x \in [-1, 1]} |x|^{n+1} = \frac{1}{(n+1)^2} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \end{aligned}$$

כלומר הטור מתכנס במ"ש.

#### תזכורת – (משפט $M$ של וירשטראס)

תהא סדרת פונקציות  $f_n : I \rightarrow \mathbb{R}$ , אם לכל  $n \in \mathbb{N}$  קיים  $M_n \geq 0$  כך ש  $|f_n(x)| \leq M_n$  לכל  $x \in I$ , ומתקיים כי טור המספרים  $\sum_{n=1}^{\infty} M_n$  מתכנס, אז:  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$  מתכנס בהחלט ובמ"ש ב  $I$ .

#### הערה

1. כדי להשתמש במבחן אין צורך לדעת מהי הפונקציה הגבולית של הטור - יותר מכך, הוא אומר כי טור מתכנס במ"ש, ולא אומר מהי הפונקציה הגבולית.

2. מעבר להתכנסות במידה שווה, המבחן גם מראה לנו כי הטור מתכנס בהחלט, כלומר הטור:

$$\sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x)|$$

מתכנס נקודתית ב  $I$ .

#### תרגיל 2.3

הוכיחו כי הטור:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k \cos(kx) + k \sin(x)}{k^3}$$

מתכנס במ"ש לכל  $x \in \mathbb{R}$ .

**פתרון:**  
נשים לב כי:

$$\begin{aligned} \left| \frac{(-1)^k \cos(kx) + k \sin(x)}{k^3} \right| &= \left| \frac{(-1)^k \cos(kx)}{k^3} + \frac{k \sin(x)}{k^3} \right| \\ &\leq \left| \frac{(-1)^k \cos(kx)}{k^3} \right| + \left| \frac{k \sin(x)}{k^3} \right| \leq \frac{1}{k^3} + \frac{1}{k^2} \end{aligned}$$

כלומר, עבור  $M_k = \frac{1}{k^3} + \frac{1}{k^2}$  מתקיים כי  $\left| \frac{(-1)^k \cos(kx) + k \sin(x)}{k^3} \right| \leq M_k$ , ובאמת  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^3} + \frac{1}{k^2}$  מתכנס, אז ממשפט  $M$  של וירשטראס, הטור  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k \cos(kx) + k \sin(x)}{k^3}$  מתכנס במ"ש בכל  $\mathbb{R}$ .

## תרגיל 2.4.

תרגיל זה מתפקד כסעיף ב' של תרגיל 1.10, לשם השלמות, נפתור אותו במלואו גם כאן. נגדיר את סדרת הפונקציות:

$$f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f_n(x) = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k}{x^2 + \sqrt{k}}$$

1. הוכיחו כי הטור מתכנס במ"ש ב  $I$ .

2. הראו כי לא קיימת סדרת מספרים  $M_n$  המקיימת את תנאי משפט  $M$  של וירשטראס.

## הערה

המסקנה מסעיף ב' היא שמשפט  $M$  של וירשטראס אינו אמ"מ, כלומר, אם לא מתקיימים תנאי המשפט, זה לא גורר שההתכנסות לא במ"ש. או במילים אחרות, יש טורי פונקציות שמתכנסים במ"ש, אבל לא ניתן להראות זאת בעזרת משפט  $M$  של וירשטראס.

## פתרון:

נזכר במבחן לייבניץ להתכנסות טור מתחלף מחדו"א 1.

## תזכורת – (מבחן לייבניץ)

תהא  $(a_n)_{n=1}^{\infty}$  סדרה, אם מתקיימים התנאים הבאים:

$$1. \text{ לכל } n, a_n \geq 0.$$

$$2. \text{ סדרה מונוטונית יורדת.}$$

$$3. \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0.$$

אז טור המספרים  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$  מתכנס, ויותר מזה, מתקיים כי:

$$\forall n \in \mathbb{N}, \left| \sum_{i=1}^n (-1)^i a_i - \sum_{i=1}^{\infty} (-1)^i a_i \right| \leq a_{n+1}$$

1. נקבע  $x_0 \in \mathbb{R}$ , ונתבונן בסדרת המספרים  $\left(\frac{1}{x_0^2 + \sqrt{n}}\right)_{n=1}^{\infty}$ , ונשים לב שסדרה זאת היא אכן סדרת לייבניץ:

$$(א) \text{ לכל } n, \frac{1}{x_0^2 + \sqrt{n}} > 0$$

$$(ב) \text{ כלומר הסדרה מונוטונית, } \frac{1}{x_0^2 + \sqrt{n}} > \frac{1}{x_0^2 + \sqrt{n+1}}$$

$$(ג) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{x_0^2 + \sqrt{n}} = 0$$

כלומר הטור מתכנס נקודתית. נבדוק התכנסות במ"ש בעזרת קריטריון הסופרמום, כלומר נחקור את הביטוי:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in \mathbb{R}} |s_n(x) - s(x)| = \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in \mathbb{R}} \left| \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k}{x^2 + \sqrt{k}} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{x^2 + \sqrt{k}} \right|$$

אז היות ולכל  $x \in \mathbb{R}$  הטור שלנו הוא טור לייבניץ, מתקיים כי:

$$\forall x \in \mathbb{R}, \left| \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{x^2 + \sqrt{k}} - \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k}{x^2 + \sqrt{k}} \right| \leq \frac{1}{x^2 + \sqrt{n+1}}$$

כלומר:

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |s_n(x) - s(x)| \leq \sup_{x \in \mathbb{R}} \left| \frac{1}{x^2 + \sqrt{n+1}} \right| = \frac{1}{\sqrt{n+1}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

ולכן:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in \mathbb{R}} |s_n(x) - s(x)| = 0$$

והטור שלנו מתכנס במ"ש.

2. נניח בשלילה כי קיימת סדרת מספרים  $M_n$  המקיימת את תנאי משפט  $M$  של ויירשטראס, בפרט הטור מתכנס בהחלט, כלומר לכל  $x \in \mathbb{R}$ :

$$s(x) := \sum_{k=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^k}{x^2 + \sqrt{k}} \right| = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{x^2 + \sqrt{k}}$$

בפרט, עבור  $x = 0$ , הטור הוא  $s(0) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k}}$  אבל מחדו"א 1 אנו יודעים שהטור אינו מתכנס.

## 2.2 | גזירה ואינטגרציה של סדרות וטורי פונקציות

### תזכורת – (אינטגרציה של סדרת פונקציות)

תהא  $f_n : I \rightarrow \mathbb{R}$  סדרת פונקציות אינטגרביליות, אם  $f_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{Uniform}} f$  אז  $f$  אינטגרבילית, ולכל  $[a, b] \subset I$  מתקיים:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dx = \int_a^b \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) dx = \int_a^b f(x) dx.$$

מקרה פרטי הוא טור פונקציות,  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ , אם הטור מתכנס במ"ש, אז לכל  $[a, b] \subset I$ ,

$$\int_a^b \left( \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \right) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b f_n(x) dx$$

### תרגיל 2.5

תהא סדרת הפונקציות  $f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$

$$f_n(x) = n^\alpha x e^{-nx}$$

עבור  $\alpha > 0$  פרמטר.

1. עבור אילו ערכים של  $\alpha$  הסדרה מתכנסת במ"ש ב  $[0, 1]$ ?

2. עבור אילו ערכי  $\alpha$ , בהם  $f_n$  מתכנסת נקודתית מתקיים:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f_n dx = \int_0^1 \lim_{n \rightarrow \infty} f_n dx$$

### פתרון:

1. ראשית, נשים לב כי לכל  $x \in [0, 1]$  ולכל  $\alpha > 0$  מתקיים:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^\alpha x e^{-nx} = 0$$

נבדוק התכנסות במ"ש בעזרת קריטריון הסופרמום, נסמן:

$$M_n = \sup_{x \in [0, 1]} |n^\alpha x e^{-nx}|$$

נשים לב כי  $[0, 1]$  קטע סגור, ולכן עפ"י משפט ויירשטראס  $f_n$  משיגה את חסמיה, נגזור ונשווה לאפס:

$$\frac{d}{dx} n^\alpha x e^{-nx} = n^\alpha (-n) x e^{-nx} + n^\alpha e^{-nx} = n^\alpha e^{-nx} (1 - nx)$$

כלומר  $\frac{d}{dx} f_n(x) = 0 \iff x = \frac{1}{n}$ , כלומר  $M_n$  יכול לקבל שלושה ערכים:

$$M_n = \max \left\{ f_n(0), f_n(1), f_n\left(\frac{1}{n}\right) \right\}$$

נשים לב כי לכל  $\alpha \in \mathbb{R}$

$$f_n(0) = 0, f_n(1) = n^\alpha e^{-n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

אבל:

$$f_n\left(\frac{1}{n}\right) = n^\alpha \frac{1}{n} e^{-1} = \frac{n^{\alpha-1}}{e}$$

שמתכנס ל-0 אם  $\alpha < 1$ . כלומר סדרת הפונקציות מתכנסת במ"ש אם  $\alpha < 1$ .

2. מסעיף א' אנו יודעים כי:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f_n dx = \int_0^1 \lim_{n \rightarrow \infty} f_n dx$$

לכל  $\alpha < 1$ , אבל אנו לא יודעים מה קורה ב  $\alpha \geq 1$ , אין מנוס אלא פשוט לחשב:

$$\begin{aligned} \int_0^1 n^\alpha x e^{-nx} dx &= n^\alpha \int_0^1 \underbrace{x}_{u'} e^{-nx} dx = n^\alpha \left( \left[ -\frac{x}{n} e^{-nx} \right]_{x=0}^{x=1} - \int_0^1 \left( -\frac{1}{n} e^{-nx} \right) dx \right) \\ &= n^\alpha \left( \left[ -\frac{x}{n} e^{-nx} \right]_{x=0}^{x=1} + \frac{1}{n} \int_0^1 (e^{-nx}) dx \right) \\ &= n^\alpha \left( \left[ -\frac{x}{n} e^{-nx} \right]_{x=0}^{x=1} + \frac{1}{n} \left[ -\frac{e^{-nx}}{n} \right]_{x=0}^{x=1} \right) \\ &= n^\alpha \left( \left[ -\frac{x}{n} e^{-nx} - \frac{e^{-nx}}{n^2} \right]_{x=0}^{x=1} \right) \\ &= \dots = -\frac{n^{\alpha-1}}{e^n} - \frac{n^{\alpha-2}}{e^n} + n^{\alpha-2} \end{aligned}$$

מצד שני:

$$\int_0^1 \lim_{n \rightarrow \infty} f_n dx = \int_0^1 0 dx = 0$$

אז השאלה היא מתי:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} -\frac{n^{\alpha-1}}{e^n} - \frac{n^{\alpha-2}}{e^n} + n^{\alpha-2} = 0$$

לכל  $\alpha \in \mathbb{R}$  מתקיים  $\lim_{n \rightarrow \infty} -\frac{n^{\alpha-1}}{e^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{\alpha-2}}{e^n} = 0$ , אבל המחובר השלישי (ולכן גם כל הביטוי) מתכנס ל-0 אם  $\alpha < 2$ . סה"כ, סדרת האינטגרלים מתכנסת עבור  $0 < \alpha < 2$ .

## תרגיל 2.6

תהא סדרת הפונקציות  $f_n : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$

$$f_n(x) = \frac{\arctan(x^n)}{n}$$

1. בדקו התכנסות נקודתית ובמ"ש.

2. הראו כי  $f'_n$  לא מתכנסת אפילו נקודתית ל' $f'$ .

## פתרון:

1. נשים לב כי  $\arctan(t)$  חסומה על ידי  $\frac{\pi}{2}$  ולכן ננחש כי הפונקציה הגבולית היא  $f \equiv 0$ , ובאמת:

$$\sup_{x \in [0, \infty)} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x \in [0, \infty)} |f_n(x)| \leq \frac{\pi}{2} \frac{1}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

כלומר  $f_n \rightarrow 0$ .

נשים לב כי התכנסות במ"ש גוררת התכנסות נקודתית, כלומר, בהכרח גם  $f_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ .

2. נבדוק ישירות:

$$f'_n(x) = \left( \frac{\arctan(x^n)}{n} \right)' = \frac{1}{n} \frac{1}{1 + (x^n)^2} n x^{n-1} = \frac{x^{n-1}}{1 + x^{2n}}$$

מצד שני  $f'(x) = 0$ , אבל למשל עבור  $x_0 = 1$  מתקיים:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_0^{n-1}}{1 + x_0^{2n}} = \frac{1}{2} \neq 0$$

## הערה

המסקנה מהתרגיל הקודם היא שאין לנו משפט עבור התכנסות נגזרות כפי שיש לנו עבור אינטגרציה. הסיכוי היחיד שלנו הוא להשתמש באינטגרציה ולקבל את המשפט הבא.

## תזכורת – גזירה של סדרת פונקציות

תהא  $f_n : I \rightarrow \mathbb{R}$  סדרת פונקציות גזירות ב- $I$ . אם מתקיימים התנאים הבאים:

1. קיים  $x_0 \in I$  כך ש  $(f_n(x_0))_{n=1}^{\infty}$  סדרת מספרים מתכנסת.

2.  $(f'_n)_{n=1}^{\infty}$  מתכנסת במ"ש לפונקציה  $g$ .

אז קיימת  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  כך ש  $f_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{Uniform}} f$  וגם  $f'(x) = g(x)$  לכל  $x \in I$ .

## תרגיל 2.7

יהא  $R > 1$ , וטור הפונקציות  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{x+n}$ , בדקו התכנסות במ"ש בקטע  $I = [1, R]$ .

## פתרון:

נשים לב כי לכל  $x_0 \in I$  הטור  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{x_0+n}$  הוא לייבניץ - כלומר  $a_n = \frac{1}{x_0+n}$  סדרה חיובית, מונוטונית ומתכנסת לאפס, כלומר הטור מתכנס נקודתית ב- $I$ .  
לגבי התכנסות במ"ש, נבדוק בעזרת משפט הגזירה.

$$1. \text{ נסמן } u_n(x) = \frac{(-1)^n}{x+n}$$

2. נגזור:

$$u'_n(x) = \frac{(-1) \cdot (-1)^n}{(x+n)^2}$$

3. נפעיל את משפט  $M$  של ויירשטראס על הטור  $\sum_{n=1}^{\infty} u'_n(x)$ , בעזרת:

$$|u'_n(x)| = \frac{1}{(x+n)^2} \leq \frac{1}{\underbrace{n^2}_{M_n}}$$

וכמובן כי  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$  מתכנס.

אז לפי המשפט, קיבלנו כי הטור המקורי מתכנס במ"ש.

## תרגול עצמי

פתרו את תרגיל זה בעזרת משפט מבחן לייבניץ, ללא שימוש במשפט הגזירה.

## תרגיל 2.8.

מצאו סדרת פונקציות  $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  כך ש:

1. סדרת הנגזרות  $f'_n$  מתכנסת במ"ש.

2. הסדרה  $f_n$  אינה מתכנסת במ"ש.

## פתרון:

לכל  $n \in \mathbb{N}$ , נסמן  $f_n(x) = n$ , כלומר פונקציה קבועה. כמובן ש  $f_n$  לא מתכנסת במ"ש (יותר מזה, לא מתכנסת אפילו נקודתית) אבל  $f'_n(x) = 0$  לכל  $x \in \mathbb{R}$ , כלומר סדרת הנגזרות מתכנסת במ"ש ל  $g(x) = 0$ .

## תרגיל 2.9.

תהא סדרת פונקציות  $f_n : (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$  המוגדרות ע"י:

$$f_n(x) = nx^{n-1} \sin\left(\frac{1}{x}\right) - x^{n-2} \cos\left(\frac{1}{x}\right)$$

בדקו האם  $f_n$  מתכנסת במ"ש.

רמז חשוב גזרו את הביטוי:

$$x^n \sin\left(\frac{1}{x}\right)$$

## פתרון:

נשתמש ברמז, נסמן  $g_n(x) = x^n \sin\left(\frac{1}{x}\right)$  אז:

$$\frac{d}{dx} g_n(x) = nx^{n-1} \sin\left(\frac{1}{x}\right) - x^{n-2} \cos\left(\frac{1}{x}\right) = f_n(x)$$

נחקור את  $g_n(x)$  נשים לב כי לכל  $x \in (0, 1)$ :

$$|g_n(x)| = \left| x^n \sin\left(\frac{1}{x}\right) \right| \leq x^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

כלומר  $g_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ , כלומר  $g_n$  מתכנסת נקודתית לפונקציה  $g(x) \equiv 0$ .

נבדוק התכנסות במ"ש, נשים לב כי ליד  $x = 1$  הפונקציה נראית כמו  $x^n$ , שאינה מתכנסת במ"ש, אז נתבונן בסדרת נקודות  $x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$ , למשל  $x_n = 1 - \frac{1}{n}$ , ונשים לב כי:

$$g_n(x_n) = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n \sin\left(\frac{1}{1 - \frac{1}{n}}\right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} e^{-1} \sin(1) \neq 0$$

כלומר  $g_n$  לא מתכנסת במ"ש.

נחזור לסדרה  $f_n$ , או כמו שראינו  $f_n = g'_n$ . ראינו כי  $g_n$  לא מתכנסת במ"ש, אז תנאי אחד (לפחות) של משפט הגזירה לא מתקיים.

נשים לב כי לכל  $t \in (0, 1)$  הסדרה  $g_n(t)$  מתכנסת, כי  $g_n$  מתכנסת נקודתית. לכן, נסיק כי התנאי השני אינו מתקיים, כלומר ש  $f_n$  לא מתכנסת במ"ש.

## תרגול שלישי

### 3.1 | חזרה מהתרגול הקודם - גזירה של סדרות וטורי פונקציות

#### תזכורת – (גזירה של סדרת פונקציות)

תהא  $f_n : I \rightarrow \mathbb{R}$  סדרת פונקציות גזירות ב- $I$ . אם מתקיימים התנאים הבאים:

1. קיים  $x_0 \in I$  כך ש  $(f_n(x_0))_{n=1}^\infty$  סדרת מספרים מתכנסת.

2.  $(f'_n)_{n=1}^\infty$  מתכנסת במ"ש לפונקציה  $g$ .

אז קיימת  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  כך ש  $f_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{Uniform}} f$  וגם  $f'(x) = g(x)$  לכל  $x \in I$ .

#### תרגיל 3.1

יהא  $R > 1$ , וטור הפונקציות  $\sum_{n=1}^\infty \frac{(-1)^n}{x+n}$ , בדקו התכנסות במ"ש בקטע  $I = [1, R]$ .

#### פתרון:

נשים לב כי לכל  $x_0 \in I$  הטור  $\sum_{n=1}^\infty \frac{(-1)^n}{x_0+n}$  הוא לייבניץ - כלומר  $a_n = \frac{1}{x_0+n}$  סדרה חיובית, מונוטונית ומתכנסת לאפס, כלומר הטור מתכנס נקודתית ב- $I$ .  
לגבי התכנסות במ"ש, נבדוק בעזרת משפט הגזירה.

1. נסמן  $u_n(x) = \frac{(-1)^n}{x+n}$ .

2. נגזור:

$$u'_n(x) = \frac{(-1) \cdot (-1)^n}{(x+n)^2}$$

3. נפעיל את משפט  $M$  של וירשטראס על הטור  $\sum_{n=1}^\infty u'_n(x)$ , בעזרת:

$$|u'_n(x)| = \frac{1}{(x+n)^2} \leq \frac{1}{\underbrace{n^2}_{M_n}}$$

וכמובן כי  $\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^2}$  מתכנס.

אז לפי המשפט, קיבלנו כי הטור המקורי מתכנס במ"ש.

#### תרגול עצמי

פתרו את תרגיל זה בעזרת משפט מבחן לייבניץ, ללא שימוש במשפט הגזירה.

#### תרגיל 3.2.

מצאו סדרת פונקציות  $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  כך ש:

1. סדרת הנגזרות  $f'_n$  מתכנסת במ"ש.

2. הסדרה  $f_n$  אינה מתכנסת במ"ש.

#### פתרון:

לכל  $n \in \mathbb{N}$ , נסמן  $f_n(x) = n$ , כלומר פונקציה קבועה. כמובן ש  $f_n$  לא מתכנסת במ"ש (יותר מזה, לא מתכנסת אפילו נקודתית) אבל  $f'_n(x) = 0$  לכל  $x \in \mathbb{R}$ , כלומר סדרת הנגזרות מתכנסת במ"ש ל  $g(x) = 0$ .

## 3.2 | טורי חזקות

### תזכורת – (טור חזקות ורדיוס התכנסות)

טור חזקות הוא טור פונקציות מהצורה:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \dots$$

עבור  $x_0 \in \mathbb{R}$  סדרת מספרים  $(a_n)_{n=0}^{\infty} \subset \mathbb{R}$   
לכל טור קיים רדיוס התכנסות  $0 \leq R < \infty$ , או  $R = \infty$  כך ש:

1. (א) אם  $|x - x_0| < R$  אז הטור מתכנס נקודתית ב  $x$ .

(ב) אם  $|x - x_0| > R$  אז הטור מתבדר ב  $x$ .

(ג) אם  $|x - x_0| = R$  אז הטור יכול להתכנס או להתבדר, תלוי בטור.

2. לכל קטע סגור  $[\alpha, \beta]$  בתחום ההתכנסות הטור מתכנס במ"ש.

#### הערה

שימו לב ששוב פעם יש פה עניין עם האינסוף, - אם  $R = \infty$ , אז הטור מתכנס נקודתית בכל  $\mathbb{R}$ , ובמ"ש בכל  $\mathbb{R}$  אבל לא בהכרח בכל  $[a, b] \subset \mathbb{R}$ .

## תזכורת – (קושי-הדמר)

עבור טור חזקות  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$  מתקיים:

$$R = \frac{1}{\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}}$$

כאשר אנו מחשיבים את הגבולות הבאים:

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 0 \implies R = \infty$$

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \infty \implies R = 0$$

לפעמים נוכל לחשב את  $R$  בקלות יותר. במקרה ואחד הגבולות הבאים קיימים:

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}} \quad .1$$

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| \quad .2$$

(יכולים גם להיות  $\infty$ ) אז  $R = L$ .

תזכורת –  $(\limsup)$ 

תהא  $(a_n)_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}$  סדרת מספרים.

אם  $(a_n)_{n=1}^{\infty}$  סדרה מתכנסת, אז  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \limsup_{n \rightarrow \infty} a_n$ .

אם  $\ell$  היא קבוצת כל הגבולות החלקיים של  $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ , אז  $\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n = \sup \ell$ .

## תרגיל 3.3

מצאו את תחום ההתכנסות של טור החזקות:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{2^n n^2}$$

## פתרון:

ראשית, נמצא את רדיוס ההתכנסות, נעשה זאת בשתי דרכים:

.1

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\frac{1}{2^n n^2}}{\frac{1}{2^{n+1} (n+1)^2}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{2^{n+1} (n+1)^2}{2^n n^2} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} 2 \left| \frac{(n+1)^2}{n^2} \right| = 2$$

.2

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{\left| \frac{1}{2^n n^2} \right|}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\left( \frac{1}{2} \right) \sqrt[n]{\left| \frac{1}{n^2} \right|}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{\sqrt[n]{\left| \frac{1}{n^2} \right|}} = 2$$

(\*) - בהנחה שהגבול קיים.)

כלומר,  $R = 2$ , נבדוק מה קורה בקצוות:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{2^n n^2} \Big|_{x=2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{2^n n^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{2^n n^2} \Big|_{x=-2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-2)^n}{2^n n^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} < \infty$$

כלומר הטור מתכנס ב  $[-2, 2]$ .

## תרגיל 3.4

בדקו התכנסות של הטור:

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n n \left( \frac{x}{2} - 3 \right)^n$$

פתרון:נציב  $t = \frac{x}{2} - 3$ , ונקבל את הטור:

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n n t^n$$

נבדוק עבור רדיוס התכנסות:

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{n}{n+1} \right| = 1$$

(\*) - בהנחה שהגבול קיים.)

כלומר הטור מתכנס כאשר  $|t| < 1$ , נשים לב כי:

$$|t| < 1 \iff \left| \frac{x}{2} - 3 \right| < 1 \iff -1 < \frac{x}{2} - 3 < 1 \iff 2 < \frac{x}{2} < 4 \iff 4 < x < 8$$

נבדוק קצוות, עבור  $x = 8$ :

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n n \left( \frac{x}{2} - 3 \right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n n$$

שאינו מתכנס, ועבור  $x = 4$ :

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n n \left(\frac{x}{2} - 3\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} n$$

שגם לא מתכנס, כלומר הטור מתכנס ב  $(4, 8)$ .

### תרגיל 3.5

חשבו את רדיוס ההתכנסות של טור החזקות:

$$s(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^{2n} = 1 + x^2 + x^4 + \dots$$

#### פתרון:

נפתור את התרגיל ב 2 דרכים.

1. נחשב את רדיוס ההתכנסות בעזרת מבחן קושי-הדמר, נשים לב כי:

$$s(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x_n, \quad a_n = \begin{cases} 1 & n \text{ זוגי} \\ 0 & n \text{ אי-זוגי} \end{cases}$$

בפרט,  $\sqrt[n]{|a_n|} = \begin{cases} 1 & n \text{ זוגי} \\ 0 & n \text{ אי-זוגי} \end{cases}$ , כלומר לסדרה  $\left(\sqrt[n]{|a_n|}\right)_{n=0}^{\infty}$  יש 2 גבולות חלקיים, 0 ו-1, ולכן והמקסימלי של הגבולות החלקיים הוא 1, כלומר  $\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 1$ , ולכן  $R = \frac{1}{1} = 1$ .

2. נסמן  $t = x^2$ , ונקבל את הטור:

$$\sum_{n=0}^{\infty} t^n$$

רדיוס ההתכנסות שלו לפי המשתנה  $t$  הוא 1 (תרגיל!) כלומר הטור מתכנס כאשר  $|t| < 1$ , כלומר  $|x^2| < 1$ , כלומר  $|x| < 1$ , כלומר  $R = 1$ .

### תרגיל 3.6

מצאו את רדיוס ההתכנסות של הטור:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n + (-2)^n}{n} x^n$$

#### פתרון:

נשים לב כי אפשר לפרק את הטור לסכום של שני טורים:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n + (-2)^n}{n} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{n} x^n + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-2)^n}{n} x^n$$

יש פה משחק מסוכן, כי נכון שאם שני טורים מתכנסים אז גם סכומם מתכנס, אבל אם הם מתבדרים זה לא אומר שסכומם מתבדר.

1. עבור הטור  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{n} x^n$  נשים לב כי:

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{\left|\frac{3^n}{n}\right|}} = \frac{1}{3}$$

כלומר הטור מתכנס ב  $|x| < \frac{1}{3}$ .

2. הטור  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-2)^n}{n} x^n$  מתכנס ב:

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{\left|\frac{(-2)^n}{n}\right|}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{\left|\frac{2^n}{n}\right|}} = \frac{1}{2}$$

כלומר הטור מתכנס כאשר  $|x| < \frac{1}{2}$ .

(\* - בהנחה שהגבול קיים.)

נשים לב כי הטור הנתון מתכנס כאשר  $|x| < \frac{1}{3}$  ומצד שני, מתבדר עבור  $x \in (\frac{1}{3}, \frac{1}{2})$ , כי שם טור אחד מתכנס וטור שני מתבדר, כלומר כל הטור מתבדר (סכום איבר-איבר של טור מתכנס ומתבדר הוא מתבדר) כלומר, רדיוס ההתכנסות חייב להיות  $\frac{1}{3}$ .

## תזכורת – (חדו"א של טורי חזקות)

יהא טור חזקות  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$  עם רדיוס התכנסות  $R > 0$ , נסמן ב- $I$  את תחום ההתכנסות ואת  $s(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$  להיות פונקציית סכום הטור, אז:

1.  $s(x)$  רציפה ב- $I$ .

2.  $s(x)$  אינטגרלית ב- $I$  ולכל  $x \in I$  מתקיים:

$$\int_{x_0}^x s(t)dt = \int_{x_0}^x \sum_{n=0}^{\infty} a_n(t-x_0)^n dt = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{x_0}^x a_n(t-x_0)^n dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} a_n(x-x_0)^{n+1}$$

וטור האינטגרלים  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} a_n(x-x_0)^{n+1}$  בעל רדיוס התכנסות  $R$ .

3. לכל  $x \in I$ ,  $s(x)$  גזירה ומתקיים:

$$s'(x) = \left( \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n \right)' = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n(x-x_0)^n)' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n(x-x_0)^{n-1}$$

כאשר טור הנגזרות בעל רדיוס התכנסות  $R$ .

לגבי התכנסות בקצוות של תחום ההתכנסות, כלומר ב- $\xi = x_0 \pm R$ .

1. אם  $s(\xi)$  קיים (כלומר הגבול  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \xi^n$ ) אז גם  $S(x) = \int_0^x s(t)dt$  מתכנס.

## תרגול עצמי

הוכיחו זאת, רמז, השתמשו במבחן אבל לסדרות.

2. אם  $s(\xi)$  קיים, אז  $s'(\xi)$  לא בהכרח קיים.

## תרגול עצמי

הראו כי  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$  היא דוגמה לכך.

## 3.7. תרגיל

פתחו את  $f(x) = \arctan(x)$  לטור חזקות סביב  $x = 0$ .

## פתרון:

נשים לב כי  $f'(x) = \frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{1-(-x^2)}$ , שאת הטור הזה אנחנו יודעים לפתח לטור חזקות סביב  $x_0 = 0$ ,

עבור  $|x| < 1$ , אז נקבל, שעבור  $x \in (-1, 1)$ :

$$f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-x^2)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n}$$

אז עבור  $x \in (-1, 1)$ :

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x) - \underbrace{f(0)}_{=0} = \int_0^x f'(t) dt = \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n t^{2n} dt = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^x (-1)^n t^{2n} dt \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \int_0^x t^{2n} dt = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \end{aligned}$$

$$\forall x \in (-1, 1), \arctan(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

### הערה

עבור  $x$  שלילי יש כאן נקודה עדינה:

$$\int_0^x f'(x) dx = \begin{cases} \int_0^x f'(x) dx = f(x) - f(0) & x \geq 0 \\ -\int_x^0 f'(x) dx = -(f(0) - f(x)) = f(x) - f(0) & x < 0 \end{cases} = f(x) - f(0)$$

### תרגיל 3.8

יהיו  $s_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$ ,  $s_2(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (x - x_0)^n$  שני טורי חזקות בעלי רדיוס התכנסות  $R > 0$ , נסמן  $I = \{x \mid -R < x - x_0 < R\}$ , כלומר תחום ההתכנסות ללא הקצוות. הוכיחו כי אם לכל  $x \in I$ ,  $s_1(x) = s_2(x)$ , אז לכל  $n$ ,  $a_n = b_n$ .

### פתרון:

נשים לב כי:

$$s_1(0) = s_2(0) \Rightarrow a_0 = b_0$$

באופן דומה, היות ש  $0 \in I$  מהמשפט  $s_1'(0) = s_2'(0)$  ובאמת  $s_1'(0) = a_1$ ,  $s_2'(0) = b_1$ , וניתן להמשיך באופן אינדוקטיבי,  $s_1''(0) = s_2''(0)$  וגם  $s_1''(0) = 2a_2$ ,  $s_2''(0) = 2b_2$  וכן הלאה.

### תרגיל 3.9

חשבו את ערך הטור:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{5^n}$$

**פתרון:**

נשים לב כי אם  $s(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)x^n$  אז  $s\left(\frac{1}{5}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{5^n}$  ערך הטור הנדרש. בדיקה מהירה תראה כי  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = 1$  ולכן רדיוס ההתכנסות הוא  $R = 1$  (\* - בהנחה שהגבול קיים). נשים לב כי:

$$\forall x \in (-1, 1), \quad \int_0^x s(t) dt = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^x (n+1)t^n dt = \sum_{n=0}^{\infty} x^{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} x^n$$

כלומר:

$$\int_0^x s(t) dt = \sum_{n=1}^{\infty} x^n = \sum_{n=1}^{\infty} x^n + 1 - 1 = \sum_{n=0}^{\infty} x^n - 1 = \frac{1}{1-x} - 1$$

ולכן:

$$s(x) = \left( \int_0^x s(t) dt \right)' = \left( \frac{1}{1-x} - 1 \right)' = \frac{1}{(1-x)^2}$$

בפרט:

$$s\left(\frac{1}{5}\right) = \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{5}\right)^2} = \frac{1}{\left(\frac{4}{5}\right)^2} = \frac{25}{16}$$

**תרגיל 3.10**

פתחו לטור חזקות את הפונקציה  $f(x) = \ln(1+x)$  סביב  $x = 0$ .

**פתרון:**

נסמן  $f(x) = \ln(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ , בפרט, בכל  $x$  בתחום ההתכנסות של הטור, מתקיים:

$$f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n n x^{n-1} = \frac{d}{dx} (\ln(1+x)) = \frac{1}{1+x}$$

אבל, זהו טור שמוכר לנו: השוויון  $\sum_{n=0}^{\infty} t^n = \frac{1}{1-t}$  כאשר  $|t| < 1$ . ולכן עבור  $|x| < 1$  נקבל:

$$f'(x) = \frac{1}{1+x} = \frac{1}{1-(-x)} = \sum_{n=0}^{\infty} (-x)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n$$

כעת, נבצע אינטגרציה איבר-איבר מ-0 עד  $x$ , עבור  $|x| < 1$ , ונקבל כי מצד אחד:

$$\int_0^x f'(t) dt = f(x) - f(0) = \ln(1+x) - \ln(1) = \ln(1+x)$$

ומצד שני:

$$\int_0^x f'(t) dt = \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n t^n dt = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^x (-1)^n t^n dt = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

כלומר:

$$\ln(1+x) = \int_0^x f'(t)dt = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

## תרגיל 3.11.

תהי  $s(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  פונקציית סכום של טור חזקות עם רדיוס התכנסות  $R > 0$ .  
נניח כי מתקיימים שני התנאים הבאים:

1. לכל  $x \in (-R, R)$  מתקיים  $s'(x) = s(x)$  (הפונקציה שווה לנגזרת של עצמה).

2.  $s(0) = 1$ .

הוכיחו כי  $a_n = \frac{1}{n!}$ , כלומר  $s(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$  (נזכר שראינו בחדו"א 1 כי  $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ ).

פתרון:

לכל  $x \in (-R, R)$ , מותר לנו לגזור את טור החזקות איבר-איבר:

$$s'(x) = \left( \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right)' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$$

נרצה לכתוב את  $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$  בצורה של טור חזקות, כלומר נזיז את האינדקס כך ש- $n$  יהיה במקום  $n-1$ , נציב  $k = n-1$ , ולכן  $k+1 = n$ , אז:

$$s'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) a_{k+1} x^k = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} x^n$$

לפי הנתון:

$$s'(x) = s(x) \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

ולפי תרגיל שראינו, זה מחייב שלכל  $n \geq 0$ :

$$(n+1) a_{n+1} = a_n \Rightarrow a_{n+1} = \frac{a_n}{n+1}$$

נשתמש בנתון כי  $a_0 = 1$ , ונקבל נוסחת נסיגה:

$$a_0 = 1, \quad a_{n+1} = \frac{a_n}{n+1}$$

נוכיח באינדוקציה פשוטה כי  $a_n = \frac{1}{n!}$  לכל  $n \in \mathbb{N}$ :

• בסיס האינדוקציה:  $a_0 = 1 = \frac{1}{0!}$ .

• צעד האינדוקציה: נניח כי  $a_n = \frac{1}{n!}$ , אז:

$$a_{n+1} = \frac{a_n}{n+1} = \frac{1}{(n+1)n!} = \frac{1}{(n+1)!}$$

וסיימנו!

---

## תרגול רביעי

---

### 4.1 | וקטורים

#### תזכורת – וקטורים

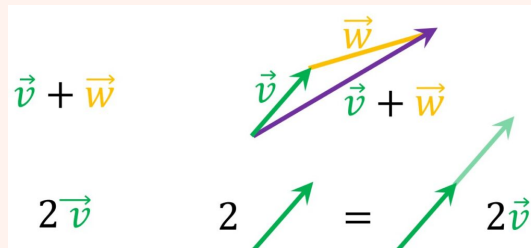
וקטור ב- $\mathbb{R}^n$  הוא  $n$ -יה של איברים ב- $\mathbb{R}$ ,

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

עם פעולות חיבור וכפל בסקלר:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix}, \quad \lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \vdots \\ \lambda x_n \end{pmatrix}$$

לפעמים נוח לחשוב על וקטורים בתור "גודל מכוון" - כלומר בתור החצים בין ראשית הצירים לנקודה ב- $\mathbb{R}^n$ , ואז יש אינטואיציה גאומטרית לפעולות החיבור וכפל בסקלר..



## תזכורת – (מכפלה פנימית ונורמה)

על  $\mathbb{R}^n$ , יש לנו מכפלה פנימית טבעית:

$$\left\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \right\rangle = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n$$

ונורמה:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad \|\vec{x}\| = \sqrt{\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle} = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$$

הזווית בין שני וקטורים  $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$  היא  $\theta = \arccos \frac{\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle}{\|\vec{x}\| \|\vec{y}\|}$  אם  $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = 0$  אז  $\vec{x}, \vec{y}$  נקראים אורתוגונליים ונסמן  $\vec{x} \perp \vec{y}$ .

## תזכורת – (מכפלה וקטורית)

ב  $\mathbb{R}^3$  יש לנו פעולה הנקראת מכפלה וקטורית, שמשומנת  $\times$ , שמקבלת שני וקטורים ומחזירה וקטור נוסף.

יהיו  $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$  נסמן

$$\vec{x} \times \vec{y} = \det \begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 y_3 - x_3 y_2 \\ x_3 y_1 - x_1 y_3 \\ x_1 y_2 - x_2 y_1 \end{pmatrix}$$

## תרגיל 4.1

יהיו  $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^3$  הוכיחו כי  $\vec{x} \perp (\vec{x} \times \vec{y})$  וגם  $\vec{y} \perp (\vec{x} \times \vec{y})$ .

**פתרון:**

נראה כי  $\langle (\vec{x} \times \vec{y}), \vec{x} \rangle = 0$ , את הסעיף השני נשאיר כתרגיל. חישוב ישיר יראה כי:

$$\begin{aligned} \langle \vec{x} \times \vec{y}, \vec{x} \rangle &= \left\langle \det \begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} x_2 y_3 - x_3 y_2 \\ x_3 y_1 - x_1 y_3 \\ x_1 y_2 - x_2 y_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \right\rangle \\ &= x_1(x_2 y_3 - x_3 y_2) + x_2(x_3 y_1 - x_1 y_3) + x_3(x_1 y_2 - x_2 y_1) \\ &= x_1 x_2 y_3 - x_1 x_3 y_2 + x_2 x_3 y_1 - x_1 x_2 y_3 + x_3 x_1 y_2 - x_2 x_3 y_1 = 0 \end{aligned}$$

## תזכורת – (משוואת ישר ומישור)

ישר ב- $\mathbb{R}^n$  העובר בין זוג נקודות  $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^n$  הינו:

$$\ell = \{v_1 + t(v_2 - v_1) | t \in \mathbb{R}\}$$

מישור העובר ב- $v \in \mathbb{R}^n$ , עם נורמל  $n \in \mathbb{R}^n$  הוא:

$$S = \{x \in \mathbb{R}^n | \langle x - v, n \rangle = 0\}$$

## 4.2. תרגיל

יהיו זוג מישורים ב- $\mathbb{R}^3$ :

$$S_1 = \left( \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \middle| x + y + z = 1 \right), \quad S_2 = \left( \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \middle| -3x - 3y + z = 17 \right)$$

מצאו את הקבוצה  $S_1 \cap S_2$ .

## פתרון:

נקודה  $v = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$  היא ב- $S_1 \cap S_2$  אם ורק אם  $v \in S_1$  וגם  $v \in S_2$ , כלומר:

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ -3x - 3y + z = 17 \end{cases} \implies 4z = 20 \implies z = 5 \implies x + y = -4$$

כלומר:

$$S_1 \cap S_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ 5 \end{pmatrix} \middle| x + y = -4 \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} t \\ -4-t \\ 5 \end{pmatrix} \middle| t \in \mathbb{R} \right\}$$

שזה כמובן ישר ב- $\mathbb{R}^3$ .

## תזכורת – (פונקציית מרחק)

יהיו  $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$  המרחק בין  $x$  ל- $y$  הינו:

$$d(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2}$$

## תרגיל 4.3.

יהא  $\ell$  הישר ב- $\mathbb{R}^3$  העובר בין נקודות  $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ ,  $v_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$ , ויהי  $p = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ . מצאו את המרחק בין  $p$  ל- $\ell$ , כלומר את הנקודה על  $\ell$  הקרובה ביותר ל- $p$ .

**פתרון:**

נמצא את המשוואה של  $\ell$ :

$$\ell = \{v_1 + t(v_2 - v_1) \mid t \in \mathbb{R}\} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} 1+3t \\ 2+3t \\ 3+3t \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{R} \right\}$$

תהא  $q = \begin{pmatrix} 1+3t \\ 2+3t \\ 3+3t \end{pmatrix} \in \ell$ , נמצא את הערך המינימלי של  $d(p, q)^2$ , כדי להימנע מגזירת שורשים, אז:

$$d(p, q)^2 = (1 - (1 + 3t))^2 + (1 - (2 + 3t))^2 + (1 - (3 + 3t))^2 = 27t^2 + 18t + 5$$

על מנת למצוא את הערך המינימלי, נגזור ונקבל

$$\frac{\partial}{\partial t} (27t^2 + 18t + 5) = 54t + 18 = 0 \Rightarrow t = -\frac{1}{3} \Rightarrow q = \begin{pmatrix} 1+3t \\ 2+3t \\ 3+3t \end{pmatrix} \Big|_{t=-\frac{1}{3}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

## תרגיל 4.4.

הוכיחו כי לכל  $u, v, w \in \mathbb{R}^3$  מתקיים:

$$u \times (v \times w) = \langle u, w \rangle v - \langle u, v \rangle w$$

**פתרון:**

נראה את התרגיל עבור  $u = e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

## תרגול עצמי

הראו זאת עבור  $u = e_2, u = e_3$  והסיקו את התוצאה הכללית.

נסמן

$$u = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}, \quad w = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix}$$

$$\text{אז } v \times w = \begin{pmatrix} v_2 w_3 - v_3 w_2 \\ v_3 w_1 - v_1 w_3 \\ v_1 w_2 - v_2 w_1 \end{pmatrix} \text{ ולכן:}$$

$$u \times (v \times w) = \det \begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & 0 \\ v_2 w_3 - v_3 w_2 & v_3 w_1 - v_1 w_3 & v_1 w_2 - v_2 w_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ v_2 w_1 - v_1 w_2 \\ v_3 w_1 - v_1 w_3 \end{pmatrix}$$

מצד שני,

$$\langle u, w \rangle v - \langle u, v \rangle w = w_1 \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} - v_1 \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ v_2 w_1 - v_1 w_2 \\ v_3 w_1 - v_1 w_3 \end{pmatrix}$$

## תרגיל 4.5

נזכר שראינו בהרצאה כי אם  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}, x, y, z \in \mathbb{R}^3$  אז מתקיים:

$$(\alpha x + \beta y) \times z = \alpha(x \times z) + \beta(y \times z), \quad x \times (\alpha y + \beta z) = \alpha(x \times y) + \beta(x \times z)$$

לתכונה הזאת קוראים בילינאריות.הוכיחו כי לא קיימת מכפלה וקטורית ב- $\mathbb{R}^4$ , כלומר מכפלה שנסמן  $v_1 \chi v_2, v_1, v_2 \in \mathbb{R}^4$ , המקיימת:

1. בילינאריות.

2. מתקיים  $u \chi (v \chi w) = \langle u, w \rangle v - \langle u, v \rangle w$  כמו בתרגיל הקודם.3.  $u \chi v$  אורתוגונלי ל- $u, v$ .4.  $v \chi u = -u \chi v$ .5. לכל  $i \neq j$ , מתקיים  $e_i \chi e_j \neq \vec{0}$ .פתרון:נניח בשלילה שקיימת כזאת. אנו יודעים כי  $\langle e_1 \chi e_2, e_1 \rangle = 0$  וגם  $\langle e_1 \chi e_2, e_2 \rangle = 0$  ולכן  $e_1 \chi e_2$  מהצורה

$$e_1 \chi e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \alpha e_3 + \beta e_4$$

מתקיים:

$$e_3 \chi (e_1 \chi e_2) = \langle e_3, e_2 \rangle e_1 - \langle e_3, e_1 \rangle e_2 = 0$$

$$e_4 \chi (e_1 \chi e_2) = \langle e_4, e_2 \rangle e_1 - \langle e_4, e_1 \rangle e_2 = 0$$

מצד שני,

$$e_3 \chi (e_1 \chi e_2) = e_3 \chi (\alpha e_3 + \beta e_4) = \alpha e_3 \chi e_3 + \beta e_3 \chi e_4 = \beta e_3 \chi e_4$$

וגם:

$$e_4 \chi (e_1 \chi e_2) = e_4 \chi (\alpha e_3 + \beta e_4) = \alpha e_4 \chi e_3 + \beta e_4 \chi e_4 = -\alpha e_3 \chi e_4$$

כלומר:

$$\beta e_3 \chi e_4 = -\alpha e_3 \chi e_4 = 0$$

אבל,  $e_3 \chi e_4 \neq 0$ , ולכן  $\alpha = \beta = 0$ , כלומר  $\vec{0} = e_1 \chi e_2$  וזו סתירה.

## הערה

גם ב  $\mathbb{R}^5, \mathbb{R}^6$  לא קיימת כזו, אבל דווקא ב  $\mathbb{R}^7$  כן קיימת.

## 4.2 | טופולוגיה

## תזכורת

1. עבור  $\mathbb{R}^n$  נגדיר את פונקציית המרחק:

$$d(\vec{x}, \vec{y}) = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2}, \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

2. כדור פתוח ברדיוס  $R > 0$  סביב נקודה  $p$  הוא:

$$B_R(p) := \{x \in \mathbb{R}^n | d(x, p) < R\}$$

3. כדור סגור (או דיסק) ברדיוס  $R > 0$  סביב נקודה  $p$  הוא:

$$\overline{B}_R(p) := D_R(p) := \{x \in \mathbb{R}^n | d(x, p) \leq R\}$$

4. נקודה  $p \in A \subseteq \mathbb{R}^n$  נקראת נקודת פנים של  $A$  אם קיים  $\varepsilon > 0$  כך שכדור פתוח ברדיוס  $\varepsilon$  ממרכז בנקודה  $p$  מוכל ב  $A$ .

5. קבוצה  $A \subseteq \mathbb{R}^n$  נקראת פתוחה אם כל נקודה בה היא נקודת פנים.

6. נקודה  $p \in \mathbb{R}^n$  נקראת נקודת שפה של  $A \subseteq \mathbb{R}^n$  אם לכל  $\varepsilon > 0$  הכדור ברדיוס  $\varepsilon$  סביב  $p$  מכיל גם נקודה ב  $A$  וגם נקודה שאינה ב  $A$ .

7. אוסף נקודות השפה של  $A \subseteq \mathbb{R}^n$  נקרא השפה של  $A$  ומסומן  $\partial A$ .

8. קבוצה  $A \subseteq \mathbb{R}^n$  נקראת סגורה אם  $\partial A \subseteq A$ .

9. קבוצה  $A \subseteq \mathbb{R}^n$  נקראת חסומה אם קיים  $R > 0$  כך ש- $A$  מוכלת בכדור ברדיוס  $R$  סביב 0.

10. עבור  $A \subseteq \mathbb{R}^n$ , נסמן ב  $A^c = \{x \in \mathbb{R}^n | x \notin A\}$  את המשלים של  $A$ .

11. ראינו בהרצאה כי  $A$  פתוחה אם  $A^c$  סגורה,  $A$  סגורה אם  $A^c$  פתוחה, וכי  $(A^c)^c = A$ .

## תרגיל 4.6

הוכיחו כי קבוצה  $A \subseteq \mathbb{R}^n$  היא פתוחה אם"מ היא לא מכילה אף נקודת שפה.

פתרון:

$\Leftarrow$

אם  $A$  פתוחה, אז לכל נקודה  $x_0 \in A$  קיים  $\varepsilon_{x_0} > 0$  כך שכדור סביב  $x_0$  ברדיוס  $\varepsilon_{x_0}$  מוכל ב- $A$ , כלומר  $x_0$  לא יכולה להיות נקודת שפה, כלומר  $A$  לא מכילה אף נקודת שפה.

$\Rightarrow$

אם  $A$  לא פתוחה, היא מכילה נקודה  $p \in A$  שאינה נקודת פנים, כלומר לכל  $\varepsilon > 0$  הכדור  $B_\varepsilon(p)$  לא מוכל ב- $A$ , אבל, אבל,  $p \in B_\varepsilon(p)$  וגם  $p \in A$ , אז  $p$  נקודת שפה.

## תרגיל 4.7

הוכיחו כי אם  $A \subseteq \mathbb{R}^n$ , פתוחה וסגורה אז  $A = \mathbb{R}^n$  או  $A = \emptyset$ .

פתרון:

דבר ראשון,  $\emptyset, \mathbb{R}^n$  אכן גם סגורות וגם פתוחות, ונשים לב כי הן המשלימות אחת של השנייה, ויותר מכך, אם  $A$  אכן גם סגורה וגם פתוחה, אז  $A^c$  גם כזאת, נניח בשלילה כי  $A, A^c$  הן לא  $\emptyset, \mathbb{R}^n$ , כלומר קיימים  $p, q \in A, q \in A^c$  נסמן:

$$\ell = \{t \in [0, 1] \mid t\vec{q} + (1-t)\vec{p} \in A\}$$

נשים לב כי  $0 \in \ell$ ,  $1 \notin \ell$  נסמן  $S = \sup \ell$ , ברור כי  $S \geq 0$ , אבל גם  $S < 1$ , כי אם  $S = 1$ , נקבל כי  $\vec{q} \in A$ , כי  $A$  סגורה, אז הנקודה  $\vec{X} = S\vec{q} + (1-S)\vec{p} \in A$  כי  $A$  סגורה, אבל היות ש- $A$  פתוחה קיים  $r > 0$  כך ש  $S+r \in \ell$  אז  $S+r \in \ell$  בסתירה לכך ש  $S = \sup \ell$ .

## תרגיל 4.8

1. הוכיחו את הטענות הבאות:

- (א) יהיו  $\{U_n\}_{n=1}^\infty$  קבוצות פתוחות, הוכיחו כי  $U = \bigcup_{n=1}^\infty U_n$  פתוחה.
- (ב) יהיו  $\{F_n\}_{n=1}^\infty$  קבוצות סגורות, הוכיחו כי  $F = \bigcap_{n=1}^\infty F_n$  סגורה.
- (ג) יהיו  $U_1, U_2$  פתוחות, הוכיחו כי  $U = U_1 \cap U_2$  פתוחה, הסיקו כי כל חיתוך סופי של קבוצות פתוחות הוא פתוח.
- (ד) יהיו  $F_1, F_2$  סגורות, הוכיחו כי  $F = F_1 \cup F_2$  סגורה, הסיקו כי כל איחוד סופי של קבוצות סגורות הוא סגור.

2. מצאו דוגמה נגדית לטענות הבאות:

- (א) יהיו  $\{U_n\}_{n=1}^\infty$  קבוצות פתוחות, הוכיחו כי  $U = \bigcap_{n=1}^\infty U_n$  פתוחה.

(ב) יהיו  $\{F_n\}_{n=1}^{\infty}$  קבוצות סגורות, הוכיחו כי  $F = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$  סגורה.

### פתרון:

1. (א) תהא  $p \in U$  והיא באיחוד, קיים  $k$  כך ש  $p \in U_k$ , היות ש- $U_k$  פתוחה, קיים  $r > 0$  כך ש  $B_r(p) \subseteq U_k \subseteq U$  וסיימנו.

(ב) נזכר כי  $K$  סגורה אם  $K^c$  פתוחה, ונשתמש בחוקי דה-מורגן:

$$F = \bigcap_{n=1}^{\infty} F_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} (F_n^c)^c = \left( \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n^c \right)^c$$

אז לפי הסעיף הקודם,  $\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n^c$  פתוחה, אז  $F = \left( \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n^c \right)^c$  סגורה.

(ג) תהא  $p \in U_1 \cap U_2$ , אז  $p \in U_1$  וגם  $p \in U_2$ , היות ש- $U_1, U_2$  פתוחות, קיימים  $r_1, r_2 > 0$  כך ש  $B_{r_1}(p) \subseteq U_1$  וגם  $B_{r_2}(p) \subseteq U_2$ , נסמן  $r = \min\{r_1, r_2\} > 0$ , אז  $B_r(p) \subseteq B_{r_1}(p) \subseteq U_1$  וגם  $B_r(p) \subseteq B_{r_2}(p) \subseteq U_2$  ולכן  $B_r(p) \subseteq U_1 \cap U_2$  וסיימנו.

(ד) נשאיר את סעיף זה כתרגיל.

2. (א) נסמן  $U_n = B_{\frac{1}{n}}(0)$ , אז:

$$U = \bigcap_{i=1}^{\infty} U_i = \bigcap_{n=1}^{\infty} B_{\frac{1}{n}}(0) = \{0\}$$

אינה פתוחה.

(ב) נסמן  $F_n = D_{1-\frac{1}{n}}(0)$ , אז:

$$F = \bigcup_{n=1}^{\infty} D_{1-\frac{1}{n}}(0) = B_1(0)$$

שאינה סגורה.

## 4.3 | פונקציות במספר משתנים

## תזכורת

יהא תחום  $D \subseteq \mathbb{R}^n$ , פונקציה במשתנים היא פונקציה מהצורה  $f : D \rightarrow \mathbb{R}^m$ , כאשר  $m$  מסמנים:

$$f(x_1, \dots, x_n) = (f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_m(x_1, \dots, x_n)), \quad \forall i, f_i : D \rightarrow \mathbb{R}.$$

אם  $m = 1$  נקרא ל  $f$  פונקציה סקלרית ואם  $m > 1$  נקרא לה פונקציה וקטורית. בדומה למקרה החד-ממדי, נקרא לתחום הגדול ביותר בו מוגדרת הפונקציה תחום ההגדרה של הפונקציה, ואת התמונה של הפונקציה נסמן:

$$\text{Im}(f) = \{f(x_1, \dots, x_n) | (x_1, \dots, x_n) \in D\} \subseteq \mathbb{R}^m.$$

גרף של פונקציה היא הקבוצה הבאה:

$$\Gamma_f = \{(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m) | (y_1, \dots, y_m) = f(x_1, \dots, x_n)\} \subseteq \mathbb{R}^{n+m}$$

שזו קבוצה שקצת קשה לצייר עבור ממדים גבוהים, אז נחפש דרך אחרת להציג פונקציה. תהא  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  פונקציה סקלרית, לכל  $c \in \mathbb{R}$  הקבוצה הבאה:

$$f^{-1}(c) := \{(x_1, \dots, x_n) | f(x_1, \dots, x_n) = c\} \subseteq D$$

נקראת קו הגובה במקרה בו  $n = 2$ , ואז זו קבוצה ב  $\mathbb{R}^2$ , או משטח רמה אם  $n = 3$ , ואז זו קבוצה ב  $\mathbb{R}^3$ .

## 4.9 תרגיל

מצאו וציירו את תחום ההגדרה של הפונקציות הבאות, בדקו האם תחומים אילו פתוחים, סגורים וחסומים.

1.

$$f(x, y) = \sqrt{(x^2 + y^2 - 16)(x^2 + y^2 - 9)}$$

2.

$$g(x, y) = \arcsin(2x - y)$$

3.

$$h(x, y) = \ln(x^2 - y^2 - 4)$$

4.

$$s(x, y) = \sqrt{y|\ln(x)|}$$

## פתרון:

- נשים לב שעל מנת ש  $f$  תהיה מוגדרת, הביטוי תחת השורש צריך להיות חיובי, ביטוי זה חיובי אם מתקיימת אחת מ-2 האפשרויות הבאות:

(א)  $(x^2 + y^2 - 16) \geq 0$  וגם  $(x^2 + y^2 - 9) \geq 0$ , כלומר:

$$x^2 + y^2 \geq 16 \text{ וגם } x^2 + y^2 \geq 9 \implies x^2 + y^2 \geq 16$$

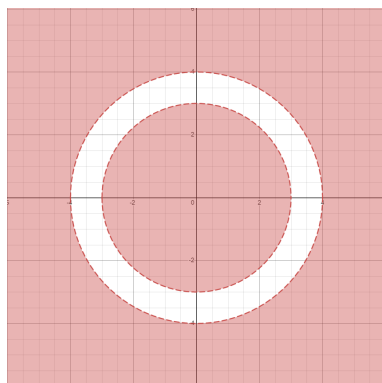
(ב)  $(x^2 + y^2 - 16) \leq 0$  וגם  $(x^2 + y^2 - 9) \leq 0$ , כלומר:

$$x^2 + y^2 \leq 16 \text{ וגם } x^2 + y^2 \leq 9 \implies x^2 + y^2 \leq 9$$

כלומר, תחום הגדרת  $f$  הוא:

$$x^2 + y^2 \geq 16 \text{ או } x^2 + y^2 \leq 9$$

אם נשרטט את התחום הזה נקבל:



נשים לב כי שפת התחום הינה:

$$x^2 + y^2 = 16 \text{ או } x^2 + y^2 = 9$$

שמוכלת בקבוצה, כלומר תחום ההגדרה הינו סגור. הנקודה  $(4, 0)$  איננה נקודת פנים, ולכן הקבוצה לא פתוחה וברור כי הקבוצה אינה חסומה.

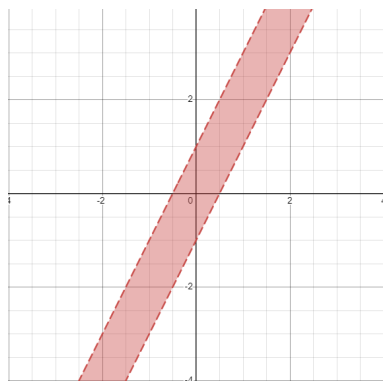
2.  $\arcsin(t)$  מוגדר רק עבור  $-1 \leq t \leq 1$ , כלומר תחום ההגדרה שלנו הוא:

$$-1 \leq 2x - y \leq 1 \iff -1 \leq 2x - y \text{ וגם } 2x - y \leq 1$$

כלומר:

$$y \leq 2x + 1 \text{ וגם } y \geq 2x - 1$$

זוהו התחום הבא:



נשים לב כי שפת התחום הינה:

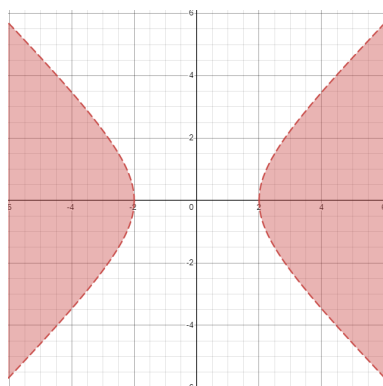
$$-1 = 2x - y \text{ או } 2x - y = 1$$

שמוכלת בקבוצה, כלומר תחום ההגדרה הוא סגור ולא פתוח, וברור שהקבוצה אינה חסומה.

3. תחום ההגדרה של  $\ln(t)$  הוא  $t > 0$  ולכן תחום ההגדרה הינו:

$$x^2 - y^2 - 4 > 0 \Rightarrow x^2 - y^2 > 4$$

שזהו התחום הבא:



הוא לא מכיל את השפה שלו, ולכן הוא פתוח אך לא סגור, וברור שהוא איננו חסום.

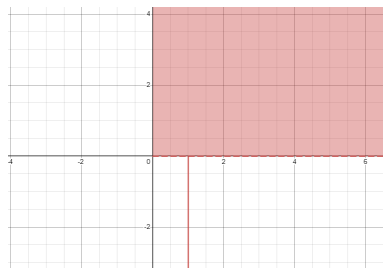
4. תחום ההגדרה של  $s$  הוא:

$$x > 0 \text{ וגם } y|\ln(x)| \geq 0$$

שהוא:

$$x > 0 \text{ וגם } (y \geq 0 \text{ או } x = 1)$$

שהוא:



הוא איננו חסום,  $(0, 3)$  נקודת שפה שאיננה בתחום, ולכן אינו סגור, אבל גם  $(3, 0)$  לא נקודת פנים, ולכן הקבוצה גם לא פתוחה.

#### תרגיל 4.10

מצאו פונקציה  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  כך שהמשח רמה  $\{\vec{x} \in \mathbb{R}^n | f(\vec{x}) = 3\}$  הוא ישר ב- $\mathbb{R}^2$  העובר בין הנקודות  $(0, 1)$  ו- $(1, 2026)$ .

#### פתרון:

ראשית נמצא את משוואת הישר העובר בין הנקודות  $(0, 1)$  ו- $(1, 2026)$ , נזכר כי משוואה היא:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 2026 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} t \\ 1 + 2025t \end{pmatrix}$$

כלומר:

$$y = 1 + 2025x \iff 2025x - y + 1 = 0$$

נחפש פונקציה  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  כך ש  $f(x, y) = 3$  אמ"מ  $2025x - y + 1 = 0$ , בפרט הפונקציה הבאה מתאימה:

$$f(x, y) = 2025x - y + 1 + 3 = 2025x - y + 4$$

ובאמת,

$$\{(x, y) | f(x, y) = 3\} = \{(x, y) | 2025x - y + 4 = 3\} = \{(x, y) | 2025x - y + 1 = 0\}$$

#### תרגיל 4.11

יהיו 2 ספרות זרות ב- $\mathbb{R}^3$ :

$$S_1 = \{(x, y, z) | x^2 + y^2 + z^2 = 3\}, \quad S_2 = \{(x, y, z) | (x-5)^2 + (y-1)^2 + (z-10)^2 = 9\}$$

מצאו פונקציה  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  כך שהמשטח רמה  $\{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 | f(\vec{x}) = 0\}$  הוא בדיוק הקבוצה  $S_1 \cup S_2$ .

**פתרון:**

נרצה למצוא פונקציה  $f$  כך ש  $f(x, y, z) = 0$  אם  $x^2 + y^2 + z^2 = 3$  או  $(x-5)^2 + (y-1)^2 + (z-10)^2 = 9$ ,  
נזכר בתכונה השימושית מאוד של כפל:

$$a \cdot b = 0 \iff a = 0 \text{ או } b = 0$$

אז הפונקציה הבאה מתאימה:

$$f(x, y, z) = (x^2 + y^2 + z^2 - 3) \cdot ((x-5)^2 + (y-1)^2 + (z-10)^2 - 9)$$

ובאמת,

$$\begin{aligned} f(x, y, z) = 0 &\iff (x^2 + y^2 + z^2 - 3) \cdot ((x-5)^2 + (y-1)^2 + (z-10)^2 - 9) = 0 \\ &\iff (x^2 + y^2 + z^2 - 3) = 0 \text{ או } ((x-5)^2 + (y-1)^2 + (z-10)^2 - 9) = 0 \\ &\iff (x, y, z) \in S_1 \text{ או } (x, y, z) \in S_2 \\ &\iff (x, y, z) \in S_1 \cup S_2 \end{aligned}$$

## 4.4 | משטחים ריבועיים

תזכורת – (משטחים ריבועיים ב- $\mathbb{R}^2$ )

נזכר במשוואות ריבועיות במישור  $\mathbb{R}^2$ , כלומר משוואת מהצורה:

$$ax^2 + by^2 + cxy + dx + ey = f$$

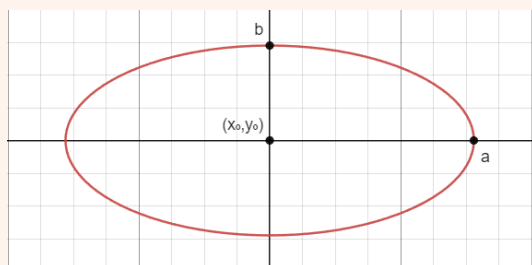
אז 4 משפחות ידועות של משוואות אילו הן:

1. מעגל סביב  $(x_0, y_0)$  ברדיוס  $\mathbb{R}^2$  מתואר על ידי המשוואה:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$$

2. אליפסה סביב  $(x_0, y_0)$  עם "רדיס"  $a$  בכיוון ציר ה- $x$  ו- $b$  בכיוון ציר ה- $y$  מתואר על ידי:

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1$$

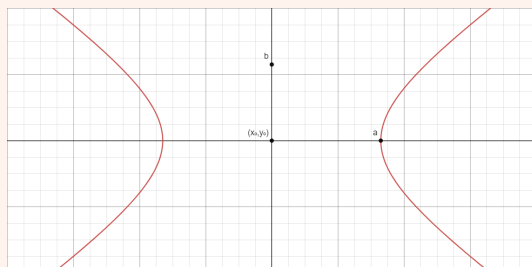


3. פרבולה עם ממורכזת ב  $(x_0, y_0)$  ומשתנה  $c$ :

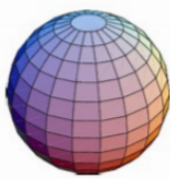
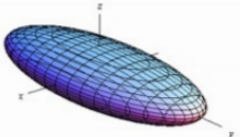
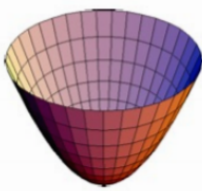
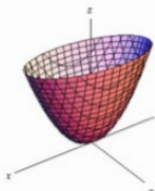
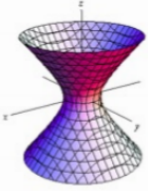
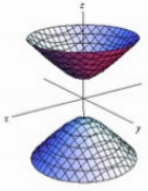
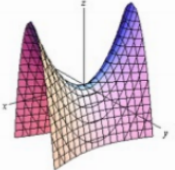
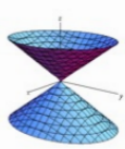
$$y - y_0 = c(x - x_0)^2$$

4. היפרבולה סביב  $(x_0, y_0)$ , עם ציר  $a$ , ופה קצת קשה להסביר את התפקיד של  $b$ , אבל הוא מהווה מדד לכמה ההיפרבולה "מעוכה":

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} - \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1$$



אותו משחק נוכל לעשות ב- $\mathbb{R}^3$ , ולקבל מספר משפחות:

| ספירה                                                                               | אליפסואיד                                                                          | פרבולואיד                                                                         | פרבולואיד אליפטי                                                                  |
|-------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------|
|  |  |  |  |
| $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$                                                             | $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$                          | $x^2 + y^2 = cz$<br>$c > 0$                                                       | $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z}{c}$<br>$c > 0$                      |
| היפרבולואיד חד-יריעתי                                                               | היפרבולואיד דו-יריעתי                                                              | פרבולואיד היפרבולי                                                                | חרוט                                                                              |
|  |   |  |  |
| $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$                           | $\frac{z^2}{c^2} - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$                          | $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = \frac{z}{c}$<br>$c > 0$                      | $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2}$                             |

#### תרגיל 4.12

ציירו את קווי הגובה של "פרבולואיד הפרבולי":

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = \frac{z}{c}, c > 0$$

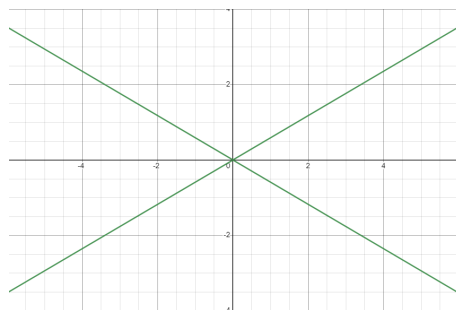
#### פתרון:

נרצה לקבוע את  $z$ , ולקבל קבוצה ב- $\mathbb{R}^2$ , נחלק ל 3 מקרים:

1. אם  $z = 0$ , נקבל את המשוואה:

$$\frac{x^2}{a^2} = \frac{y^2}{b^2} \Rightarrow y = \pm \sqrt{\frac{x^2 b^2}{a^2}} \Rightarrow y = \pm x \left| \frac{a}{b} \right|$$

כלומר זוג ישרים:



2. עבור  $z > 0$ , נקבל:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = \frac{z}{c} \Rightarrow \frac{x^2}{a^2 \frac{z}{c}} - \frac{y^2}{b^2 \frac{z}{c}} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{\left(a\sqrt{\frac{z}{c}}\right)^2} - \frac{y^2}{\left(b\sqrt{\frac{z}{c}}\right)^2} = 1$$

שזה פשוט היפרבולה עם המשתנים:

$$\tilde{a} = a\sqrt{\frac{z}{c}}, \tilde{b} = b\sqrt{\frac{z}{c}},$$

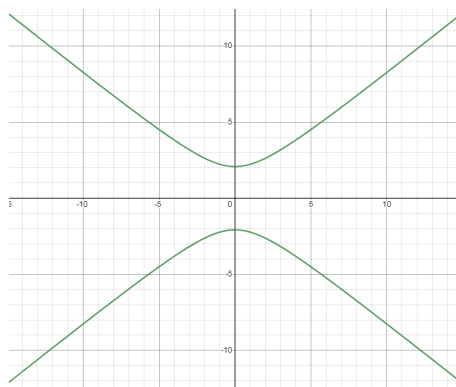
3. אם  $z < 0$ , נוכל לעשות כמעט אותו דבר, חוץ מלהכניס את  $\frac{z}{c}$  לשורש, אז נוכל לעשות את הטריק הבא:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = \frac{z}{c} \Rightarrow \frac{x^2}{a^2 \frac{(-z)}{c}} - \frac{y^2}{b^2 \frac{(-z)}{c}} = -1 \Rightarrow \frac{x^2}{\left(a\sqrt{\frac{(-z)}{c}}\right)^2} - \frac{y^2}{\left(b\sqrt{\frac{(-z)}{c}}\right)^2} = -1$$

כלומר:

$$\frac{y^2}{\left(b\sqrt{\frac{(-z)}{c}}\right)^2} - \frac{x^2}{\left(a\sqrt{\frac{(-z)}{c}}\right)^2} = 1$$

שזאת היפרבולה "הפוכה", כלומר כאשר הפכנו את התפקידים של  $x, y$  - והיא תראה כך:



## 4.5 | טורי טיילור - תרגול עצמי

## תזכורת – (טורי טיילור)

בחדו"א 1 ראינו כי הפולינום מסדר  $k$  שמקרב בצורה הטובה ביותר פונקציה  $f : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  הגזירה  $\infty$  פעמים בסביבה של  $x_0 \in \mathbb{R}$  הוא פולינום טיילור:

$$T_k(x) = \sum_{n=0}^k \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n$$

והגדרנו את טור טיילור להיות הפונקציה הגבולית:

$$T(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} T_k(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n$$

נשאלת השאלה מתי  $f(x) = T(x)$ , ואכן ראינו את משפט השארית:

$$R_n(x) := f(x) - T_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1}$$

עבור  $c$  נקודה בין  $x$  ו- $x_0$ . בשפה של חדו"א 2, סדרת הפונקציות  $T_n(x)$  מתכנסת נקודתית ל- $f(x)$  אם ורק אם  $R_n(x)$  מתכנסת נקודתית לפונקציית האפס. עוד פרט חשוב שלמדנו הוא יחידות מקדמי טיילור, כלומר שאם:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$$

אז בהכרח:

$$a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$$

## תזכורת

מספר טורים מוכרים:

$$\cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}$$

$$\sin(x) = -\frac{\partial}{\partial x} (\cos(x)) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} (2n)}{(2n)!} x^{2n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}$$

$$e^x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

לשלושת הטורים הללו רדיוס התכנסות  $R = \infty$ .

## תרגיל 4.13

חשבו את טור טיילור של:

$$f(x) = \sin^2(x)$$

**פתרון:**

נשתמש בזהות הטריגונומטרית:

$$\sin^2(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos(2x)$$

אז אפשר פשוט להציב בטור טיילור של  $\cos(x)$ :

$$\begin{aligned} \sin^2(x) &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \left( \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} (2x)^{2n} \right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \left( 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} (2x)^{2n} \right) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n)!} (2x)^{2n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n)!} 2^{2n-1} x^{2n} \end{aligned}$$

## תרגיל 4.14

תהא  $f(x)$  פונקציה עם טור חזקות סביב  $x_0 = 0$ , הוכיחו כי אם  $f$  זוגית, אז כל מקדמי טיילור האי-זוגיים מתאפסים, ואם  $f$  אי-זוגית אז המקדמים הזוגיים מתאפסים. הסיקו כי, לפחות עבור פונקציה עם טור חזקות, נגזרת של פונקציה זוגית היא אי-זוגית, ונגזרת של פונקציה אי-זוגית היא זוגית.

**פתרון:**ראשית נראה עבור  $f$  זוגית, נניח כי  $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ , ב  $I$ , אז היות ש- $f$  זוגית מתקיים:

$$f(x) - f(-x) = 0$$

אבל נשים לב כי:

$$f(-x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (-x)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n x^n$$

כלומר:

$$0 = f(x) - f(-x) = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n - (-1)^n a_n) x^n = \sum_{n=0}^{\infty} 2a_{2n+1} x^{2n+1} = 2a_1 x + 2a_3 x^3 + 2a_5 x^5 + 2a_7 x^7 + \dots$$

אבל, כמובן ש- $g(x) = 0$  היא פונקציה עם טור החזקות  $c_n = 0$ , אז מיחידות מקדמי טיילור אנו מקבלים:

$$\forall n \in \mathbb{N}, 2a_{2n+1} = c_{2n+1} = 0 \implies a_{2n+1} = 0$$

נעשה דבר דומה עבור  $f$  אי-זוגית, כאשר מתקיים:

$$f(x) + f(-x) = 0$$

כלומר:

$$0 = f(x) + f(-x) = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n + (-1)^n a_n) x^n = \sum_{n=0}^{\infty} 2a_{2n} x^{2n}$$

אז שוב, מיחידות מקדמי טיילור של  $g(x) = 0$  נקבל:

$$\forall n \in \mathbb{N}, a_{2n} = 0$$

נשים לב כי אם  $f$  זוגית בעלת טור חזקות, אז:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{2n} x^{2n} \Rightarrow f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (2n) a_{2n} x^{2n-1}$$

היא אי-זוגית (על פי הסיווג שהרגע הוכחנו), וכמובן שההוכחה עבור  $f$  אי-זוגית זהה לגמרי.

## תרגיל 4.15

הוכיחו את נוסחת אוילר:

$$e^{ix} = \cos(x) + i \sin(x)$$

כאשר  $i^2 = (-1)$ .

## פתרון:

נציב בטורים הידועים:

$$\begin{aligned} e^{ix} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ix)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ix)^{2n}}{(2n)!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ix)^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^{2n} x^{2n}}{(2n)!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^{2n+1} x^{2n+1}}{(2n+1)!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(i^2)^n x^{2n}}{(2n)!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i (i^2)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(i^2)^n x^{2n}}{(2n)!} + i \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(i^2)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} + i \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} = \cos(x) + i \sin(x) \end{aligned}$$

## הערה

מספרים מרוכבים לא בחומר הקורס, אבל זאת מסקנה מאוד חזקה שאפשר להסיק מכלים שפיתחנו בקורס.

## תרגיל 4.16

מצאו טור מספרים המתכנס ל:

$$\int_0^1 e^{-x^4} dx$$

עובדה מעניינת היא כי ל  $e^{-x^4}$  לא קיימת פונקציה קדומה פשוטה, ולכן זה אינטגרל שקשה לחשב.

### פתרון:

אנו יודעים כי הטור טיילור של  $e^x$  הוא  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ , וטור זה בעל רדיוס התכנסות  $\infty$ , בפרט גם עבור  $e^{-x^4}$ :

$$e^{-x^4} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-x^4)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{4n}}{n!}$$

ולכן:

$$\begin{aligned} \int_0^1 e^{-x^4} dx &= \int_0^1 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{4n}}{n!} dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^1 \frac{(-1)^n}{n!} x^{4n} dx \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \int_0^1 x^{4n} dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!(4n+1)} \end{aligned}$$

---

## תרגול חמישי

---

### 5.1 | גבולות ורציפות

#### תזכורת – גבול של פונקציה ב $\mathbb{R}^n$

תהא  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ , כאשר  $D \subseteq \mathbb{R}^n$  מכילה סביבה של נקודה  $\vec{x}_0$ , (ולא בהכרח  $\vec{x}_0 \in D$ ), נסמן:

$$\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{x}_0} f(\vec{x}) = L$$

אם:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, 0 < d(\vec{x}, \vec{x}_0) < \delta \implies |f(\vec{x}) - L| < \varepsilon$$

#### הערה

בפרט, אם  $n = 2$  ו  $\vec{x}_0 = (a, b)$  אז:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x,y) = L$$

אם:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, 0 < \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} < \delta \implies |f(x,y) - L| < \varepsilon$$

אם  $\vec{x}_0 \in D$  וגם  $\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{x}_0} f(\vec{x}) = f(\vec{x}_0)$  אז נאמר כי  $f$  רציפה בנקודה  $\vec{x}_0$ .

## תזכורת – (אריתמטיקה של גבולות)

יהיו  $f, g : D \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  פונקציות כך ש:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x,y) = L, \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} g(x,y) = M$$

אז:

1.

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x,y) + g(x,y) = L + M$$

2.

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x,y) \cdot g(x,y) = L \cdot M$$

3.

$$\forall c \in \mathbb{R}, \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} c \cdot f(x,y) = c \cdot L$$

4. אם  $M \neq 0$ , אז:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} \frac{f(x,y)}{g(x,y)} = \frac{L}{M}$$

## תזכורת – (משפט היינה)

תהא  $f(x,y)$  פונקציה סקלרית המוגדרת בסביבה של  $(a,b)$ , אז  $\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x,y) = L$  אם ורק אם לכל סדרה  $\{(x_n, y_n)\}_{n=1}^{\infty}$  כך ש  $(x_n, y_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} (a,b)$  מתקיים:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n, y_n) = L$$

## תזכורת

יהיו  $\gamma_1, \gamma_2 : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$  מסילות רציפות כך ש  $\gamma_1(0) = \gamma_2(0) = \vec{x}_0$  אם:

$$\lim_{t \rightarrow 0} f(\gamma_1(t)) \neq \lim_{t \rightarrow 0} f(\gamma_2(t))$$

אז הגבול  $\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{x}_0} f(\vec{x})$  לא קיים.

## תרגיל 5.1

הראו כי לא קיים הגבול:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$$

**פתרון:**

נתבונן במסילות  $\gamma_1(t) = (t, 0)$ ,  $\gamma_2(t) = (t, 2t)$ . נשים לב כי המסילות רציפות, ומתקיים  $\gamma_1(0) = \gamma_2(0) = (0, 0)$ . נחשב את הגבול לאורך המסילה  $\gamma_1$ :

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} \stackrel{?}{=} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t^2 - 0}{t^2 + 0} = \lim_{t \rightarrow 0} 1 = 1$$

נעת נביט במסילה  $\gamma_2$ :

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} \stackrel{?}{=} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t^2 - (2t)^2}{t^2 + (2t)^2} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t^2 - 4t^2}{t^2 + 4t^2} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{-3}{5} = -\frac{3}{5}$$

משום שקיבלנו גבול שונה לאורך שתי מסילות שונות, נוכל להסיק כי הגבול לא קיים.

**תרגיל 5.2.**

הוכיחו כי הפונקציה:

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{y \sin x}{\sqrt{y \sin x + 1} - 1} & y \sin x + 1 \geq 0 \\ 2 & \text{אחרת} \end{cases}$$

רציפה ב  $(0, 1)$ .

כאשר ניתן להניח ללא בדיקה כי  $\frac{y \sin x}{\sqrt{y \sin x + 1} - 1}$  מוגדרת בסביבה מנוקבת של  $(0, 1)$ .

**פתרון:**

כדאי להוכיח רציפות, נדרש לבדוק כי:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,1)} f(x, y) = f(0, 1)$$

כלומר:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,1)} \frac{y \sin x}{\sqrt{y \sin x + 1} - 1} = 2$$

נבצע החלפת משתנים, נשים לב כי אם נסמן  $t = y \sin(x)$ :

$$\frac{y \sin x}{\sqrt{y \sin x + 1} - 1} = \frac{t}{\sqrt{t + 1} - 1}$$

נשים לב כי מתקיים  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,1)} y \sin(x) = 0$ , כלומר הגבול שאנו מחפשים הינו:

$$\begin{aligned}
 \lim_{(x,y) \rightarrow (0,1)} \frac{y \sin x}{\sqrt{y \sin x + 1} - 1} &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t}{\sqrt{t+1} - 1} \\
 &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t(\sqrt{t+1} + 1)}{(\sqrt{t+1} - 1)(\sqrt{t+1} + 1)} \\
 &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t(\sqrt{t+1} + 1)}{t} = 2
 \end{aligned}$$

ולכן  $f$  רציפה ב $(0, 1)$ .

### הערה

פורמלית מה שקורה פה הוא שאנו יודעים כי:

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{t}{\sqrt{t+1} - 1} = 2$$

כלומר, הפונקציה  $g(t) = \begin{cases} \frac{t}{\sqrt{t+1}-1} & t \neq 0 \\ 2 & t = 0 \end{cases}$  רציפה ב  $t = 0$ . וכי  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,1)} y \sin x = 0$ , ועל כן:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,1)} g(y \sin x) = g(0) = 2$$

### תרגיל 5.3.

תהא הפונקציה:

$$f(x, y) = \begin{cases} (x-y)^2 \sin\left(\frac{1}{x-y}\right) & x \neq y \\ 0 & x = y \end{cases}$$

הוכיחו כי  $f$  רציפה ב $(0, 0)$ .

### פתרון:

נפתור את התרגיל בדרכים, ראשית לפי הגדרת הגבול.

1. נשים לב שאם  $\sqrt{x^2 + y^2} < \delta$  עבור  $\delta > 0$ , אז  $|x| < \delta$  וגם  $|y| < \delta$  (תרגיל - הוכיחו זאת!), כלומר:

$$d\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right) < \delta \implies |x| < \delta, |y| < \delta$$

אבל אם  $|x| < \delta$  וגם  $|y| < \delta$ , אז  $|x - y| \leq |x| + |y| < 2\delta$ , בפרט:

$$|f(x, y)| = \left| (x-y)^2 \sin\left(\frac{1}{x-y}\right) \right| \leq |x-y|^2 < 4\delta^2$$

יהא  $\varepsilon > 0$ , נבחר  $\delta = \frac{\sqrt{\varepsilon}}{2}$ , אז מתקיים:

$$|f(x, y)| < \delta \Rightarrow |f(x, y)| < 4\delta^2 = \varepsilon$$

ולכן  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = 0$ , כלומר  $f$  רציפה ב $(0, 0)$ .

2. נגדיר את הפונקציות  $h(x, y) = x - y$ ,  $g(t) = \begin{cases} t^2 \sin(\frac{1}{t}) & t \neq 0 \\ 0 & t = 0 \end{cases}$ , נשים לב שמתקיים כי

$f(x, y) = g(h(x, y))$ . נשים לב כי  $g, h$  רציפות בכל תחום הגדרתן,  $h(x, y)$  רציפה כחיסור של רציפות, ו $g(t)$  רציפה בכל  $t \neq 0$  כהרכבה של רציפות, וב $t = 0$  מתקיים:

$$\lim_{t \rightarrow 0} g(t) = \lim_{t \rightarrow 0} t^2 \sin\left(\frac{1}{t}\right) = 0 = f(0)$$

בפרט,  $f$  רציפה כהרכבה של פונקציות רציפות.

#### תזכורת – (כלל הסנדוויץ')

יהיו  $f, g, h : D \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  פונקציות סקלריות המוגדרות בסביבה של  $(a, b)$ , כך שלכל  $(x, y)$  בסביבה זו מתקיים:

$$f(x, y) \leq g(x, y) \leq h(x, y)$$

ומתקיים:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x, y) = \lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} h(x, y) = L$$

אז:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} g(x, y) = L$$

#### תרגיל 5.4

נגדיר  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  ע"י:

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{y \sin(x) + 3xy}{\sin(y)x} & \mathbb{R}^2 \setminus \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \sin(y)x = 0\} \\ \alpha & \text{אחרת} \end{cases}$$

עבור  $\alpha \in \mathbb{R}$ , מצאו  $\alpha$  כך ש  $f(x, y)$  תהיה רציפה ב $(0, 0)$ .

**פתרון:**

על מנת לקבל מועמד לגבול עבור  $\alpha$ , נציב מסילה אחת, למשל  $(t, t)$ , ונראה מה הגבול עליה:

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t \sin(t) + 3t^2}{\sin(t)t} &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin(t) + 3t}{\sin(t)} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \left( 1 + 3 \frac{t}{\sin(t)} \right) = 4 \end{aligned}$$

לכן ניתן לראות כי 4 הוא המועמד שלנו להיות הגבול. נעזר בכלל הסנדוויץ' על מנת להוכיח שהוא אכן הגבול של הפונקציה הדו-ממדית:

$$\begin{aligned} 0 \leq |f(x, y) - 4| &\leq \left| \frac{y \sin(x) + 3xy}{\sin(y)x} - 4 \right| = \left| \frac{y \sin(x)}{\sin(y)x} - 1 + \frac{3xy}{\sin(y)x} - 3 \right| \\ &\leq \left| \frac{y \sin(x)}{\sin(y)x} - 1 \right| + \left| \frac{3xy}{\sin(y)x} - 3 \right| = \left| \frac{y}{\sin(y)} \cdot \frac{\sin(x)}{x} - 1 \right| + 3 \left| \frac{y}{\sin(y)} - 1 \right| \rightarrow 0 \end{aligned}$$

כאשר השתמשנו באריתמטיקה של גבולות, ולכן עפ"י כלל הסנדוויץ':

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = 4$$

כלומר, עבור  $\alpha = 4$ , הפונקציה רציפה ב  $(0, 0)$ .

### תרגיל 5.5.

$$\text{נגדיר } s: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \text{ על ידי } s(x) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \\ 0 & x \notin \mathbb{Q} \end{cases} \text{ ונגדיר } f(x, y) = y \cdot s(x).$$

$$1. \text{ הוכיחו כי } \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} = 0$$

$$2. \text{ הוכיחו כי } \lim_{(x,y) \rightarrow (1,1)} \text{ לא קיים.}$$

### פתרון:

1. נשתמש בכלל הסנדוויץ':

$$0 \leq |f(x, y)| \leq |y| \xrightarrow{(x,y) \rightarrow (0,0)} 0$$

וסיימנו.

2. נשתמש בכלל היינה להפריך את הגבול, ניקח את הסדרה:

$$(a_n)_{n=1}^{\infty}, \quad a_n = \left(1 - \frac{\pi}{n}\right), \quad \lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} 1 \cdot s\left(1 - \frac{\pi}{n}\right) = 0$$

$$(b_n)_{n=1}^{\infty}, \quad b_n = \left(1 - \frac{1}{n}\right), \quad \lim_{n \rightarrow \infty} f(b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} 1 \cdot s\left(1 - \frac{1}{n}\right) = 1$$

ולכן הגבול לא קיים.

## תרגיל 5.6.

בדקו האם הפונקציות הבאות רציפות בתחום הגדרתן:

$$1. f(x, y) = \begin{cases} \frac{x+y}{x^2-y} & x^2 \neq y \\ 5 & \text{אחרת} \end{cases}$$

$$2. f(x, y) = \begin{cases} (x^2 + y^2) \cdot \sin \frac{1}{x^2 + y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

$$3. f(x, y) = \begin{cases} \frac{x}{3x+5y} & (x, y) \neq (x, -\frac{3}{5}x) \\ \frac{1}{3} & (x, y) = (x, -\frac{3}{5}x) \end{cases}$$

## פתרון:

1. בכל נקודה שאינה בפרבולה  $y = x^2$  הפונקציה מוגדרת כאלמנטרית ולכן רציפה בתחום הגדרתה. יהא  $a \in \mathbb{R}$ , נבדוק את הרציפות בנקודה  $(a, a^2)$ . נתבונן במסילה  $\gamma(t) = (a, a^2 + t)$  עבור  $t \rightarrow 0$ , אז:

$$\lim_{t \rightarrow 0} f(\gamma(t)) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{a + a^2 + t}{a^2 - (a^2 + t)} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{a + a^2 + t}{-t} = -\frac{1}{t} \cdot (a + a^2) - 1$$

ישר נקבל כי עבור  $a \neq 0, -1$  הגבול לא קיים, בפרט שם הפונקציה לא רציפה. במקרה בו  $a = 0, -1$ , נשים לב כי  $f(-1, 1) = f(0, 0) = -1 \neq 5 = f(0, 0)$ , כלומר הפונקציה גם לא רציפה בנקודות אלו.

2. בכל נקודה שאינה הראשית הפונקציה רציפה כהרכבה של אלמנטריות. נחשב את הגבול הבא  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} (x^2 + y^2) \cdot \sin \frac{1}{x^2 + y^2}$  מתקיים:

$$0 \leq \left| (x^2 + y^2) \sin \left( \frac{1}{x^2 + y^2} \right) \right| \leq |x^2 + y^2| \xrightarrow{(x,y) \rightarrow (0,0)} 0$$

אז מכלל הסנדויץ' נקבל כי הגבול קיים ושווה לאפס, בפרט הפונקציה רציפה.

3. בכל נקודה שאינה על הישר  $y = -\frac{3}{5}x$  הפונקציה רציפה כהרכבה של אלמנטריות. נבדוק עבור נקודות מהצורה  $(a, -\frac{3}{5}a)$ . נגדיר את המסילה  $\gamma(t) = (a, -\frac{3}{5}a + t)$ , כאשר  $t \rightarrow 0$ , אז:

$$\lim_{t \rightarrow 0} f(\gamma(t)) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{a}{3a + 5(-\frac{3}{5}a + t)} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{a}{3a - 3a + 5t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{a}{5t}$$

כאשר  $a \neq 0$  הגבול לא קיים, ולכן הפונקציה לא רציפה בנקודה  $(a, -\frac{3}{5}a)$ . כאשר  $a = 0$ , נשים לב כי  $f(0, 0) = \frac{1}{3} \neq 0 = \lim_{t \rightarrow 0} f(\gamma(t))$ , ולכן גם שם הפונקציה אינה רציפה.

## תרגיל 5.7.

$$\text{תהא } f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^5 y^{12}}{x^{10} + y^{18}} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

הוכיחו כי  $f$  רציפה ב  $(0, 0)$ .

**פתרון:**  
נשתמש בזהות:

$$\forall a, b, \quad 0 \leq (a - b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab \implies 2ab \leq a^2 + b^2$$

בפרט,

$$|f(x, y)| = \left| \frac{x^5 y^{12}}{x^{10} + y^{18}} \right| = \left| \frac{x^5 y^{12}}{(x^5)^2 + (y^9)^2} \right| \leq \left| \frac{x^5 y^{12}}{2x^5 y^9} \right| = \frac{1}{2} |y^3| \xrightarrow{(x, y) \rightarrow (0, 0)} 0$$

כאשר באי-שוויון השתמשנו גם בכך ש  $x^{10} + y^{18} \geq 0$ .  
קיבלנו כי הפונקציה  $f(x, y)$  רציפה ב  $(0, 0)$ .

## 5.2 | מעבר לקואורדינטות פולאריות בחישוב גבולות

## תזכורת

אם  $f(x, y)$  פונקציה, ואנו רוצים לחשב את הגבול שלה ב  $(0, 0)$ , אז לפעמים נוכל לעבור לקואורדינטות פולאריות:

$$\begin{aligned} x &= r \cos(\theta) \\ y &= r \sin(\theta) \end{aligned} \iff \begin{aligned} r &= \sqrt{x^2 + y^2} \\ \theta &= \arccos\left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right) = \arcsin\left(\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right) \end{aligned}$$

במקרה כזה, אם קיימות פונקציות  $g, h$  כך ש:

$$|f(x, y)| = |f(r \cos(\theta), r \sin(\theta))| \leq |g(r)| |h(r, \theta)|$$

ומתקיים:

$$1. \quad \lim_{r \rightarrow 0} g(r) = 0$$

2. עבור  $r$  חסומה, הפונקציה  $h(r, \theta)$  חסומה.

$$\text{אז } \lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} f(x, y) = 0$$

## הערה

מההגדרה נראה כי מעבר לקואורדינטות פולאריות עוזר לנו רק בגבולות מהצורה  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) = 0$  אבל כמובן ש:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} g(x,y) = L \iff \lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} g(x,y) - L = 0 \iff \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} g(x+a, y+b) - L = 0$$

אז זאת לא באמת הגבלה לבדיקת גבולות כללים.

## תרגיל 5.8

חשבו את הגבול הבא:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{3xy^2 - 5y^4}{x^2 + 2y^2}$$

## פתרון:

נעבור לקואורדינטות פולאריות:

$$\begin{aligned} \frac{3xy^2 - 5y^4}{x^2 + 2y^2} &= \frac{3r^3 \cos(\theta) \sin^2(\theta) - 5r^4 \sin^4(\theta)}{r^2 \cos^2(\theta) + 2r^2 \sin^2(\theta)} \\ &= \frac{r^3 (3 \cos(\theta) \sin^2(\theta) - 5r \sin^4(\theta))}{r^2 (1 + \sin^2(\theta))} = r \frac{3 \cos(\theta) \sin^2(\theta) - 5r \sin^4(\theta)}{1 + \sin^2 \theta} \end{aligned}$$

נשים לב כי:

$$\left| \frac{3 \cos(\theta) \sin^2(\theta) - 5r \sin^4(\theta)}{1 + \sin^2 \theta} \right| \leq \left| \frac{3 \cos(\theta) \sin^2(\theta) - 5r \sin^4(\theta)}{1} \right| \leq |3 + 5r|$$

וכמובן כי  $\lim_{r \rightarrow 0} |r| = 0$  אז:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{3xy^2 - 5y^4}{x^2 + 2y^2} = 0$$

## תרגיל 5.9

הוכיחו או הפריכו, אם לכל  $\theta_0 \in (0, 2\pi]$  מתקיים:

$$\lim_{r \rightarrow 0} f(r \cos(\theta_0), r \sin(\theta_0)) = 0$$

אז מתקיים:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) = 0$$

**פתרון:**

נפריך עם הפונקציה  $f(x, y) = \frac{xy^3}{x^2 + y^6}$  והגבול:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy^3}{x^2 + y^6}$$

ננסה לעבור לקואורדינטות פולאריות:

$$\frac{xy^3}{x^2 + y^6} = \frac{r^4 \cos(\theta_0) \sin^3(\theta_0)}{r^2 \cos^2(\theta_0) + r^6 \sin^6(\theta_0)} = r^2 \frac{\cos(\theta_0) \sin^3(\theta_0)}{\cos^2(\theta_0) + r^4 \sin^6(\theta_0)}$$

נשים לב כי עבור  $\theta_0$  כך ש  $\cos(\theta_0) = 0$  מתקיים:

$$r^2 \frac{\cos(\theta_0) \sin^3(\theta_0)}{\cos^2(\theta_0) + r^4 \sin^6(\theta_0)} = r^2 \frac{0 \cdot \sin^3(\theta_0)}{r^4 \sin^6(\theta_0)} = 0$$

ועבור  $\theta_0$  כך ש  $\cos(\theta_0) \neq 0$  מתקיים:

$$\left| r^2 \frac{\cos(\theta_0) \sin^3(\theta_0)}{\cos^2(\theta_0) + r^4 \sin^6(\theta_0)} \right| \leq |r^2| \underbrace{\left| \frac{\cos(\theta_0) \sin^3(\theta_0)}{\cos^2(\theta_0)} \right|}_{M(\theta_0)} \xrightarrow{r \rightarrow 0} 0$$

משום שלכל  $\theta_0$  הביטוי  $M(\theta_0)$  קבוע ממשי. כלומר, לכל  $\theta_0$  מתקיים:

$$\lim_{r \rightarrow 0} f(r \cos(\theta_0), r \sin(\theta_0)) = 0$$

אבל, נראה שהגבול  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$  לא קיים, ואכן במסלול  $\gamma_1(t) = (0, t)$ , עבור  $t \rightarrow 0$  נקבל:

$$\lim_{t \rightarrow 0} f(\gamma_1(t)) = \lim_{t \rightarrow 0} 0 = 0$$

אבל עבור  $\gamma_2(t) = (t^3, t)$  עבור  $t \rightarrow 0$  נקבל:

$$\lim_{t \rightarrow 0} f(\gamma_2(t)) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t^6}{t^6 + t^6} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

כלומר הגבול לא קיים.

אז מה קרה פה? הבעיה היא שאם נסמן:

$$f(r \cos(\theta), r \sin(\theta)) = \underbrace{r^2 \frac{\cos(\theta) \sin^3(\theta)}{\cos^2(\theta) + r^4 \sin^6(\theta)}}_{h(r, \theta)}$$

אז  $\lim_{r \rightarrow 0} g(r) = 0$ , מצד שני,  $h(r, \theta)$  חסומה על ידי  $M(\theta)$  לכל זווית  $\theta$ , כלומר לכל זווית  $\theta$  יש לפונקציה  $|h(r, \theta)| \leq M$  כך שלכל זווית  $\theta$  מתקיים  $M \in \mathbb{R}$  לא קיים, כלומר, לא קיים  $M$  כך שלכל זווית  $\theta$  מתקיים  $|h(r, \theta)| \leq M$ .

## 5.3 | נגזרות חלקיות

### תזכורת – (נגזרת חלקית)

תהא  $f : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  פונקציה, נגדיר נגזרות חלקיות:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0, y_0+h) - f(x_0, y_0)}{h}$$

לפעמים גם נסמן  $\frac{\partial f}{\partial x} = f'_x = f_x$ .

### תרגיל 5.10.

עבור הפונקציות הבאות, חשבו את הנגזרות החלקיות:

1.  $f(x, y) = x^2 + xy^2$ .

2.  $f(x, y) = x \ln(xy)$ .

3.  $f(u, v) = u^2v^3$ .

### פתרון:

1. עבור  $f(x, y) = x^2 + xy^2$  מתקיים:

$$f_x(x, y) = 2x + y^2$$

$$f_y(x, y) = 2xy$$

2. עבור  $f(x, y) = x \ln(xy)$ , מתקיים:

$$f_x(x, y) = \ln(xy) + x \frac{1}{xy} \cdot y = \ln(xy) + 1$$

$$f_y(x, y) = x \frac{1}{xy} \cdot x = \frac{x}{y}$$

3. עבור  $f(u, v) = u^2v^3$  מתקיים:

$$f_u(u, v) = 2uv^3$$

$$f_v(u, v) = 3u^2v^2$$

## תרגיל 5.11.

1. תהא  $f(x, y) = \frac{xy^2 - x^2 + y}{y^2}$ . יהא  $y_0 > 0$ , מצאו  $x \in \mathbb{R}$  עבורו נקודות מקסימום מקומית.
2. בדקו האם הגבול  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$  קיים.

## פתרון:

1. נקבע  $y_0 > 0$  ונגדיר  $g(x) = f(x, y_0)$ , נגזור לפי  $x$ :

$$g'(x) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y_0) = \frac{y_0^2 - 2x}{y_0^2}$$

כלומר, לכל  $y_0 > 0$ , הנקודה:

$$\frac{y_0^2 - 2x}{y_0^2} = 0 \implies y_0^2 - 2x = 0 \implies x = \frac{y_0^2}{2}$$

היא נקודת מקסימום מקומית כי  $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y_0) = -\frac{2}{y_0^2} < 0$ , נחשב את ערך הפונקציה בנקודה זאת:

$$g\left(\frac{y_0^2}{2}\right) = f\left(\frac{y_0^2}{2}, y_0\right) = \frac{\left(\frac{y_0^2}{2}\right)y_0^2 - \left(\frac{y_0^2}{2}\right)^2 + y_0}{y_0^2} = \frac{\frac{y_0^4}{2} - \frac{y_0^4}{4} + y_0}{y_0^2} = \frac{\frac{y_0^4}{4} + y_0}{y_0^2} = \frac{y_0^4 + 4y_0}{4y_0^2} = \frac{1}{4}y_0^2 + \frac{1}{y_0}$$

2. מפה, קל לראות כי הגבול  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$  לא קיים כי אם ניקח סדרת נקודות  $y_n = \frac{1}{n}$ , אז  $y_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$  גם  $\left\{\left(\frac{y_n^2}{2}, y_n\right)\right\}_{i \in \mathbb{N}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} (0, 0)$  מקיימת  $\left(\frac{y_n^2}{2}, y_n\right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} (0, 0)$  (מדוע?) אבל מתקיים:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f\left(\frac{y_n^2}{2}, y_n\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{4}y_n^2 + \frac{1}{y_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{4n^2} + n = \infty$$

ולכן  $f(x, y)$  לא רציפה ב  $(0, 0)$ .

## תרגיל 5.12.

האם קיימת  $f(x, y)$  בעלת נגזרות חלקיות רציפות כך שלכל  $x, y$  מתקיים  $f_x(x, y) = 1$ ,  $f_y(x, y) = x$ ?

## פתרון:

נניח בשלילה כי קיימת  $f(x, y)$  כזאת. יהא  $y \in \mathbb{R}$ , נסמן  $g(x) = f(x, y)$ , אז  $g'(x) = 1$ , ולכן:

$$f(x, y) = g(x) = \int_0^x g'(t)dt + \underbrace{g(0)}_{f(0,y)} = \int_0^x 1dt + f(0, y) = x + f(0, y)$$

נסמן  $C(y) = f(0, y)$  קיבלנו כי  $f(x, y) = x + f(0, y) = x + C(y)$ . נגזור את 2 הצדדים לפי  $y$  ונקבל:

$$f_y(x, y) = C'(y)$$

אבל,  $x = f_y(x, y) = C'(y)$ , אבל  $C$  היא פונקציה של  $y$  ולא של  $x$ , אז לא יכול להיות שהנגזרת שלה פונקציה של  $x$ ! קיבלנו סתירה, ולכן לא קיימת  $f$  המקיימת את תנאי השלילה

#### הערה

בהמשך הקורס מאוד תעניין אותנו השאלה הזאת, כלומר בהנתן פונקציות  $P(x, y), Q(x, y)$  האם קיימת פונקציה  $f(x, y)$  המקיימת  $f_x(x, y) = P(x, y), f_y(x, y) = Q(x, y)$ ? בהמשך נפתח כלים כללים ופחות מסורבלים כדאי לענות על השאלה הזאת.

## 5.4 | דיפרנציאביליות

## תזכורת – (דיפרנציאביליות)

נאמר כי  $f : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  גזירה (דיפרנציאבילית) ב  $(x_0, y_0)$  אם קיימים קבועים  $A, B \in \mathbb{R}$  ופונקציות  $\alpha(x, y), \beta(x, y)$  כך שלכל  $x, y$  בסביבה של  $(x_0, y_0)$  מתקיים:

$$f(x, y) = f(x_0, y_0) + A(x - x_0) + B(y - y_0) + \alpha(x, y)(x - x_0) + \beta(x, y)(y - y_0)$$

כאשר:

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)} \alpha(x, y) = \lim_{(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)} \beta(x, y) = 0$$

או, באופן שקול:

$$f(x, y) = f(x_0, y_0) + A(x - x_0) + B(y - y_0) + \varepsilon(x, y)\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$$

כאשר:

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)} \varepsilon(x, y) = 0$$

במקרה זה (ב2 הניסוחים) בהכרח יתקיים:

$$A = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$$

$$B = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$$

כלומר  $f$  דיפרנציאבילית ב  $(x_0, y_0)$  אם ורק אם:

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)} \underbrace{\frac{f(x, y) - (f(x_0, y_0) + f'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0)(y - y_0))}{\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}}}_{\varepsilon(x, y)} = 0$$

ראינו בהרצאה כי:

1. אם  $f(x, y)$  גזירה ב  $(x_0, y_0)$  אז היא רציפה שם.
2. אם  $f'_x, f'_y$  קיימות ורציפות בתחום  $D \subset \mathbb{R}^2$ , אז  $f$  גזירה שם, ונסמן  $f \in C^1(D)$ .
3. ייתכן כי קיימות  $f'_x, f'_y$  ב  $(x_0, y_0)$  אך  $f$  אינה גזירה, ואפילו לא רציפה ב  $(x_0, y_0)$ .

## תרגיל 5.13.

הוכיחו כי הפונקציה  $f(x, y) = x^2 + y^2$  דיפרנציאבילית ב  $(x, y) = (1, 2)$ .

**פתרון:**

נפתור ב2 דרכים שונות:

1. נשים לב כי  $f_x(x, y) = 2x$ ,  $f_y(x, y) = 2y$ , שתיהן רציפות בכל  $\mathbb{R}^2$ , ולכן  $f$  דיפרנציאבילית.

2. נחשב את  $\varepsilon(x, y)$  ונראה כי  $\varepsilon(x, y) \xrightarrow{(x,y) \rightarrow (1,2)} 0$ . נשים לב כי  $f(1, 2) = 5$ ,  $f_x(1, 2) = 2$ ,  $f_y(1, 2) = 4$ : אז:

$$\begin{aligned}\varepsilon(x, y) &= \frac{f(x, y) - 5 - 2(x - 1) - 4(y - 2)}{\sqrt{(x - 1)^2 + (y - 2)^2}} = \frac{x^2 + y^2 - 5 - 2x + 2 - 4y + 8}{\sqrt{(x - 1)^2 + (y - 2)^2}} \\ &= \frac{(x^2 - 2x + 1) + (y^2 - 2(2y) + 4)}{\sqrt{(x - 1)^2 + (y - 2)^2}} \\ &= \frac{(x - 1)^2 + (y - 2)^2}{\sqrt{(x - 1)^2 + (y - 2)^2}} = \sqrt{(x - 1)^2 + (y - 2)^2}\end{aligned}$$

וכמובן מתקיים כי:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (1,2)} \varepsilon(x, y) = \lim_{(x,y) \rightarrow (1,2)} \sqrt{(x - 1)^2 + (y - 2)^2} = 0$$

#### תרגיל 5.14.

בתרגיל זה נראה כי דיפרנציאביליות אינה גוררת רציפות של הנגזרות החלקיות. תהא:

$$f(x, y) = \begin{cases} (x^2 + y^2) \sin\left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right) & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

הוכיחו כי  $f(x, y)$  דיפרנציאבילית, אבל  $\frac{\partial f}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial f}{\partial y}$  אינן רציפות ב  $(0, 0)$ .

#### פתרון:

נוכיח דיפרנציאביליות:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h, 0) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^2 \sin\left(\frac{1}{\sqrt{h^2}}\right)}{h} = 0$$

ובאותה צורה  $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0$ .

כלומר,  $f$  דיפרנציאבילית ב  $(0, 0)$  אם  $\varepsilon(x, y) \xrightarrow{(x,y) \rightarrow (0,0)} 0$  עבור:

$$\varepsilon(x, y) = \frac{f(x, y) - f(0, 0) - \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)(x) - \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)(y)}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{f(x, y)}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

אז:

$$|\varepsilon(x, y)| \leq \left| (x^2 + y^2) \sin\left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right) \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right| = \left| \sqrt{x^2 + y^2} \sin\left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right) \right| \xrightarrow{(x,y) \rightarrow (0,0)} 0$$

כלומר  $f(x, y)$  דיפרנציאבילית ב  $(0, 0)$ .  
נחשב את  $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$  ב  $(x, y) \neq (0, 0)$ :

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) &= 2x \sin\left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right) + (x^2 + y^2) \cos\left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right) \frac{-\frac{2x}{2\sqrt{x^2 + y^2}}}{(\sqrt{x^2 + y^2})^2} \\ &= 2x \sin\left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right) - \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \cos\left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right)\end{aligned}$$

נראה כי  $\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$  לא קיים (ובפרט לא שווה ל  $0 = \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)$ ), ואכן, עבור המסילה  $\gamma(t) = (t, 0)$  עבור  $t \in [0, 1]$  (שימו לב כי  $t > 0$ ), עבור כאשר  $\gamma(0) = 0$  נקבל:

$$\lim_{t \rightarrow 0} f(\gamma(t)) = \lim_{t \rightarrow 0} t \sin\left(\frac{1}{|t|}\right) - \frac{t}{|t|} \cos\left(\frac{1}{|t|}\right) = \lim_{t \rightarrow 0} t \sin\left(\frac{1}{t}\right) - \cos\left(\frac{1}{t}\right)$$

והגבול הזה לא קיים.

## 6.1 | מישור משיק

תזכורת – (מישור משיק)

מישור שעובר דרך הנקודה  $P = (x_0, y_0, z_0)$ , עם נורמל  $\vec{N} = \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix}$  הוא הקבוצה:

$$\{\vec{v} \in \mathbb{R}^3 \mid \langle \vec{v} - P, \vec{N} \rangle = 0\} = \{(x, y, z) \mid A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0\}$$

בהנתן פונקציה  $f(x, y)$ , ניתן לשרטט את הגרף שלה,  $\Gamma_f = \{(x, y, z) \mid z = f(x, y)\} \subset \mathbb{R}^3$ , ואז אפשר להתבונן בנקודה על הגרף  $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$  ולהתבונן על המישור המשיק בנקודה הזאת שמוגדר להיות אוסף כל הישרים המשיקים לכל עקומה גזירה המוכלת בגרף הפונקציה, במקרה ומישור זה קיים משוואתו תהיה:

$$z = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0)$$

כלומר, המישור עם הנורמל:

$$\vec{N} = \begin{pmatrix} -\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \\ -\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \\ 1 \end{pmatrix}$$

העובר בנקודה  $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ .

בהרצאה ראינו כי  $f(x, y)$  גזירה בנקודה  $(x_0, y_0)$  אם ורק אם המישור אשר את משוואתו כתבנו מעלה משיק לגרף הפונקציה בנקודה  $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ .

## תרגיל 6.1

תהא  $f(x, y) = x^2 + y^2$ .

1. הוכיחו כי  $f$  דיפרנציאבילית בכל  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ .
2. מצאו את המישור המשיק לגרף ש  $f$  בנקודה  $(1, 1)$ .
3. יהיו המסלולים  $\gamma_1(t) = (t, t)$ ,  $\gamma_2(t) = (t, 1)$ , כולן ב  $t = 1$  מקיימות  $\gamma_1(1) = \gamma_2(1) = (1, 1)$ . לכל  $i = 1, 2$  סמנו  $\Gamma_i(t) = (\gamma_i(t), f(\gamma_i(t)))$ , ובדקו כי אכן הישר המשיק לעקומה  $\Gamma_i$  ב  $t = 1$  נמצא במישור המשיק שמצאתם בסעיף ב', כלומר כי לכל  $s \in \mathbb{R}$ ,

$$\Gamma_i(1) + s\Gamma'_i(1)$$

במישור המשיק.

## פתרון:

1. נשים לב כי  $f_x(x, y) = 2x$ ,  $f_y(x, y) = 2y$ , שתיהן רציפות בכל  $\mathbb{R}^2$ , ולכן  $f$  דיפרנציאבילית.

2. אנו יודעים שקיים מישור משיק כיוון  $f$  דיפרנציאבילית. משוואת המישור המשיק היא

$$\begin{aligned} z &= f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0) \\ &= f(1, 1) + \frac{\partial f}{\partial x}(1, 1)(x - 1) + \frac{\partial f}{\partial y}(1, 1)(y - 1) \\ &= 2 + 2(x - 1) + 2(y - 1) = 2 + 2x - 2 + 2y - 2 = 2x + 2y - 2 \end{aligned}$$

כלומר,  $2x + 2y - z = 2$ .

3. עבור  $\gamma_1$  מתקיים:

$$\Gamma_1(t) = (t, t, f(t, t)) = (t, t, 2t^2) \implies \Gamma'_1(t) = (1, 1, 4t) \implies \Gamma'_1(1) = (1, 1, 4)$$

$$\text{ובאמת לכל } s \in \mathbb{R} \text{ הישר } \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 + 4s \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + s \\ 1 + s \\ 2 + 4s \end{pmatrix} \text{ מקיים:}$$

$$2x + 2y - z = 2(1 + s) + 2(1 + s) - (2 + 4s) = 2 + 2s + 2 + 2s - 2 - 4s = 2$$

באותו אופן עבור  $\Gamma_2$ :

$$\Gamma_2(t) = (t, 1, f(t, 1)) = (t, 1, 1 + t^2) \implies \Gamma'_2(t) = (1, 0, 2t) \implies \Gamma'_2(1) = (1, 0, 2)$$

$$\text{אז הישר שלנו הוא } \begin{pmatrix} 1 + s \\ 1 \\ 2 + 2s \end{pmatrix}, \text{ ובאמת לכל } s \in \mathbb{R}$$

$$2(1 + s) + 2 - (2 + 2s) = 2$$

## תרגיל 6.2

עבור המשטחים הבאים, מצאו את המישור המשיק בנקודה המצוינת:

1.  $\ln(xyz) = 0, P = (1, 2, \frac{1}{2})$

2.  $\frac{2x+y}{x+2y+z} = 1, P = (1, 0, 0)$

## פתרון:

1. נביא את המשטח לצורה  $z = f(x, y)$

$$\ln(xyz) = 0 \Rightarrow xyz = 1 \xRightarrow{x, y \neq 0} z = \frac{1}{xy} = f(x, y)$$

נחשב את  $f'_x(P), f'_y(P)$  ואכן:

$$f'_x = -\frac{1}{yx^2}, f'_y = -\frac{1}{xy^2}$$

אז המישור המשיק הוא:

$$z = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0)$$

$$z = f(1, 2) + \frac{\partial f}{\partial x}(1, 2)(x - 1) + \frac{\partial f}{\partial y}(1, 2)(y - 2)$$

$$z = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}(x - 1) - \frac{1}{4}(y - 2)$$

2. נביא את המשטח לצורה  $z = f(x, y)$

$$\frac{2x+y}{x+2y+z} = 1 \xRightarrow{x+2y+z \neq 0} 2x+y = x+2y+z \Rightarrow z = x-y$$

המשטח הוא כבר מישור, כלומר המישור המשיק הוא המשטח עצמו.

## 6.2 | כלל השרשרת

## תזכורת – (כלל השרשרת)

תהא  $f(x, y)$  פונקציה סקלרית גזירה.

1. יהיו  $\xi, \eta : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  פונקציות גזירות. נסמן  $G(t) = f(\xi(t), \eta(t))$ , אז:

$$G'(t) = \frac{\partial}{\partial t} f(\xi(t), \eta(t)) = \frac{\partial f}{\partial \xi}(\xi(t), \eta(t)) \frac{\partial \xi}{\partial t}(t) + \frac{\partial f}{\partial \eta}(\xi(t), \eta(t)) \frac{\partial \eta}{\partial t}(t)$$

או בכתיב מקוצר (כלומר, כאשר אנו לא מציינים באיזו נקודות אנו גוזרים) מתקיים:

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial t}$$

2. במקרה ש  $\xi, \eta$  פונקציות (דיפרנציאביליות) של 2 משתנים,  $\xi(u, v), \eta(u, v)$ , אם נסמן

$$G(u, v) = f(\xi(u, v), \eta(u, v))$$

אז:

$$G_u(u, v) = \frac{\partial}{\partial u} f(\xi(u, v), \eta(u, v)) = \frac{\partial f}{\partial \xi}(\xi(u, v), \eta(u, v)) \frac{\partial \xi}{\partial u}(u, v) + \frac{\partial f}{\partial \eta}(\xi(u, v), \eta(u, v)) \frac{\partial \eta}{\partial u}(u, v)$$

$$G_v(u, v) = \frac{\partial}{\partial v} f(\xi(u, v), \eta(u, v)) = \frac{\partial f}{\partial \xi}(\xi(u, v), \eta(u, v)) \frac{\partial \xi}{\partial v}(u, v) + \frac{\partial f}{\partial \eta}(\xi(u, v), \eta(u, v)) \frac{\partial \eta}{\partial v}(u, v)$$

או בכתיב מקוצר:

$$\frac{\partial f}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial u}$$

$$\frac{\partial f}{\partial v} = \frac{\partial f}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial v}$$

## הערה

לפעמים נסמן את  $\xi, \eta$  על ידי  $x, y$  ואז זה קצת מבלבל, אבל הכוונה ל  $x, y$  כפונקציות של  $t$ , כמו בתרגיל הבא.

## הערה

העשרה:

המשוואות הללו מגיעות מכפל מטריצות, אם נתונות לנו:

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad \Phi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \Phi(u, v) = (\xi(u, v), \eta(u, v))$$

ונגדיר:  $G(u, v) = f(\Phi(u, v))$  אז כלל השרשרת בעצם אומר כי:

$$\begin{pmatrix} G_u \\ G_v \end{pmatrix} = \nabla G = J_\Phi \cdot \nabla f = \begin{pmatrix} \xi_u & \eta_u \\ \xi_v & \eta_v \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_x \\ f_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi_u f_x + \eta_u f_y \\ \xi_v f_x + \eta_v f_y \end{pmatrix}$$

כאשר  $J_\Phi = \begin{pmatrix} \xi_u & \eta_u \\ \xi_v & \eta_v \end{pmatrix}$  היא מטריצת היעקוביאן של  $\Phi$  - שהיא מטריצה שנלמד עליה עוד בהמשך הקורס.

### תרגיל 6.3

1. תהא  $f(x, y) = e^{2x-y}$ ,  $y(t) = t^4$ ,  $x(t) = \sin(t)$ , חשבו את  $\frac{\partial f}{\partial t}$ .

2. תהא  $g(x, y) = x^2 + xy + y^2$ , עבור קואורדינטות פולריות,  $\begin{cases} x = r \cos(\theta) \\ y = r \sin(\theta) \end{cases}$ , חשבו את  $\frac{\partial g}{\partial r}, \frac{\partial g}{\partial \theta}$ .

### פתרון:

1. נפתור את התרגיל הזה בשתי דרכים שונות, עם כלל השרשרת ובעזרת חישוב ישיר. נתחיל עם כלל השרשרת:

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial t} = \underbrace{2e^{2\sin(t)-t^4} \cos(t)}_{2e^{2x-y} \cos(t)} - \underbrace{e^{2\sin(t)-t^4} 4t^3}_{-e^{2x-y} 4t^3} = e^{2\sin(t)-t^4} (2 \cos(t) - 4t^3)$$

מצד שני, החישוב הישיר נותן לנו:

$$f(x(t), y(t)) = e^{2\sin(t)-t^4} \implies \frac{\partial f}{\partial t} = e^{2\sin(t)-t^4} (2 \cos(t) - 4t^3)$$

2. נשתמש בכלל השרשרת:

$$\begin{aligned} \frac{\partial g}{\partial r} &= \frac{\partial g}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial g}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial r} = (2x + y) \Big|_{\substack{x=r \cos(\theta) \\ y=r \sin(\theta)}} \cos(\theta) + (2y + x) \Big|_{\substack{x=r \cos(\theta) \\ y=r \sin(\theta)}} \sin(\theta) \\ &= (2r \cos(\theta) + r \sin(\theta)) \cos(\theta) + (2r \sin(\theta) + r \cos(\theta)) \sin(\theta) \\ &= r(2 \cos^2(\theta) + \cos(\theta) \sin(\theta) + 2 \sin^2(\theta) + \cos(\theta) \sin(\theta)) = 2r(1 + \cos(\theta) \sin(\theta)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial g}{\partial \theta} &= \frac{\partial g}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial g}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \theta} = (2x + y) \Big|_{\substack{x=r \cos(\theta) \\ y=r \sin(\theta)}} (-r \sin(\theta)) + (2y + x) \Big|_{\substack{x=r \cos(\theta) \\ y=r \sin(\theta)}} (r \cos(\theta)) \\ &= (2r \cos(\theta) + r \sin(\theta))((-r \sin(\theta))) + (2r \sin(\theta) + r \cos(\theta))(r \cos(\theta)) \\ &= r^2(-2 \cos(\theta) \sin(\theta) - \sin^2(\theta) + 2 \sin(\theta) \cos(\theta) + \cos^2(\theta)) = r^2(\cos^2(\theta) - \sin^2(\theta)) \end{aligned}$$

## תרגיל 6.4

תהא  $f(x, y)$  גזירה, נגדיר:

$$g(u, v) = f(3u - v, u^2 + v)$$

בהינתן:

$$f'_x(7, 3) = 1, f'_y(7, 3) = 2$$

חשבו את:

$$\left. \frac{\partial g}{\partial u} \right|_{(u,v)=(2,-1)}, \left. \frac{\partial g}{\partial v} \right|_{(u,v)=(2,-1)}$$

**פתרון:**

נשים לב כי אם נסמן  $x(u, v) = 3u - v, y(u, v) = u^2 + v$  אז  $x, y$  גזירות, ולכן ניתן להשתמש בכלל השרשרת:

$$\left. \frac{\partial g}{\partial u} \right|_{(u,v)=(2,-1)} = \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{(x,y)=(x(2,-1),y(2,-1))} \left. \frac{\partial x}{\partial u} \right|_{(u,v)=(2,-1)} + \left. \frac{\partial f}{\partial y} \right|_{(x,y)=(x(2,-1),y(2,-1))} \left. \frac{\partial y}{\partial u} \right|_{(u,v)=(2,-1)}$$

נחשב:

$$x(2, -1) = 3(2) - (-1) = 7, y(2, -1) = 2^2 - 1 = 3$$

$$\left. \frac{\partial x}{\partial u} \right|_{(u,v)=(2,-1)} = 3, \left. \frac{\partial y}{\partial u} \right|_{(u,v)=(2,-1)} = 2u = 4$$

אז:

$$\left. \frac{\partial g}{\partial u} \right|_{(u,v)=(2,-1)} = f'_x(7, 3) \cdot 3 + f'_y(7, 3) \cdot 4 = 3 + 4 \cdot 2 = 11$$

אותו דבר נעשה עבור  $\left. \frac{\partial g}{\partial v} \right|_{(u,v)=(2,-1)}$ :

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial g}{\partial v} \right|_{(u,v)=(2,-1)} &= \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{(x,y)=(x(2,-1),y(2,-1))} \left. \frac{\partial x}{\partial v} \right|_{(u,v)=(2,-1)} + \left. \frac{\partial f}{\partial y} \right|_{(x,y)=(x(2,-1),y(2,-1))} \left. \frac{\partial y}{\partial v} \right|_{(u,v)=(2,-1)} \\ &= f'_x(7, 3) \cdot (-1) + f'_y(7, 3) \cdot 1 = -1 + 2 = 1 \end{aligned}$$

## 6.3 | נגזרת כיוונית וגרדיאנט

## תזכורת – (נגזרת כיוונית)

תהא  $f(x, y) : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  ווקטור  $\hat{n} = (n_1, n_2) \in \mathbb{R}^2$  אז נגדיר:

$$\frac{\partial f}{\partial \hat{n}}(x_0, y_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + hn_1, y_0 + hn_2) - f(x_0, y_0)}{h}$$

זהו השיפוע של גרף הפונקציה  $f$ , בנקודה  $(x_0, y_0)$  בכיוון  $\hat{n}$ .  
נשים לב כי אם  $\hat{n} = (1, 0)$  אז  $\frac{\partial f}{\partial \hat{n}} = f_x$  ואם  $\hat{w} = (0, 1)$  אז  $\frac{\partial f}{\partial \hat{w}} = f_y$ .  
אם  $f(x, y)$  דיפרנציאבילית ב  $(x_0, y_0)$ , אז קיימת לה נגזרת כיוונית בכל כיוון  $\vec{v}$  ב  $(x_0, y_0)$ .

## תזכורת – (גרדיאנט)

אם  $f(x, y)$  דיפרנציאבילית ב  $(x_0, y_0)$  אז לכל  $\hat{n} = (n_1, n_2) \in \mathbb{R}^2$  מתקיים:

$$\frac{\partial f}{\partial \hat{n}}(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)n_1 + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)n_2$$

אם נגדיר את הגרדיאנט של  $f$  להיות הווקטור  $\nabla f(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \end{pmatrix}$  ונזכר במכפלה סקלרית:

$$\left\langle \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \gamma \\ \delta \end{pmatrix} \right\rangle = \alpha\gamma + \beta\delta$$

אז נוכל לכתוב:

$$\frac{\partial f}{\partial \hat{n}}(x, y) = \langle \nabla f(x, y), \hat{n} \rangle$$

נזכור גם כי  $\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle$  מקסימלי כאשר  $\vec{v}, \vec{w}$  וקטורים מקבילים, כלומר  $\frac{\partial f}{\partial \hat{n}} = \langle \nabla f, \hat{n} \rangle$  מקסימלי כאשר  $\nabla f, \hat{n}$  מצביעים באותו כיוון, כלומר  $\nabla f$ , כווקטור, מצביע בכיוון הגידול המקסימלי של  $f$ .

## תרגיל 6.5.

תהא  $f(x, y) = e^x \sin(y)$ , חשבו את  $\frac{\partial f}{\partial \hat{n}}(3, 4)$  עבור  $\hat{n} = \left( \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} \right)$ .

## פתרון:

נוכיח קודם כל שהפונקציה  $f(x, y)$  דיפ' בנקודה  $(3, 4)$  דרך רציפות נגזרות החלקיות שלה:

$$\begin{aligned} f_x(3, 4) &= e^x \sin(y)|_{(x,y)=(3,4)} = e^3 \sin(4) \\ f_y(3, 4) &= e^x \cos(y)|_{(x,y)=(3,4)} = e^3 \cos(4) \end{aligned}$$

אז ע"י הגדרדיאנט  $\nabla f(3, 4)$ , מקבלים:

$$\frac{\partial f}{\partial \hat{n}}(3, 4) = \left\langle \begin{pmatrix} e^3 \sin(4) \\ e^3 \cos(4) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \right\rangle = \frac{\sqrt{2}}{2} (e^3 \sin(4) + e^3 \cos(4))$$

## תרגיל 6.6.

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^4 + y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases} \text{ תהא } \frac{\partial f}{\partial \hat{n}}(0, 0) \text{ חשבו את } \hat{n} \text{ וקטור יחידה,}$$

### פתרון:

ראשית נרצה לבדוק האם  $f$  דיפרנציאבילית ב  $(0, 0)$ , נראה שהיא אפילו לא רציפה, ובאמת 2 המסילות

$$\gamma_1(t) = (t, 0), \gamma_2(t) = (\sqrt{t}, t)$$

רציפות, ומקיימות  $\gamma_1(0) = \gamma_2(0) = (0, 0)$  אבל מתקיים:

$$\lim_{t \rightarrow 0} f(\gamma_1(t)) = \lim_{t \rightarrow 0} 0 = 0$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} f(\gamma_2(t)) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t^2}{2t^2} = \frac{1}{2} \neq 0$$

לכן אי אפשר להשתמש במשפט הגרדיאנט. נחשב ישירות את  $\frac{\partial f}{\partial \hat{n}}(0, 0)$  (ונופתע לגלות שהוא בכלל מוגדר לכל  $\hat{n}$ !).

כל וקטור יחידה  $\hat{n}$  הוא מהצורה  $(\cos(\theta), \sin(\theta))$  עבור  $\theta \in [0, 2\pi)$  כלשהי. נחשב לפי הגדרה:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial \hat{n}}(0, 0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h \cos \theta, h \sin \theta) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h \cos \theta, h \sin \theta)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^3 \cos^2 \theta \sin \theta}{h(h^4 \cos^4 \theta + h^2 \sin^2 \theta)} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos^2 \theta \sin \theta}{h^2 \cos^4 \theta + \sin^2 \theta} \end{aligned}$$

נפצל למקרים.

1. אם  $\sin \theta = 0$ , כלומר  $\theta = 0$  או  $\theta = \pi$ , אז:

$$\frac{\partial f}{\partial \hat{n}}(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos^2 \theta \sin \theta}{h^2 \cos^4 \theta + \sin^2 \theta} = 0$$

2. אם  $\sin \theta \neq 0$ , אז:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial \hat{n}}(0, 0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos^2 \theta \sin \theta}{h^2 \cos^4 \theta + \sin^2 \theta} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos^2 \theta}{h^2 \frac{\cos^4 \theta}{\sin(\theta)} + \sin \theta} = \frac{\cos^2(\theta)}{\sin(\theta)} \end{aligned}$$

## הערה

התרגיל הזה מראה לנו שזה שהנגזרת הכיוונית קיימת לכל כיוון לא גורר כי  $f$  דיפרנציאבילית (ואפילו לא רציפה!).

## תרגיל 6.7.

תהא הפונקציה  $f(x, y) = x^2 + y^2(1 - x^2)$ , והנקודה  $P = (1, 2, f(1, 2)) = (1, 2, 1)$ .

- מצאו את הכיוון ב- $\mathbb{R}^2$  בו קצב העלייה של  $f$  הוא המקסימלי בנקודה  $P$ .
- אם נזוז על גרף הפונקציה  $f$  בנקודה  $P$  בכיוון של סעיף א', מצאו את הכיוון ב- $\mathbb{R}^3$  שנזוז.

## פתרון:

- נזכר שראינו בהרצאה כי הגרדיאנט מצביע בכיוון הגידול המקסימלי של הפונקציה, אז נחשב את הגרדיאנט של  $f$  בנקודה  $P$ :

$$\nabla f(1, 2) = \begin{pmatrix} 2x - 2y^2x \\ 2y(1 - x^2) \end{pmatrix} \Big|_{(x,y)=(1,2)} = \begin{pmatrix} -6 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{בפרט הכיוון הינו } \hat{n} = \frac{1}{14} \begin{pmatrix} -6 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- באופן כללי כאשר נזוז בכיוון  $\vec{v} \in \mathbb{R}^2$  על גרף של פונקציה, הכיוון בציר ה- $z$  יהיה  $\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}$ , אז במקרה שלנו, כאשר נזוז בכיוון  $\hat{n}$ , הכיוון בציר ה- $z$  יהיה:

$$\frac{\partial f}{\partial \hat{n}}(1, 2) = \langle \nabla f(1, 2), \hat{n} \rangle = \left\langle \begin{pmatrix} -6 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle = 6$$

כלומר, הכיוון ב- $\mathbb{R}^3$  שנזוז הוא  $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}$ , או במילים אחרות, נזוז בכיוון של וקטור היחידה  $\frac{1}{\sqrt{1+6^2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}$ .

## תרגיל 6.8.

תהא  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  פונקציה דיפרנציאבילית. חשבו את  $\nabla f(1, -1)$ , כאשר נתון כי  $\frac{\partial f}{\partial x}(1, -1) = 6$  וכי לכל  $t \in \mathbb{R}$  מתקיים  $f(t^2, t^3) = 100$ .

**פתרון:**

נגדיר  $g(t) = f(t^2, t^3)$ , אז לפי כלל השרשרת:

$$g'(t) = \frac{\partial f}{\partial x}(t^2, t^3) \cdot 2t + \frac{\partial f}{\partial y}(t^2, t^3) \cdot 3t^2$$

אבל  $g(t) = 100$  לכל  $t$ , אז  $g'(t) = 0$  לכל  $t$ , בפרט עבור  $t = -1$ :

$$0 = g'(-1) = \frac{\partial f}{\partial x}(1, -1) \cdot (-2) + \frac{\partial f}{\partial y}(1, -1) \cdot 3 = -12 + 3 \frac{\partial f}{\partial y}(1, -1) \implies \frac{\partial f}{\partial y}(1, -1) = 4$$

$$\text{לכן, } \nabla f(1, -1) = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

**תרגיל 6.9**

זו שאלה ממבחן.

1. תהא  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  פונקציה זוגית וגזירה ב-0 כך ש  $g'(0) = 0$ , נגדיר  $f(x, y) = g(\sqrt{x^2 + y^2})$ , הוכיחו כי  $f$  דיפרנציאבילית ב  $(0, 0)$ .

2. תהא  $f(x, y) = \cos(\sqrt{x^2 + y^2})$ , חשבו את  $\frac{\partial f}{\partial n}(0, 0)$  עבור  $\hat{n} = (\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$ .

**פתרון:**

1. נתחיל בחישוב  $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)$ ,  $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)$  לפי הגדרה:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h, 0) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(\sqrt{h^2}) - g(0)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(|h|) - g(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(h) - g(0)}{h} = g'(0) = 0 \end{aligned}$$

חישוב דומה יראה לנו כי  $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0$ .

עפ"י הגדרה,  $f$  דיפרנציאבילית ב  $(0, 0)$  אם  $\varepsilon(x, y) \xrightarrow{(x, y) \rightarrow (0, 0)} 0$  עבור:

$$\varepsilon(x, y) = \frac{f(x, y) - f(0, 0) - \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)x - \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)y}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{f(x, y) - f(0, 0)}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

נעבור לקואורדינטות פולאריות:

$$\begin{aligned} \lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \varepsilon(x, y) &= \lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{f(x, y) - f(0, 0)}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{g(\sqrt{x^2 + y^2}) - g(0)}{\sqrt{x^2 + y^2}} \\ &= \lim_{r \rightarrow 0^+} \frac{g(r) - g(0)}{r} = g'(0) = 0 \end{aligned}$$

כלומר,  $f(x, y)$  דיפרנציאבילית ב  $(0, 0)$ .

2. הפונקציה  $g(t) = \cos(t)$  זוגית וגזירה ומקיימת  $g'(0) = -\sin(0) = 0$ , אז לפי החישוב שנעשה בסעיף א' מתקיים כי  $\nabla f(0, 0) = (0, 0)$ , ולכן, היות ו  $f$  דיפרנציאבילית (לפי הסעיף הקודם), מתקיים כי לכל  $\hat{n}$ ,  $\frac{\partial f}{\partial \hat{n}} = 0$ .

## תרגול שביעי

### 7.1 | כלל ליבניץ לגזירת אינטגרל עם פרמטר

#### תזכורת – כלל ליבניץ

יהיו  $a, b : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  פונקציות גזירות. נגדיר:

$$F(x) = \int_{a(x)}^{b(x)} f(x, t) dt$$

אז  $F$  גזירה, ו:

$$F'(x) = \int_{a(x)}^{b(x)} \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) dt + f(x, b(x)) \cdot b'(x) - f(x, a(x)) \cdot a'(x)$$

#### תרגיל 7.1.

תהא:

$$F(x) = \int_{x^2}^{x^3} \frac{e^{xt}}{t} dt$$

חשבו את  $F'(3)$ .

**פתרון:**

נחשב את  $F'(x)$  לפי כלל ליבניץ:

$$F'(x) = \underbrace{\int_{x^2}^{x^3} \frac{te^{xt}}{t} dt}_{\int_{a(x)}^{b(x)} \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) dt} + \underbrace{\frac{e^{x \cdot x^3}}{x^3} \cdot 3x^2}_{f(x, b(x)) \cdot b'(x)} - \underbrace{\frac{e^{x \cdot x^2}}{x^2} \cdot 2x}_{f(x, a(x)) \cdot a'(x)} = \int_{x^2}^{x^3} e^{xt} dt + 3 \frac{e^{x^4}}{x} - 2 \frac{e^{x^3}}{x}$$

**בפרט:**

$$F'(3) = \int_{x^2}^{x^3} e^{xt} dt + 3 \frac{e^{x^4}}{x} - 2 \frac{e^{x^3}}{x} \Big|_{x=3} = \int_9^{27} e^{3t} dt + 3 \frac{e^{81}}{3} - 2 \frac{e^{27}}{3} = \dots = \frac{4}{3} e^{81} - e^{27}$$

## תרגיל 7.2

חשבו את:

$$\int_0^1 \frac{x-1}{\ln(x)} dx$$

פתרון:

נסמן  $I(t) = \int_0^1 \frac{x^t-1}{\ln(x)} dx$ , אז אנחנו מחפשים את  $I(1)$ . נחשב את  $I'(t)$  לפי כלל ליבניץ:

$$I'(t) = \int_0^1 \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{x^t-1}{\ln(x)} \right) dx + (\dots) \cdot \frac{\partial}{\partial t} (1) - (\dots) \cdot \frac{\partial}{\partial t} (0) = \int_0^1 \frac{x^t \ln(x)}{\ln(x)} dx = \int_0^1 x^t dx = \frac{1}{t+1}$$

בפרט:

$$I(a) - I(0) = \int_0^a I'(t) dt = \int_0^a \frac{1}{t+1} dt = \ln(t+1) \Big|_0^a = \ln(a+1)$$

כלומר:

$$I(a) = \ln(a+1) + I(0) = \ln(a+1)$$

אז למשל  $I(1) = \ln(2)$ .

## 7.2 | משפט הפונקציה הסתומה

## רעיון

פונקציה סתומה היא פונקציה מהצורה  $F(x, y) = 0$ . במקרים רבים יותר נוח לנו לעבוד עם פונקציה מהצורה  $y = f(x)$ , כלומר "לחלץ" את המשתנה  $y$ , דוגמה נהדרת לכך היא הפונקציה הסתומה:

$$x^2 + y^2 - 1 = 0$$

בנקודות בהן  $y > 0$  אפשר לכתוב:

$$y = \sqrt{1-x^2}$$

ובנקודות בהן  $y < 0$ :

$$y = -\sqrt{1-x^2}$$

אבל יש לנו 2 נקודות,  $(1, 0)$ ,  $(-1, 0)$  המקיימות  $F(1, 0) = F(-1, 0) = 0$  סביבן לא נצליח לכתוב את  $y = f(x)$ .

משפט הפונקציה הסתומה נותן לנו 2 דברים:

1. מתי אפשר "לחלץ" פונקציה סתומה  $F(x, y) = 0$  ל  $y = f(x)$ .

2. אם אפשר "לחלץ" אז מה  $f'(x)$ ?

שימו לב שהמשפט לא נותן לנו את  $f(x)$ !

## תזכורת – (משפט הפונקציה הסתומה 2 משתנים)

$$f(x) = y \iff F(x, y) = 0$$

ננסח את המשפט עבור פונקציה ב-2 משתנים:

תהא פונקציה סתומה  $F(x, y) = 0$  ב- $(x_0, y_0)$  כך ש- $F(x_0, y_0) = 0$ . אם מתקיים כי:

1. בסביבה של  $F_x, F_y, (x_0, y_0)$  רציפות.

$$F_y(x_0, y_0) \neq 0$$

אז קיימת פונקציה יחידה  $y = f(x)$  המוגדרת בסביבה של  $(x_0, y_0)$  כך ש:

$$y = f(x) \iff F(x, y) = 0$$

ומתקיים:

$$\frac{\partial y}{\partial x} = f'(x) = -\frac{F'_x(x, f(x))}{F'_y(x, f(x))} = -\frac{F'_x(x, y)}{F'_y(x, y)}$$

## תזכורת – (משפט הפונקציה הסתומה 3 משתנים)

תהא פונקציה סתומה:

$$F(x, y, z) = 0$$

נחפש  $z = f(x, y)$  כך ש:

$$z = f(x, y) \iff F(x, y, f(x, y)) = 0$$

אז בהנתן  $(x_0, y_0, z_0)$  כך ש- $F(x_0, y_0, z_0) = 0$ , אם קיימת סביבה בה:

1.  $F_x, F_y, F_z$  רציפות.

$$F_z(x_0, y_0, z_0) \neq 0$$

אז קיימת פונקציה יחידה  $f(x, y) = z$  המקיימת כי בסביבה של  $(x_0, y_0)$ :

$$z = f(x, y) \iff F(x, y, f(x, y)) = 0$$

ומתקיים:

$$\frac{\partial z}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = -\frac{F'_x(x, y, f(x, y))}{F'_z(x, y, f(x, y))}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = -\frac{F'_y(x, y, f(x, y))}{F'_z(x, y, f(x, y))}$$

## רעיון

דרך לזכור (וגם להבין במידה מסוימת) את נוסחאת הנגזרת הוא שבהנתן החילוף, אפשר לגזור לפני המשתנים ולקבל את הנוסחא, למשל פה:

$$\frac{\partial z}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = -\frac{F'_x(x, y, f(x, y))}{F'_z(x, y, f(x, y))}$$

אנחנו בעצם אומרים שקיימת פונקציה  $z = z(x, y)$  כך ש  $F(x, y, z(x, y)) = 0$ , אז אם נגזור לפי  $x$  נקבל:

$$0 = \frac{\partial}{\partial x}(0) = \frac{\partial}{\partial x}(F(x, y, z(x, y))) = F'_x(x, y, z(x, y)) \cdot 1 + F'_z(x, y, z(x, y)) \cdot \frac{\partial z}{\partial x}(x, y)$$

ואז נבודד את  $\frac{\partial z}{\partial x}(x, y)$  ונקבל את הנוסחא:

$$\frac{\partial z}{\partial x}(x, y) = -\frac{F'_x(x, y, z(x, y))}{F'_z(x, y, z(x, y))}$$

## תרגיל 7.3

הראו כי עבור המשוואה  $1 + x + y = \cos(xy)$  ניתן לבודד את  $y$  כפונקציה של  $x$  בסביבה של הנקודה  $(0, 0)$  ומצאו את  $y'(0)$ .

## פתרון:

נעבור תחילה להצגה סתומה של הפונקציה:

$$F(x, y) = 1 + x + y - \cos(xy) = 0$$

יש לנו 3 דברים לבדוק עבור  $F(x, y)$ :

$$1. \quad F(0, 0) = 1 - \cos(0) = 0$$

$$2. \quad F'_x = 1 + y \sin(xy), F'_y = 1 + x \sin(xy)$$

$$3. \quad F'_y(0, 0) = 1 \neq 0$$

אז לפי משפט הפונקציה הסתומה, ניתן לכתוב את  $y$  כפונקציה של  $x$  סביב  $(0, 0)$ , ומתקיים:

$$y'(x) = -\frac{F'_x(x, y)}{F'_y(x, y)} = -\frac{1 + y \sin(xy)}{1 + x \sin(xy)}$$

בפרט:

$$y'(0) = -\frac{1 + y \sin(xy)}{1 + x \sin(xy)} \Big|_{(0,0)} = -1$$

## תרגיל 7.4

חשבו את  $\frac{\partial y}{\partial x}$  בסביבה של  $x = 1, y = 0$  עבור:

$$x^2 y^4 = \sin(xy)$$

**פתרון:**

נשים לב כי את הפונקציה הסתומה אפשר לכתוב בצורה:

$$F(x, y) = x^2 y^4 - \sin(xy) = 0$$

נבדוק שמתקיימים תנאי משפט הפונקציה הסתומה:

$$1. F(1, 0) = 0$$

$$2. F'_x = 2xy^4 - y \cos(xy), F'_y = 4x^2 y^3 - x \cos(xy) \text{ רציפות בכל } \mathbb{R}^2.$$

$$3. F'_y(1, 0) = 0 - \cos(0) = -1 \neq 0$$

אז לפי משפט הפונקציה הסתומה, ניתן לחלץ את  $x$  כפונקציה של  $y$  בסביבה של  $(1, 0)$ , בה גם מתקיים:

$$\frac{\partial y}{\partial x} = -\frac{F_x}{F_y} = -\frac{2xy^4 - y \cos(xy)}{4x^2 y^3 - x \cos(xy)}$$

## תרגיל 7.5

תהא  $\cos(x) + \sin(y) = \tan(z)$ , מצאו את  $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$  בסביבה של הנקודה  $(\frac{\pi}{2}, 0, 0)$ .

**פתרון:**

נשתמש במשפט הפונקציה הסתומה עבור  $F(x, y, z) = \cos(x) + \sin(y) - \tan(z)$ . נבדוק את תנאי המשפט.

$$1. F\left(\frac{\pi}{2}, 0, 0\right) = 0$$

$$2. \left(\frac{\pi}{2}, 0, 0\right) \text{ כולן רציפות סביב } \frac{\partial F}{\partial x} = -\sin(x), \frac{\partial F}{\partial y} = \cos(y), \frac{\partial F}{\partial z} = -\frac{1}{\cos^2(z)}$$

$$3. \frac{\partial F}{\partial z}\left(\frac{\pi}{2}, 0, 0\right) = -\frac{1}{\cos^2(z)} = -\frac{1}{\cos^2(0)} = -1 \neq 0$$

אז קיימת  $z = f(x, y)$  בסביבה של  $(\frac{\pi}{2}, 0, 0)$ , והיא מקיימת:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = f'_x(x, y) = -\frac{F_x}{F_z} = -\frac{-\sin(x)}{-\frac{1}{\cos^2(z)}} = -\sin(x) \cos^2(z)$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = f'_y(x, y) = -\frac{F_y}{F_z} = -\frac{\cos(y)}{-\frac{1}{\cos^2(z)}} = \cos(y) \cos^2(z)$$

## תרגיל 7.6

זה תרגיל ממבחן.

הראו שקיימת פונקציה  $z = z(x, y)$  המקיימת את המשוואה  $x^2 + y^2 + z^3 + z = 1$ , והראו כי הפונקציה  $G(x, y) = e^{x^2+y^2} + e^{z(x,y)}$  מקיימת  $yG_x = xG_y$ .

**פתרון:**

נגדיר  $F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^3 + z - 1 = 0$ . ונראה כי סביב כל נקודה המקיימת  $F(x, y, z) = 0$  מתקיימים תנאי משפט הפונקציה הסתומה.

1.  $F_x, F_y, F_z$  רציפות כפולינומים.2.  $F_z(x, y, z) = 3z^2 + 1 \neq 0$  (לכל  $x, y, z$ ).אז אנו יודעים כי סביב כל  $(x, y, z)$  המקיימות  $F(x, y, z) = 0$  קיימת  $z = f(x, y)$  ומתקיים:

$$z_x = -\frac{F_x}{F_z} = -\frac{2x}{3z^2 + 1}, \quad z_y = -\frac{F_y}{F_z} = -\frac{2y}{3z^2 + 1}$$

נציב  $G(x, y, z) = e^{x^2+y^2} + e^{z(x,y)}$  ונגזור:

$$G_x = e^{x^2+y^2} (2x) + e^{z(x,y)} (z_x) = 2xe^{x^2+y^2} + \left(-\frac{2x}{3z^2+1}\right) e^{z(x,y)}$$

ובאופן דומה:

$$G_y = e^{x^2+y^2} (2y) + e^{z(x,y)} (z_y) = 2ye^{x^2+y^2} + \left(-\frac{2y}{3z^2+1}\right) e^{z(x,y)}$$

ובדיקה ישירה תראה לנו כי:

$$yG_x = xG_y = 2xye^{x^2+y^2} - e^z \frac{2yx}{3z^2+1}$$

### 7.3 | חישוב מישור משיק לפונקציה סתומה

#### תזכורת

תהא  $F(x, y, z)$  פונקציה גזירה ברציפות בסביבת  $(x_0, y_0, z_0)$  כך שמתקיים:

$$1. F(x_0, y_0, z_0) = 0$$

$$2. \nabla F(x_0, y_0, z_0) \neq \vec{0}$$

אז למשטח רמה  $F(x, y, z) = 0$ , קיים מישור משיק ב  $(x_0, y_0, z_0)$  כך שמשוואתו:

$$\left\langle \nabla F(x_0, y_0, z_0), \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \\ z - z_0 \end{pmatrix} \right\rangle = 0$$

כלומר:

$$F'_x(x_0, y_0, z_0)(x - x_0) + F'_y(x_0, y_0, z_0)(y - y_0) + F'_z(x_0, y_0, z_0)(z - z_0) = 0$$

אותה תוצאה אפשר לראות גם עבור פונקציה סתומה ב 2 משתנים  $G(x, y)$ , כלומר:  
תהא  $G(x, y)$  פונקציה גזירה ברציפות בסביבה של  $(x_0, y_0)$ , כך שמתקיים:

$$1. G(x_0, y_0) = 0$$

$$2. \nabla G(x_0, y_0) \neq \vec{0}$$

אז לקו גובה  $G(x, y) = 0$  קיים מישור משיק ב  $(x_0, y_0)$  ומשוואתו:

$$\left\langle \nabla G(x_0, y_0), \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix} \right\rangle = 0$$

כלומר:

$$G'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + G'_y(x_0, y_0)(y - y_0) = 0$$

#### רעיון

הנה הרעיון, נניח והיה אפשר לחלץ  $z = f(x, y)$ , אז אנו יודעים כי משוואת המשיק המשיק הינה:

$$z = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0)$$

אבל  $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = -\frac{F_y}{F_z}$ ,  $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = -\frac{F_x}{F_z}$  כלומר:

$$z = z_0 - \frac{F_x}{F_z}(x - x_0) - \frac{F_y}{F_z}(y - y_0)$$

או:

$$F_z(z - z_0) + F_x(x - x_0) + F_y(y - y_0) = 0$$

אם אי אפשר לחלץ את  $z = f(x, y)$  (אם למשל  $F_z = 0$ ) אז אם מחלצים את  $y = g(x, z)$  או  $x = h(y, z)$  אז נקבל את אותה משוואה, לכן אנו דורשים  $\nabla F \neq \vec{0}$ , ששקול לכך ש  $(F_x, F_y, F_z) \neq (0, 0, 0)$ , כלומר אחד מהשלושה  $F_x, F_y, F_z$  שונה מאפס.

### תרגיל 7.7.

נתונה משוואה סתומה:

$$F(x, y, z) = z^2 - e^{x^2+y^2} + (x+y) \sin z = 0$$

1. הראו כי קיימת פונקציה  $z(x, y)$  המקיימת את המשוואה בסביבה של הנקודה  $(0, 0, 1)$ , וחשבו את  $z_x(0, 0)$ ,  $z_y(0, 0)$ .
2. חשבו את משוואת המישור המשיק למשטח הנתון על ידי המשוואה הזו בנקודה  $(0, 0, 1)$ , ואת ישר הנורמל למישור המשיק בנקודה זו בצורה פרמטרית.

### פתרון:

1. ראשית, נשים לב כי  $F(0, 0, 1) = 1 - e^0 = 0$ , שנית, נחשב את הנגזרות החלקיות של  $F$ :

$$F_x = -2xe^{x^2+y^2} + \sin z, \quad F_y = -2ye^{x^2+y^2} + \sin z, \quad F_z = 2z + (x+y) \cos z$$

ובאמת, כל הנגזרות החלקיות רציפות ומתקיים  $F_z(0, 0, 1) = 2 \neq 0$  ולכן ניתן להשתמש במשפט הפונקציה הסתומה ולקבל:

$$\begin{aligned} z_x(0, 0) &= \left[ -\frac{F_x}{F_z} \right]_{(0,0)} = -\frac{0 + \sin(1)}{2} = -\frac{1}{2} \sin(1) \\ z_y(0, 0) &= \left[ -\frac{F_y}{F_z} \right]_{(0,0)} = -\frac{0 + \sin(1)}{2} = -\frac{1}{2} \sin(1) \end{aligned}$$

2. ולכן, עפ"י משפט הווקטור הנורמלי למישור המשיק בנקודה הנ"ל נתון על ידי

$$\begin{aligned} \vec{N} = (F_x, F_y, F_z) &= (-2xe^{x^2+y^2} + \sin z, -2ye^{x^2+y^2} + \sin z, 2z + (x+y) \cos z) \\ &= (0 + \sin(1), 0 + \sin(1), 2 + 0) = (\sin(1), \sin(1), 2) \end{aligned}$$

ולכן המישור המשיק נתון על ידי המשוואה:

$$0 = \langle \vec{N}, (x-0, y-0, z-1) \rangle = \sin(1)(x-0) + \sin(1)(y-0) + 2(z-1)$$

כלומר:

$$\sin(1)x + \sin(1)y + 2z = 2$$

ישר הנורמל נתון על ידי לקיחת הנקודה  $p = (0, 0, 1)$  והוספת כפולה של הווקטור  $\vec{N}$ :

$$\begin{aligned} p + t\vec{N} &= (0, 0, 1) + (t \sin(1), t \sin(1), 2t) \\ &= (t \sin(1), t \sin(1), 2t + 1) \end{aligned}$$

## 7.4 | נגזרות מסדר גבוה

## תזכורת – (נגזרות מסדר גבוה)

תהא  $f(x, y)$  פונקציה סקלרית בשני משתנים, נוכל להתבונן בנגזרות החלקיות השניות של  $f$ :

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right) &:= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f''_{xx} \\ \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial f}{\partial y} \right) &:= \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = f''_{yy} \\ \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial f}{\partial y} \right) &:= \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = f''_{yx} \\ \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right) &:= \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = f''_{xy}\end{aligned}$$

וכן הלאה עבור נגזרות חלקיות מסדר שלישי, רביעי וכו'.

## הערה

שימו לב כי בסימונים השונים, סדר המשתנים שבהם אנו גוזרים שונה!

$$f_{xyz} = ((f_x)_y)_z = \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right) \right) = \frac{\partial^3 f}{\partial z \partial y \partial x}$$

## תזכורת – (סימטריה של נגזרות שניות - משפט אוילר-שוורץ-קלרו)

תהא  $f : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , ותהא  $(x_0, y_0) \in D$ . אם  $f_{xy}$ ,  $f_{yx}$  פונקציות רציפות בסביבה של  $(x_0, y_0)$  אז:

$$f_{xy}(x_0, y_0) = f_{yx}(x_0, y_0)$$

## תרגיל 7.8

תהא  $f(x, y) = x^2 y^{13}$ , חשבו את  $f_x, f_y, f_{xy}, f_{yx}$ .

## פתרון:

נחשב ישירות:

$$\begin{aligned}f_x(x, y) &= 2xy^{13}, & f_y(x, y) &= x^2 \cdot 13y^{12} \\ f_{xy}(x, y) &= (2xy^{13})_y = 26xy^{12}, & f_{yx} &= 26xy^{12}\end{aligned}$$

## תרגיל 7.9

תהא  $f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy^3 - yx^3}{x^2 + y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$  עבור  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ , וחשבו את  $f_x(0, 0), f_y(0, 0)$ .

**פתרון:**

נתחיל מ  $f_x(x, y)$ , ונפצל למקרים.

• אם  $(x, y) \neq (0, 0)$  נקבל:

$$f_x(x, y) = \frac{(y^3 - 3yx^2)(x^2 + y^2) - 2x(xy^3 - yx^3)}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{y^5 - 4x^2y^3 - x^4y}{(x^2 + y^2)^2}$$

$$f_y(x, y) = \frac{(3xy^2 - x^3)(x^2 + y^2) - 2y(xy^3 - yx^3)}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{-x^5 + 4x^3y^2 + xy^4}{(x^2 + y^2)^2}$$

• עבור  $(x, y) = (0, 0)$  נחשב לפי הגדרה,

$$f_x(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h, 0) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0}{h} = 0$$

$$f_y(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0, h) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0}{h} = 0$$

• נחשב את  $f_{xy}(0, 0)$  לפי הגדרה:

$$\begin{aligned} f_{xy}(0, 0) &= (f_x(x, y))_y|_{(x,y)=(0,0)} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f_x(h, 0) - f_x(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f_x(0, h) - f_x(0, 0)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{h^5}{h^4}}{h} = 1 \end{aligned}$$

• נחשב את  $f_{yx}(0, 0)$  לפי הגדרה:

$$f_{yx}(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f_y(h, 0) - f_y(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{-h^5}{h}}{h} = -1$$

**תרגיל 7.10.**

1. תהא  $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ , אשר נסמן  $g(x, y) = \begin{pmatrix} P(x, y) \\ Q(x, y) \end{pmatrix}$  הוכיחו כי אם קיימת  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  גזירה פעמיים ברציפות כך ש  $g(x, y) = \nabla f(x, y)$ , כלומר:

$$g(x, y) = \nabla f(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P(x, y) \\ Q(x, y) \end{pmatrix}$$

אז  $P_y = Q_x$ .

2. האם קיימת פונקציה  $f(x, y)$  כך ש  $\nabla f(x, y) = \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}$ ?

**פתרון:**

1. היות ש  $f$  גזירה ברציפות מתקיים:

$$P_y = \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial f}{\partial y} \right) = Q_x$$

2. ראינו כי  $P_y = Q_x$  הוא תנאי הכרחי לקיום  $f$  כזו, נבדוק:

$$P_y = -1, \quad Q_x = 1$$

וכמובן  $1 \neq -1$ .

**תרגיל 7.11**

יהיו  $a, b \in \mathbb{R}$ , ותהא  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  פונקציה גזירה פעמיים ברציפות, נתון שלכל  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  מתקיים:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) &= 3x + ay^2 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) &= bxy + 2y \end{aligned}$$

וכי  $\frac{\partial f}{\partial y}(1, 1) = 3$  מצאו את  $a, b$ .

**פתרון:**

נתון כי  $f$  גזירה פעמיים ברציפות, ולכן מתקיים:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y).$$

כלומר:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial f}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial x} (bxy + 2y) = by$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y) = \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial y} (3x + ay^2) = 2ay$$

כלומר  $by = 2ay$ , ולכן  $b = 2a$ . בנוסף, נתון כי  $3 = \frac{\partial f}{\partial y}(1, 1) = b + 2$ , ולכן  $a = \frac{1}{2}$ ,  $b = 1$ .

## תרגיל 7.12

תהא  $f(x, y)$  פונקציה גזירה פעמיים ב-2 משתנים, כך שלכל  $x, y$  מתקיים  $f_{xx}(x, y) + f_{yy}(x, y) = 0$ .  
נסמן  $g(x, y) = f(2xy, x^2 - y^2)$ , הוכיחו כי לכל  $x, y$  מתקיים  $g_{xx}(x, y) + g_{yy}(x, y) = 0$ .

## פתרון:

נשתמש בכלל השרשרת, נסמן  $u = 2xy, v = x^2 - y^2$ , אז:

$$g_x(x, y) = f_x(u(x, y), v(x, y)) \cdot u_x(x, y) + f_y(u(x, y), v(x, y)) \cdot v_x(x, y)$$

ולכן:

$$\begin{aligned} g_{xx}(x, y) &= \frac{\partial}{\partial x} (f_x(u(x, y), v(x, y)) \cdot u_x(x, y) + f_y(u(x, y), v(x, y)) \cdot v_x(x, y)) \\ &= u_x(x, y) \cdot (f_{xx}(u(x, y), v(x, y)) \cdot u_x(x, y) + f_{xy}(u(x, y), v(x, y)) \cdot v_x(x, y)) \\ &\quad + \cancel{u_{xx}(x, y)}^0 \cdot f_x(u(x, y), v(x, y)) \\ &\quad + v_x(x, y) (f_{yx}(u(x, y), v(x, y)) u_x(x, y) + f_{yy}(u(x, y), v(x, y)) v_x(x, y)) \\ &\quad + v_{xx}(x, y) f_y(u(x, y), v(x, y)) \end{aligned}$$

נציב:

$$\begin{aligned} g_{xx}(x, y) &= (2y) \cdot (f_{xx}(u(x, y), v(x, y)) \cdot (2y) + f_{xy}(u(x, y), v(x, y)) \cdot (2x)) \\ &\quad + (2x) (f_{yx}(u(x, y), v(x, y)) (2y) + f_{yy}(u(x, y), v(x, y)) (2x)) \\ &\quad + 2f_y(u(x, y), v(x, y)) \end{aligned}$$

נשתמש בכך ש  $f$  גזירה פעמיים ברציפות. בכתוב מקוצר עוד יותר  $f = f(u, v)$  וכדומה, בעצם:

$$g_{xx} = 4y^2 f_{xx} + 8xy f_{xy} + 4x^2 f_{yy} + 2f_y$$

באותו אופן נחשב את  $g_{yy}(x, y)$  (הפעם, נכתוב בכתוב מקוצר,  $u = u(x, y), v = v(x, y)$ ):

$$g_y(x, y) = f_x(u, v) u_y(x, y) + f_y(u, v) v_y(x, y)$$

$$\begin{aligned} g_{yy}(x, y) &= (f_{xx}(u, v) u_y + f_{xy}(u, v) v_y) u_y + \cancel{u_{yy}}^0 f_x(u, v) \\ &\quad + (f_{yx}(u, v) u_y + f_{yy}(u, v) v_y) v_y + f_y(u, v) v_{yy} \end{aligned}$$

נציב:

$$\begin{aligned} g_{yy}(x, y) &= (f_{xx}(u, v)(2x) + f_{xy}(u, v)(-2y)) (2x) \\ &\quad + (f_{yx}(u, v)(2x) + f_{yy}(u, v)(-2y)) (-2y) - 2f_y(u, v) \end{aligned}$$

כלומר:

$$g_{yy} = 4x^2 f_{xx} - 8xy f_{xy} + 4y^2 f_{yy} - 2f_y$$

סה"כ:

$$\begin{aligned} g_{xx} + g_{yy} &= 4y^2 f_{xx} + 8xy f_{xy} + 4x^2 f_{yy} + 2f_y + 4x^2 f_{xx} - 8xy f_{xy} + 4y^2 f_{yy} - 2f_y \\ &= 4x^2 (f_{xx} + f_{yy}) + 4y^2 (f_{xx} + f_{yy}) \\ &= 0 \end{aligned}$$

## 7.5 | נקודות קיצון של פונקציות בשני משתנים

### תזכורת

תהי  $f(x, y)$  פונקציה המוגדרת בתחום  $D \subset \mathbb{R}^2$ . נאמר כי הנקודה  $(x_0, y_0)$  היא:

- **מינימום מקומי** של  $f$ , אם קיימת סביבה של הנקודה  $(x_0, y_0)$ , עבורה מתקיים  $f(x_0, y_0) \leq f(x, y)$ .
  - **מקסימום מקומי** של  $f$ , אם קיימת סביבה של הנקודה  $(x_0, y_0)$ , עבורה מתקיים  $f(x_0, y_0) \geq f(x, y)$ .
- על פי משפט פרמה, אם  $(x_0, y_0)$  נקודת פנים של  $D$ ,  $f_x, f_y$  מוגדרות ב  $(x_0, y_0)$ , אז  $\nabla f(x_0, y_0) = 0$  נגדיר נקודה קריטית (או נקודה חשודה לקיצון) להיות נקודה פנים של התחום  $D$  בה  $\nabla f = 0$ , או שלפחות אחת מהנגזרות החלקיות  $f_x, f_y$  אינה קיימת בה.
- נקרא ל  $(x_0, y_0)$  **נקודת אוכף** של  $f$ , אם  $\nabla f(x_0, y_0) = 0$  ובכל סביבה של הנקודה  $(x_0, y_0)$ , קיימות  $(x, y)$  עבורן  $f(x_0, y_0) \leq f(x, y)$  וקיימות  $(x, y)$  עבורן  $f(x_0, y_0) \geq f(x, y)$ .

### תרגיל 7.13

מצאו את החשודות לקיצון של הפונקציה  $f(x, y) = x\sqrt{y-1} - 2x$  בתחום הגדרתה.

#### פתרון:

נחשב את הנגזרות החלקיות

$$f_x = \sqrt{y-1} - 2$$

$$f_y = \frac{x}{2\sqrt{y-1}}$$

זאת אומרת שכאשר  $y = 1$  הנגזרת החלקית לפי  $y$  אינה מוגדרת (למרות שזה אכן בתחום ההגדרה של  $f$ ). בנוסף, נבדוק התאפסות:

$$f_x = \sqrt{y-1} - 2 = 0$$

$$f_y = \frac{x}{2\sqrt{y-1}} = 0$$

מהמשוואה השנייה נקבל  $x = 0$  ומהראשונה נקבל  $\sqrt{y-1} = 2 \Leftrightarrow y-1 = 4 \Leftrightarrow y = 5$ . סך הכול קיבלנו שהחשודות לקיצון הן כל הנקודות מהצורה  $(x, 1)$  והנקודה הבודדת  $(0, 5)$ .

### תרגיל 7.14

מצאו קיצון מוחלט לפונקציה:

$$f(x, y) = x^2 - 2xy + 2y^2 - 4y$$

**פתרון:**

ראשית, נמצא את החשודות לקיצון. נגזור את הפונקציה ונקבל:

$$\begin{aligned}f_x &= 2x - 2y \\f_y &= -2x + 4y - 4\end{aligned}$$

הנגזרות החלקיות מוגדרות בכל המישור, אז נבדוק מתי הן מתאפסות:

$$\begin{aligned}2x - 2y &= 0 \\-2x + 4y - 4 &= 0\end{aligned}$$

מהמשוואה הראשונה לקבל ש- $x = y$ , אז נציב במשוואה השנייה ונקבל

$$\begin{aligned}-2x + 4x - 4 &= 0 \\2x &= 4 \\x &= 2\end{aligned}$$

ולכן הנקודה הקריטית היחידה היא  $(2, 2)$ .

שימו לב - זה לא אומר כלום עדיין! אנחנו נוכיח ידנית שזוהי אכן נקודת קיצון (מוחלטת) של הפונקציה. כלומר, ננסה להוכיח שבה מתקבל הערך הקטן ביותר של הפונקציה, באמצעות השלמה לריבוע. נשים לב כי

$$\begin{aligned}f(x, y) &= x^2 - 2xy + 2y^2 - 4y \\&= x^2 - 2xy + y^2 + y^2 - 4y + 4 - 4 \\&= (x - y)^2 + (y - 2)^2 - 4 \geq -4\end{aligned}$$

ועבור  $x = y = 2$  נקבל את הערך  $-4 = (2 - 2)^2 + (2 - 2)^2 - 4 = f(2, 2)$ . הוכחנו שלכל נקודה, ערך הפונקציה גדול או שווה ל-4, אך בנקודה  $(2, 2)$  מתקבל הערך -4. כעת נותר להראות שלכל נקודה אחרת מתקבל ערך גדול מ-4. נשים לב ששוויון מתקיים אמ"ם שני הריבועים במשוואה מתאפסים, כלומר

$$x = y, \quad y = 2$$

כלומר הנקודה היחידה שבה מתקבל הערך המינימלי היא  $(2, 2)$  ולכן זהו מינימום מוחלט. התבוננות בפונקציה תראה לנו כי אין לה נקודת מקסימום מוחלטת, היות והיא לא חסומה.

**תרגיל 7.15**

בהינתן פונקציה  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  גזירה בכל הישר, נגדיר את הסיבוב שלה סביב ציר ה- $z$  להיות פונקציה  $g(x, y) = f(\sqrt{x^2 + y^2})$ . הראו שאם  $f'(a) = 0$  עבור  $a \in \mathbb{R}$ , אז כל נקודה  $(x, y)$  המקיימת  $x^2 + y^2 = a^2$  היא נקודה קריטית של  $g$ .

**פתרון:**

נגזור באמצעות כלל השרשרת ונקבל:

$$\nabla g = \left( \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} f'(\sqrt{x^2 + y^2}), \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} f'(\sqrt{x^2 + y^2}) \right)$$

כעת, אם  $a \neq 0$  אז אכן מתקיים  $\nabla g(x, y) = \left( \frac{x}{a} f'(a), \frac{y}{a} f'(a) \right) = (0, 0)$ , ואם  $a = 0$  אז  $\nabla g$  אינה מוגדרת. בשני המקרים קיבלנו שמדובר בנקודה קריטית של  $g$ .

**תרגיל 7.16**

1. תהא  $f(x, y) : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  פונקציה אי-שלילית, כלומר, לכל  $(x, y) \in D$ ,  $f(x, y) \geq 0$ . נסמן  $g(x, y) = (f(x, y))^2$ . הוכיחו כי  $(x_0, y_0)$  נקודת קיצון מקומית של  $f(x, y)$  אם ורק אם היא נקודת קיצון מקומית (מאותו סוג) של  $g(x, y)$ . בנוסף הוכיחו כי  $(x_0, y_0)$  נקודת קיצון גלובלית של  $f(x, y)$  אם ורק אם היא נקודת קיצון גלובלית של  $g(x, y)$ .

2. האם הטענה הקודמת נכונה עבור  $f(x, y)$  שאינה אי-שלילית?

**פתרון:**

1. בה"כ נראה כי הטענה נכונה עבור נקודת מקסימום, נשאיר כתרגיל להכליל את ההוכחה עבור נקודות מינימום מקומית, ונקודות קיצון גלובלית.

נשתמש בטענה כי אם  $0 < a < b$ , אז  $a > 0$ .

נניח כי  $(x_0, y_0)$  נקודת מקסימום מקומית של  $f$ , נסמן  $f(x_0, y_0) = c$ , אז קיימת סביבה  $D_1$  של  $(x_0, y_0)$  כך ש:

$$\forall (x, y) \in D_1 \implies 0 \leq f(x, y) \leq f(x_0, y_0)$$

ובגלל שהכל חיובי זה גורר:

$$\forall (x, y) \in D_1, 0 \leq (f(x, y))^2 \leq (f(x_0, y_0))^2$$

כלומר  $(x_0, y_0)$  נקודת מקסימום מקומית של  $(f(x, y))^2$ .

הכיוון השני דומה מאוד, אם  $(x_0, y_0)$  מקסימום מקומית של  $g(x, y)$ , אז קיימת סביבה  $D_2$  בה:

$$\forall (x, y) \in D_2, 0 \leq g(x, y) \leq g(x_0, y_0)$$

אבל בגלל שהכל חיובי:

$$\forall (x, y) \in D_2, 0 \leq \sqrt{g(x, y)} \leq \sqrt{g(x_0, y_0)}$$

כלומר  $(x_0, y_0)$  מקסימום מקומית של  $f(x, y)$ .

עבור מקסימום גלובלי ההוכחה מאוד דומה, ומושארת כתרגיל.

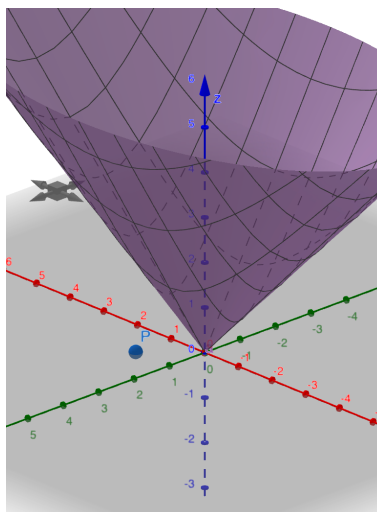
2. הטענה לא נכונה, למשל עבור  $f(x, y) = x$ , אין לה נקודות קיצון ב  $\mathbb{R}^2$ , אבל  $(f(x, y))^2 = x^2$  יש נקודת מינימום גלובלי ב  $(0, 0)$  (ולמעשה בכל  $(0, 0)$ ).

## תרגיל 7.17.

מחי הנקודה הקרובה ביותר בין  $z = \sqrt{x^2 + 3y^2}$  לבין  $P = (1, 1, 0)$ .

**פתרון:**

ראשית, נשרטט את הבעיה לראות במה מדובר:



המרחק בין נקודה בגרף ו- $P$  הוא:

$$D(x, y) = d\left(P, \left(\begin{array}{c} x \\ y \\ \sqrt{x^2 + 3y^2} \end{array}\right)\right) = \sqrt{(1-x)^2 + (1-y)^2 + (\sqrt{x^2 + 3y^2})^2}$$

נשים לב כי מינימום של  $D$  יהיה גם מינימום של  $K = D^2$ , ויהיה יותר נוח לעבוד בלי שורש, אז:

$$\begin{aligned} K(x, y) &:= D(x, y)^2 = (1-x)^2 + (1-y)^2 + x^2 + 3y^2 = 1 - 2x + x^2 + 1 - 2y + y^2 + x^2 + 3y^2 \\ &= 2 - 2x - 2y + 2x^2 + 4y^2 \end{aligned}$$

נגזור:

$$\nabla K(x, y) = \begin{pmatrix} 4x - 2 \\ 8y - 2 \end{pmatrix} = 0 \iff \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

מחקירת הבעיה, אנו מיד יודעים כי מדובר בנקודת מינימום, אז:

$$z = \sqrt{x^2 + 3y^2} = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{16}} = \frac{\sqrt{7}}{4}$$

ולכן הנקודה הינה:

$$\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{\sqrt{7}}{4}\right)$$

## תרגיל 7.18

יהא הגליל  $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x^2 + y^2 = 1\}$ . ותהא הפונקציה  $f(x, y, z) = 2x^2 + y^2 + z^2$ . מצאו את נקודות הקיצון המקומיות של  $f$  על קבוצה  $A$  (אין צורך לסווג את סוג הנקודות).

**פתרון:**

דבר ראשון נשים לב לשוני בתרגיל הזה מקודמיו, כאן אנחנו מחפשים נקודות קיצון של פונקציה רק בחלק מתחום הגדרתה. נשים לב כי כל נקודה ב- $A$  אפשר לכתוב בצורה הבאה:

$$(x, y, z) = (\cos \theta, \sin \theta, h)$$

כלומר, אם נגדיר  $g(\theta, h) = f(\cos \theta, \sin \theta, h)$  אז  $(x, y, z) = (\cos \theta, \sin \theta, h)$  נקודת מינימום של  $F$  בקבוצה  $A$ , אז  $(\theta, h)$  נקודת מינימום של  $g$ .  
 $g$  כמובן פונקציה גזירה ברציפות שמוגדרת בכל  $\mathbb{R}^2$ . אז אם  $(\theta, h)$  אז נקודות הקיצון שלה הן נקודות קריטיות, כלומר  $\nabla g(\theta, h) = 0$ .

$$g(\theta, h) = 2 \cos^2 \theta + \sin^2 \theta + h^2 = 1 + \cos^2 \theta + h^2$$

$$\nabla g(\theta, h) = \begin{pmatrix} -2 \sin(2\theta) \\ 2h \end{pmatrix} = 0 \iff \begin{cases} h = 0 \\ \theta \in \{0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}\} \end{cases}$$

כלומר, נקודות הקיצון המקומיות של  $f$  על  $A$  הן:

$$(1, 0, 0), \quad (0, 1, 0), \quad (0, -1, 0), \quad (-1, 0, 0)$$

ועליהן מתקיים:

$$f(1, 0, 0) = f(-1, 0, 0) = 2, \quad f(0, 1, 0) = f(0, -1, 0) = 1$$

## תרגול שמיני

### 8.1 | כופלי לגרנז' עם אילוץ יחיד

#### תרגיל 8.1

הוכיחו או הפריכו, תהא  $f : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  פונקציה, ותהא  $A \subset D$ , נגדיר  $g : A \rightarrow \mathbb{R}$  על ידי  $g(x) = f(x)$ , (כלומר  $g$  הצמצום של  $f$  לקבוצה  $A$ , נפוץ לסמן זאת גם ע"י  $g = f|_A$ ). הוכיחו אם הפריכו, אם  $p \in A$  נקודת קיצון של  $g$ , ו  $p \in D$  נקודת פנים של  $D$ , אז  $\nabla g(p) = 0$ .

#### פתרון:

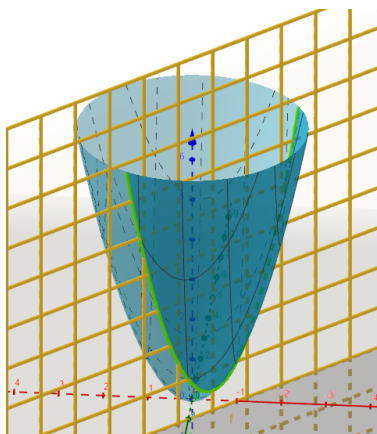
הטענה אינה נכונה. נתבונן ב- $f(x, y) = x^2 + y^2$  בתחום  $D = \mathbb{R}^2$ , יש לה נקודת קיצון יחידה ב- $(0, 0)$ , אבל בתחום  $A = \{(x, y) | y = x + 1\}$ , הפונקציה מקבלת את הצורה:

$$f(x, y) = x^2 + (x + 1)^2 = 2x^2 + 2x + 1$$

שזו פונקציה עם נקודת קיצון יחידה:

$$\begin{cases} (2x^2 + 2x + 1)' = 0 \\ y = x + 1 \end{cases} \implies 4x = -2 \implies x = -\frac{1}{2} \implies (x, y) = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

שזו כמובן לא נקודת קיצון של  $f$ , בפרט,  $\nabla f\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \neq \vec{0}$ . נוכל לראות מה קורה כאן אם נשרטט את הגרף של הפונקציה, יחד עם הקבוצה  $x = y + 1$ .



## תרגיל 8.2

תהא  $f(x, y) = e^{2xy}$ , מצאו את המקסימום של  $f(x, y)$  בקבוצה  $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 - 1 = 0\}$ .

## פתרון:

נשים לב כי  $A$  הוא מעגל היחידה, אז ניסוח שקול לשאלה הוא למצוא את המקסימום של הפונקציה:

$$F(\theta) = f(1 \cdot \cos(\theta), 1 \cdot \sin(\theta)) = e^{2 \cos(\theta) \sin(\theta)} = e^{\sin(2\theta)}$$

נגזור:

$$F'(\theta) = 2 \cos(2\theta) e^{\sin(2\theta)} = 0 \iff \theta \in \left\{ \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4} \right\}$$

אפשר לבדוק את הערכים אחד-אחד ולקבל כי  $F(\theta)$  מקבלת מקסימום כאשר  $\theta = \frac{\pi}{4}$  (למעשה זה לא המקסימום היחיד). כלומר המקסימום הינו:

$$F\left(\frac{\pi}{4}\right) = e^{\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)} = e$$

## תזכורת – (כופלי לגרנז' של פונקציה עם 2 משתנים ואילוץ יחיד)

יהיו  $f, g : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  פונקציות גזירות ברציפות. אנו רוצים למצוא את נקודות הקיצון של  $f(x, y)$  כאשר אנו מגבילים את התחום ל:

$$f : \{(x, y) \in D | g(x, y) = 0\} \rightarrow \mathbb{R}$$

משפט כופלי לגרנז' אומר כי: אם  $P = (x_0, y_0)$  נקודה פנימית של  $D$  המקיימת  $\nabla g(P) \neq \vec{0}$ ,  $P \in \{(x, y) \in D | g(x, y) = 0\}$  אז קיים  $\lambda \in \mathbb{R}$  כך ש:

$$\nabla f(p) = \lambda \nabla g(p).$$

## הערה

עוד דרך לנסח את התנאי האחרון היא להגדיר פונקציית לגרנז':

$$L(x, y, \lambda) = f(x, y) - \lambda g(x, y)$$

ואז:

$$\nabla L(x, y, \lambda) = 0 \iff \begin{pmatrix} f_x(x, y) - \lambda g_x(x, y) \\ f_y(x, y) - \lambda g_y(x, y) \\ g(x, y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} \nabla f(x, y) = \lambda \nabla g(x, y) \\ g(x, y) = 0 \end{cases}$$

## הערה

המשפט נותן לנו דרך לבדוק האם נקודה המקיימת  $\nabla g(x_0, y_0) \neq 0$  היא נקודת קיצון תחת האילוץ. נצטרך לבדוק את הנקודות המקיימות  $\nabla g(x_0, y_0) = 0$  פרטנית.

## הערה

לפעמים, הקבוצה  $g(x, y) = 0$  היא גרף של פונקציה (או עקום), אז נוכל להמנע מלהשתמש בכופלי לגרנד', למשל בדוגמאות הקודמות. למעשה, הרעיון של כופלי לגרנד' זה להפעיל את משפט הפונקציה הסתומה על  $g(x, y)$  ולהתקדם כאילו  $g(x, y) = g(x, y(x))$  היא גרף של פונקציה, במילים אחרות: נניח כי אנו מחפשים את הקיצון של  $f(x, y)$  כאשר  $g(x, y) = 0$ , אם  $\nabla g(p) \neq 0$ , אז ניתן לחלץ  $y = F(x)$  (או  $x = G(y)$ ) כך ש  $y = F(x) \iff g(x, y) = 0$  בסביבה של  $p$ . אז נקודות הקיצון של  $f$ , בקבוצה  $g(x, y) = 0$  חייבות לקיים  $\frac{\partial}{\partial x} f(x, F(x)) = 0$  אז:

$$0 = \frac{\partial}{\partial x} f(x, F(x)) = f_x(x, y) + f_y(x, y) y'(x) = f_x(x, y) - f_y(x, y) \frac{g_x(x, y)}{g_y(x, y)} \Rightarrow f_x g_y = f_y g_x$$

ובדיקה מהירה תראה כי:

$$f_x g_y = f_y g_x \iff \exists \lambda, \quad \nabla f = \lambda \nabla g.$$

## תרגיל 8.3

מצאו את נקודת הקיצון של  $f(x, y) = x + y$  בקבוצה  $A = \{(x, y) | x^4 + y^4 = 10\}$ .

## פתרון:

ראשית נשים לב כי  $A$  קבוצה חסומה וסגורה (תרגיל עצמי - הראו זאת!), ו  $f$  פונקציה רציפה, אז לפי משפט ויירשטראס,  $f$  מקבלת את ערכי הקיצון שלה על  $A$ .

נמצא את ערכי הקיצון של  $f$  על  $A$  בעזרת כופלי לגרנד'. נגדיר  $g(x, y) = x^4 + y^4 - 10$ , אז  $A = \{(x, y) | g(x, y) = 0\}$ . נשים לב כי  $(0, 0) \in A$   $\iff (x, y) = (0, 0) \iff \nabla g(x, y) = \begin{pmatrix} 4x^3 \\ 4y^3 \end{pmatrix} = \vec{0}$  אבל  $g(0, 0) = -10 \neq 0$  אז  $(x, y) \in A$  לכל  $\nabla g(x, y) \neq 0$ . נניח כי  $\nabla f(x, y) = \lambda \nabla g(x, y)$  ו  $g(x, y) = 0$  אז:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 4x^3 \\ 4y^3 \end{pmatrix} \implies \begin{cases} 1 = 4\lambda x^3 \\ 1 = 4\lambda y^3 \end{cases}$$

כלומר  $x^3 = y^3$ , כלומר  $x = y$ , נציב במשוואה  $g(x, y) = 0$  ונקבל:

$$2x^4 = 10 \implies x = y = \pm \sqrt[4]{5}$$

כלומר נקודות הקיצון שלנו הן  $(\sqrt[4]{5}, \sqrt[4]{5})$  ו  $(-\sqrt[4]{5}, -\sqrt[4]{5})$ , נבדוק את ערכי  $f$  בנקודות אלו:

$$f(\sqrt[4]{5}, \sqrt[4]{5}) = 2\sqrt[4]{5}, \quad f(-\sqrt[4]{5}, -\sqrt[4]{5}) = -2\sqrt[4]{5}$$

כלומר  $(\sqrt[4]{5}, \sqrt[4]{5})$  היא נקודת מקסימום, ו  $(-\sqrt[4]{5}, -\sqrt[4]{5})$  היא נקודת מינימום.

## תרגיל 8.4

זהו תרגיל ממבחן.

מצאו מינימום ומקסימום מוחלטים עבור הפונקציה  $f(x, y) = e^{-xy}$  באליפסה  $x^2 + 4y^2 \leq 1$ .

## פתרון:

נשים לב כי הקבוצה  $x^2 + 4y^2 \leq 1$  היא סגורה וחסומה (קבוצה כזו נקראת גם קומפקטית), אז משפט ויירשטראס מבטיח לנו נקודות קיצון מוחלטות. נחלק את התרגיל לשני חלקים, קודם נמצא את הנקודות הקיצון בפנים האליפסה, כלומר בקבוצה  $x^2 + 4y^2 < 1$ , ולאחר מכן נמצא את נקודות הקיצון על שפת האליפסה, כלומר בקבוצה  $x^2 + 4y^2 = 1$ .

1. בפנים האליפסה, על פי משפט פרמה, נקודות הקיצון חייבות לאפס את  $\nabla f$ , כלומר:

$$\nabla f(x, y) = \begin{pmatrix} -ye^{xy} \\ -xe^{xy} \end{pmatrix} = 0 \iff (x, y) = (0, 0)$$

2. כעת נחפש נקודות קיצון על שפת האליפסה, כלומר על  $x^2 + 4y^2 = 1$ , נשים לב שאם נגדיר  $g(x, y) = x^2 + 4y^2 - 1$ , אז אנו מחפשים נקודות קיצון ל  $f$ , תחת האילוץ  $g(x, y) = 0$ .  $f, g$  גזירות ברציפות. נגדיר:

$$L(x, y, \lambda) = f(x, y) - \lambda g(x, y) = e^{-xy} - \lambda(x^2 + 4y^2 - 1)$$

ואז:

$$\nabla L(x, y, \lambda) = 0 \iff \begin{cases} L_x(x, y, \lambda) = -ye^{xy} - \lambda(2x) = 0 \\ L_y(x, y, \lambda) = -xe^{xy} - \lambda(8y) = 0 \\ L_\lambda(x, y, \lambda) = x^2 + 4y^2 - 1 = 0 \end{cases}$$

נשים לב כי:

$$x = 0 \Rightarrow L_x(0, y, \lambda) = -y = 0$$

כלומר  $x = 0 \Rightarrow y = 0$ , אבל  $(x, y) = (0, 0)$  לא מקיימת את האילוץ שלנו (או באופן שקול, מתקיים  $(L_\lambda(0, 0, \lambda) \neq 0$  אז  $x \neq 0$ . באופן שקול אפשר לראות כי  $y \neq 0$ , אז אפשר לחלק ב  $x$  ובעזרת המשוואות:

$$\begin{aligned} \begin{cases} -\frac{y}{x}e^{xy} - 2\lambda = 0 \\ -\frac{x}{y}e^{xy} - 8\lambda = 0 \\ x^2 + 4y^2 - 1 = 0 \end{cases} &\implies \begin{cases} -4\frac{y}{x}e^{xy} - 8\lambda = 0 \\ -\frac{x}{y}e^{xy} - 8\lambda = 0 \\ x^2 + 4y^2 - 1 = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} -4\frac{y}{x}e^{xy} = 8\lambda \\ -\frac{x}{y}e^{xy} = 8\lambda \\ x^2 + 4y^2 - 1 = 0 \end{cases} \\ &\implies 4\frac{y}{x}e^{xy} = \frac{x}{y}e^{xy} \implies x^2 = 4y^2 \end{aligned}$$

נציב במשוואה השלישית:

$$\begin{cases} x^2 + 4y^2 - 1 = 0 \\ x^2 = 4y^2 \end{cases} \implies 2x^2 - 1 = 0 \implies x = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \implies y^2 = \frac{1}{8} \implies y = \pm \frac{1}{2\sqrt{2}}$$

בעצם קיבלנו 4 נקודות חשודות:

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2\sqrt{2}}\right), \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2\sqrt{2}}\right), \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{2\sqrt{2}}\right), \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)$$

נשאר לנו לבדוק את הנקודות המקיימות  $g(x, y) = 0$ ,  $\nabla g(x, y) = 0$  ואכן:

$$\nabla g(x, y) = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} 2x \\ 8y \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow (x, y) = (0, 0)$$

$$g(x, y) = -1 \neq 0$$

נחשב את  $f(x, y)$  בכל הנקודות החשודות:

$$f(0, 0) = 1$$

$$f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2\sqrt{2}}\right) = e^{-\frac{1}{4}}$$

$$f\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2\sqrt{2}}\right) = e^{\frac{1}{4}}$$

$$f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{2\sqrt{2}}\right) = e^{\frac{1}{4}}$$

$$f\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{2\sqrt{2}}\right) = e^{-\frac{1}{4}}$$

כלומר המינימום מתקבל ב  $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)$ ,  $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2\sqrt{2}}\right)$  והמקסימום ב  $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2\sqrt{2}}\right)$ ,  $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)$ .

## תרגיל 8.5.

זהו תרגיל ממבחן.

יהא  $a > 1$ . מהי הנקודה הקרובה ביותר ל  $A = (1, 2)$  על המעגל  $x^2 + y^2 = 5a^2$ .

**פתרון:**

המרחק של  $(x, y)$  מ  $A$  היא הפונקציה:

$$\tilde{f}(x, y) = \sqrt{(x-1)^2 + (y-2)^2}$$

אז בעצם אנו שואלים, מהם נקודות הקיצון של  $\tilde{f}(x, y)$  שמקיימות:

$$x^2 + y^2 = 5a^2 \iff g(x, y) := x^2 + y^2 - 5a^2, \quad g(x, y) = 0$$

נבצע את הטריק הבא (שהשתמשנו בו מספר פעמים כבר לאורך הקורס), ונחפש נקודות קיצון לפונקציה  $f(x, y) = (\tilde{f}(x, y))^2 = (x-1)^2 + (y-2)^2$  תחת האילוץ  $g(x, y) = 0$ . וזאת שאלה שנפתור בעזרת

כופלי לגרנד'.  $f, g$  גזירות ברציפות. פונקציה הלגרנד' שלנו היא:

$$L(x, y, \lambda) = f(x, y) - \lambda g(x, y) = (x-1)^2 + (y-2)^2 - \lambda(x^2 + y^2 - 5a^2)$$

כלומר:

$$\nabla L(x, y, \lambda) = 0 \iff \begin{cases} 2(x-1) - \lambda(2x) = 0 \\ 2(y-2) - \lambda(2y) = 0 \\ x^2 + y^2 - 5a^2 = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} 2(x-1) = 2\lambda x \\ 2(y-2) = 2\lambda y \\ x^2 + y^2 - 5a^2 = 0 \end{cases}$$

מהמשוואה הראשונה והשנייה אנו יודעים כי  $x \neq 0$  וגם  $y \neq 0$ , אז קיבלנו:

$$\frac{2x-2}{x} = \lambda = \frac{2y-4}{y} \implies 2xy - 2y = 2xy - 4x \implies y = 2x$$

נציב במשוואה השלישית:

$$x^2 + (2x)^2 - 5a^2 = 0 \implies 5x^2 = 5a^2 \implies x = \pm a$$

כלומר יש לנו שתי נקודות חשודות לקיצון תחת האילוץ:

$$(a, 2a), (-a, -2a)$$

נבדוק מתי  $\nabla g(x, y) = 0$ , ואכן:

$$\nabla g(x, y) = 0 \iff \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \end{pmatrix} = 0 \iff x = y = 0$$

אבל  $g(0, 0) = -5a^2 \neq 0$ .

נבדוק את נקודות הקיצון שלנו:

$$f(a, 2a) = (a-1)^2 + (2a-2)^2$$

$$f(-a, -2a) = (-a-1)^2 + (-2a-2)^2 = (a+1)^2 + (2a+2)^2 > f(a, 2a)$$

נשים לב כי הקבוצה  $g(x, y) = 0$  היא סגורה וחסומה, וכי הפונקציה  $f(x, y)$  רציפה בכל  $\mathbb{R}^2$ , לכן לפי משפט ויירשטראס,  $f(x, y)$  מקבלת את ערכי הקיצון שלה תחת האילוץ  $g(x, y) = 0$ . כלומר,  $(-a, -2a)$  היא המקסימום הגלובלי של  $f$  - כלומר הנקודה הרחוקה ביותר מ- $A$ , ו- $(a, 2a)$  היא המינימום הגלובלי, כלומר הנקודה הקרובה ביותר.

## תרגיל 8.6.

יהא  $r > 0$ . מצאו את אורכי הצלעות של מלבן המקביל לצירים בעל שטח מקסימלי, התחום במעגל

$$x^2 + y^2 = r^2$$

**פתרון:**

נשים לב כי מלבן כנ"ל נקבע עפ"י נקודה על המעגל, כלומר, כל מלבן נחתך ב- $(x, y)$  יחיד על המעגל המקיים  $x \geq 0, y \geq 0$ , והשטח שלו הוא  $2x \cdot 2y = 4xy$ .  
 כלומר התרגיל שלנו הוא למקסם את  $f(x, y) = 4xy$  בתחום  $x, y \geq 0$  תחת האילוץ  $x^2 + y^2 = r^2$ .  
 נפתור את התרגיל בשתי דרכים:

1. עם כופלי לגראנז':

$$g(x, y) = x^2 + y^2 - r^2$$

$f, g$  גזירות ברציפות.

$$L(x, y, z) = 4xy - \lambda(x^2 + y^2 - r^2)$$

אז:

$$\nabla L = 0 \iff \begin{pmatrix} 4y - \lambda(2x) \\ 4x - \lambda(2y) \\ x^2 + y^2 - r^2 \end{pmatrix} = 0 \iff \begin{cases} 4y = 2x\lambda \\ 4x = 2y\lambda \\ x^2 + y^2 = r^2 \end{cases}$$

אם  $x = 0$  או  $y = 0$ , נקבל מלבן משטח אפס - אז אפשר להניח כי  $x \neq 0$  ו- $y \neq 0$ . נחלק את המשוואות ב- $2x$  ו- $2y$ .

$$\frac{4y}{2x} = \lambda = \frac{4x}{2y} \implies x = \pm y$$

נציב במשוואה השלישית ונקבל:

$$2x^2 = r^2 \implies x = \pm \frac{r}{\sqrt{2}}$$

קיבלנו 4 נקודות, רק  $\left(\frac{r}{\sqrt{2}}, \frac{r}{\sqrt{2}}\right)$  בתחום שלנו (כל הנקודות נופלות על אותו מלבן). יחד עם הנקודות  $(0, r), (r, 0)$ , שכבר קבענו שמדובר בנקודות מינימום.

משום ש  $f(x, y)$  רציפה על הקבוצה הסגורה והחסומה  $g(x, y) = 0$ , היא משיגה את חסמיה, כלומר המלבן הנקבע ע"י  $\left(\frac{r}{\sqrt{2}}, \frac{r}{\sqrt{2}}\right)$  הוא בעל שטח מקסימלי.

2. נשים לב כי התחום שלנו,  $x^2 + y^2 = r^2$  הוא מסילה,  $\gamma(t) = (r \cos(t), r \sin(t))$ , שוב, בגלל שנקודה אחת קובעת את המלבן, מספיק להתבונן על התחום  $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$  (רבע מעגל), כלומר, אנו רוצים למצוא את המקסימום של:

$$f(\gamma(t)) = 4r^2 \cos(t) \sin(t)$$

(שוב, אנו יודעים כי  $t = 0$  או  $t = \frac{\pi}{2}$  נקודות מינימום, כי הן קובעות מלבן בעל שטח אפס) נגזור:

$$\frac{\partial}{\partial t} f(\gamma(t)) = 4r^2 (\cos(t) \cdot \cos(t) + \sin(t) \cdot (-\sin(t))) = 4r^2 (\cos^2(t) - \sin^2(t)) = 4r^2 \cos(2t)$$

נשווה ל-0 ונקבל  $t = \frac{\pi}{4} \implies 2t = \frac{\pi}{2}$ , כלומר הנקודה שלנו היא:

$$\left(r \cos\left(\frac{\pi}{4}\right), r \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) = \left(\frac{r}{\sqrt{2}}, \frac{r}{\sqrt{2}}\right)$$

והיא מקסימום מקומי מאותה סיבה כמו בפתרון על כופלי לגראנז'.

## תזכורת – (כופלי לגרנד' של פונקציה עם 3 משתנים ואילוץ יחיד)

יהיו  $f, g : D \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  פונקציות גזירות ברציפות, אם  $P = (x_0, y_0, z_0)$  נקודה פנימית של  $D$  המקיימת  $g(P) = 0, \nabla g(P) \neq 0$  ו  $P$  נקודת קיצון של  $f$  תחת האילוץ  $g(x, y, z) = 0$  אז קיים  $\lambda \in \mathbb{R}$  כך ש:

$$\nabla f(p) = \lambda \nabla g(p)$$

או באופן שקול, אם נסמן  $L(x, y, z, \lambda) = f(x, y, z) - \lambda g(x, y, z)$  אז  $\nabla L(x, y, z, \lambda) = 0$ .

## הערה

המקרה הזה מאוד דומה למקרה של 2 משתנים ואילוץ אחד.

## תרגיל 8.7.

מצאו את המקסימום של הפונקציה  $f(x, y, z) = 2x^2 + y + z$ , בקבוצה:

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1$$

## פתרון:

ראשית, הקבוצה  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$  סגורה וחסומה,  $f$  רציפה בה, אז היא מקבלת את חסמיה. נסמן  $g(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1$ , כל הפונקציות בשאלה גזירות ברציפות. נפעיל כופלי לגרנד'

$$L(x, y, z, \lambda) = 2x^2 + y + z - \lambda(x^2 + y^2 + z^2 - 1)$$

אז:

$$\nabla L(x, y, z, \lambda) = \begin{pmatrix} 4x - 2x\lambda \\ 1 - 2y\lambda \\ 1 - 2z\lambda \\ x^2 + y^2 + z^2 - 1 \end{pmatrix} = \vec{0} \Rightarrow \begin{cases} 4x - 2x\lambda = 0 \\ 1 - 2y\lambda = 0 \\ 1 - 2z\lambda = 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0 \end{cases}$$

מהמשוואה השנייה  $\lambda \neq 0$ , ומהמשוואה השלישית והרביעית  $z = y = \frac{1}{2\lambda}$ ,

$$\begin{cases} 4x - 2x \frac{1}{2y} = 0 \\ x^2 + 2y^2 = 1 \end{cases}$$

אם  $x = 0$ , אז  $y = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$ , ונקבל שתי נקודות:

$$P_1 = \left(0, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right), \quad P_2 = \left(0, -\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

אם  $x \neq 0$ , אז מהמשוואה הראשונה נקבל:

$$4 - \frac{1}{y} = 0 \Rightarrow y = \frac{1}{4} \Rightarrow x^2 = 1 - 2 \frac{1}{4^2} = \frac{7}{8} \Rightarrow x = \pm \sqrt{\frac{7}{8}}$$

ולכן:

$$P_3 = \left( \sqrt{\frac{7}{8}}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4} \right), \quad P_4 = \left( -\sqrt{\frac{7}{8}}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4} \right)$$

ולבסוף נבדוק את הנקודות בהן  $\nabla g(p) = 0$ , ומהר נראה כי אין כאלה שמקיימות  $g(p) = 0$ .  
נחשב:

$$f(P_3) = f(P_4) = 2\frac{7}{8} + 2\frac{1}{4} = \frac{9}{4}$$

$$f(P_1) = \sqrt{2} < \frac{9}{4}, \quad f(P_2) = -\sqrt{2}$$

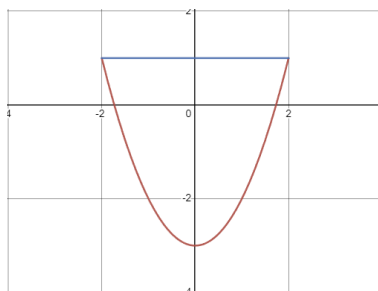
נסיק כי  $P_3, P_4$  נקודות מקסימום ו  $P_2$  נקודת מינימום.

### תרגיל 8.8.

מצאו את נקודות הקיצון המוחלט עבור הפונקציה  $f(x, y) = xy$  בתחום החסום ע"י  $y = 1, y = x^2 - 3$ .

**פתרון:**

נשים לב כי  $f$  גזירה ברציפות בכל  $\mathbb{R}^2$ , וכי התחום סגור וחסום. נשרטט את התחום, ונקבל:



נחלק את הפתרון לפנים התחום ולשפת התחום.

1. בפנים התחום, הנקודות החשודות לקיצון מאפסות את  $\nabla f$ , ואכן  $\nabla f = \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix}$  כלומר, מדובר בנקודה אחת,  $(x, y) = (0, 0)$ , והיא אכן בתחום שלנו. נסמן  $P_1 = (0, 0)$ .

2. נחלק את השפה שלנו ל-2 חלקים,  $B_1 = \{(x, 1) | x \in [-2, 2]\}$  ו  $B_2 = \{(x, x^2 - 3) | x \in [-2, 2]\}$ .  
על  $B_1$  הפונקציה שלנו היא  $f(x, 1) = x$ , שמקבלת נקודת קיצון ב  $P_2 = (2, 1), P_3 = (-2, 1)$ .

על  $B_2$  הפונקציה שלנו היא:

$$f(x, x^2 - 3) = x^3 - 3x$$

נגזור ונשווה ל-0 ונקבל

$$3x^2 - 3 = 0 \implies x^2 - 1 = 0$$

כלומר  $P_4 = (1, -2), P_5 = (-1, -2)$  (נקודות השפה  $x = \pm 2$  הן  $P_2, P_3$ ).

כלומר סה"כ יש לנו 5 נקודות חשודות, נבדוק אותן:

$$\begin{aligned} P_1 &= (0, 0) \Rightarrow f(0, 0) = 0 \\ P_2 &= (2, 1) \Rightarrow f(2, 1) = 2 \\ P_3 &= (-2, 1) \Rightarrow f(-2, 1) = -2 \\ P_4 &= (1, -2) \Rightarrow f(1, -2) = -2 \\ P_5 &= (-1, -2) \Rightarrow f(-1, -2) = 2 \end{aligned}$$

$f$  רציפה בתחום סגור וחסום  $D$ , ולכן משיגה את חסמיה, כלומר  $P_2, P_5$  נקודות מקסימום מוחלט של  $f$  בתחום  $D$  ו  $P_3, P_4$  נקודות מינימום מוחלט של  $f$  בתחום  $D$ .

## 8.2 | כופלי לגרנז' עם שני אילוצים

תזכורת – (כופלי לגרנז' עם שני אילוצים)

יהיו  $f, g_1, g_2 : D \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ , פונקציות גזירות ברציפות. נחפש את נקודות הקיצון של  $f$  תחת האילוצים:

$$\{(x, y, z) | g_1(x, y, z) = g_2(x, y, z) = 0\} = \{(x, y, z) | g_1(x, y, z) = 0\} \cap \{(x, y, z) | g_2(x, y, z) = 0\}$$

אז משפט כופלי לגרנז' אומר לנו כי אם  $p = (x_0, y_0, z_0)$  היא נקודת קיצון של  $f$  תחת האילוצים  $g_1 = g_2 = 0$ , וגם  $\nabla g_1(p), \nabla g_2(p)$  וקטורים בת"ל, אז קיימים  $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$  כך ש:

$$\nabla f(p) = \lambda_1 \nabla g_1(p) + \lambda_2 \nabla g_2(p)$$

או באופן שקול:

$$L(x, y, z, \lambda_1, \lambda_2) = f(x, y, z) - \lambda_1 g_1(x, y, z) - \lambda_2 g_2(x, y, z)$$

מקיימת  $\nabla L(x, y, z, \lambda_1, \lambda_2) = 0$ .

כלומר, הנקודות החשודות שלנו הן הנקודות המקיימות  $\nabla L = 0$  או הנקודות המקיימות  $\nabla g_1(p), \nabla g_2(p)$  ת"ל וגם  $g_1(p) = g_2(p) = 0$ .

תזכורת

שני וקטורים  $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^n$  נקראים בת"ל אם:

$$\alpha v_1 + \beta v_2 = 0 \iff \alpha = \beta = 0$$

תרגיל 8.9

מצא מינימום ומקסימום מוחלטים עבור  $f(x, y, z) = xy + z^2$ , על המעגל הנוצר מחיתוך המישור  $y - x = 0$  והכדור  $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ .

**פתרון:**

נפעיל כופלי לגרנז' עבור:

$$f(x, y, z) = xy + z^2, \quad g_1(x, y, z) = y - x, \quad g_2(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 4$$

כולן גזירות ברציפות. כלומר:

$$L(x, y, z, \lambda_1, \lambda_2) = xy + z^2 - \lambda_1(y - x) - \lambda_2(x^2 + y^2 + z^2 - 4)$$

אז:

$$\nabla L = \begin{pmatrix} y - \lambda_1 - 2x\lambda_2 \\ x + \lambda_1 - 2y\lambda_2 \\ 2z - 2z\lambda_2 \\ y - x \\ x^2 + y^2 + z^2 - 4 \end{pmatrix} = 0 \iff \begin{cases} y - \lambda_1 = 2x\lambda_2 \\ y + \lambda_1 = 2y\lambda_2 \\ 2z = 2z\lambda_2 \\ y = x \\ x^2 + y^2 + z^2 = 4 \end{cases}$$

כלומר:

$$\begin{cases} x - \lambda_1 = 2x\lambda_2 \\ x + \lambda_1 = 2x\lambda_2 \\ 2z = 2z\lambda_2 \\ 2x^2 + z^2 = 4 \end{cases}$$

מחיבור המשוואה הראשונה והשנייה נקבל:

$$2x = 4x\lambda_2$$

לכן או ש  $x = 0$  או ש  $\lambda_2 = \frac{1}{2}$ . אם  $x = 0$ , אז מהמשוואות הראשונות נקבל  $\lambda_1 = 0$ , ומהמשוואה השלישית נקבל  $z = \pm 2$ . לכן הנקודות החשודות הן:

$$P_1 = (0, 0, 2), \quad P_2 = (0, 0, -2), \quad P_3 = (\sqrt{2}, \sqrt{2}, 0), \quad P_4 = (-\sqrt{2}, -\sqrt{2}, 0)$$

נבדוק מתי  $\nabla g_1, \nabla g_2$  ת"ל.

$$\nabla g_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \nabla g_2 = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ 2z \end{pmatrix}$$

הווקטורים הללו ת"ל אם אחד מהם שווה לאפס, כלומר  $\nabla g_2 = 0$ , אבל אז  $x = y = z = 0$ , אבל מתקיים  $g_2(0, 0, 0) \neq 0$ , או שקיים סקלר:

$$\exists \alpha \neq 0, \nabla g_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \alpha \nabla g_2 = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ 2z \end{pmatrix} \implies \begin{cases} 2x\alpha = -1 \\ 2y\alpha = 1 \\ 2z\alpha = 0 \end{cases} \implies -1 = 1$$

וקיבלנו סתירה. כלומר יש לנו 4 נקודות חשודות:

$$\begin{aligned} P_1 = (0, 0, 2) &\implies f(P_1) = 4 \\ P_2 = (0, 0, -2) &\implies f(P_2) = 4 \\ P_3 = (\sqrt{2}, \sqrt{2}, 0) &\implies f(P_3) = 2 \\ P_4 = (-\sqrt{2}, -\sqrt{2}, 0) &\implies f(P_4) = 2 \end{aligned}$$

הקבוצה  $g_1(x, y, z) = g_2(x, y, z) = 0$  סגורה כחיתוך של סגורות וחסומה (כי היא מוכלת בכדור  $x^2 + y^2 + z^2 = 4$  ולכן, משום ש  $f$  רציפה, היא מקבלת את חסמיה בקבוצה סגורה וחסומה, כלומר  $P_3, P_4$  נקודות מינימום גלובלי ו  $P_1, P_2$  נקודות מקסימום גלובלי).

## 8.2.1 | מציאת נקודות קיצון - תרגול נוסף

### תרגיל 8.10.

זו שאלה ממבחן.

מצא את נקודות הקיצון המוחלטות עבור הפונקציה  $f(x, y) = (x^2 + y^2)^2 + x^2 - y^2$  בתחום  $x^2 + y^2 \leq 1$ .

#### פתרון:

ראשית, נחפש נקודות קיצון בפנים המעגל  $x^2 + y^2 < 1$ , הפונקציה גזירה ברציפות שם אז:

$$\nabla f = \begin{pmatrix} 4x(x^2 + y^2) + 2x \\ 4y(x^2 + y^2) - 2y \end{pmatrix} = 0 \implies \begin{cases} 4x(x^2 + y^2) + 2x = 4x(x^2 + y^2 + \frac{1}{2}) = 0 \\ 4y(x^2 + y^2) - 2y = 4y(x^2 + y^2 - \frac{1}{2}) = 0 \end{cases}$$

מהמשוואה הראשונה נקבל  $x = 0$  לכל  $x^2 + y^2 + \frac{1}{2} \neq 0$ , נציב במשוואה השנייה  $x = 0$  ונקבל:

$$4y\left(y^2 - \frac{1}{2}\right) = 0 \implies y = 0 \text{ או } y = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$$

כלומר קיבלנו 3 נקודות קיצון אפשריות:

$$P_1 = (0, 0), P_2 = \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), P_3 = \left(0, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

שלושת הנקודות מקיימות  $x^2 + y^2 < 1$ , ולכן הן נקודות פנימיות של התחום. נבדוק נקודות קיצון בשפה, כלומר עבור  $x^2 + y^2 = 1$ , נשים לב שלקבוצה זו קיימת פרמטריזציה, כלומר:

$$\gamma(t) = (\cos(t), \sin(t))$$

עבור  $t \in [0, 2\pi)$ , נציב:

$$f(\gamma(t)) = (\cos^2(t) + \sin^2(t))^2 + \cos^2(t) - \sin^2(t) = 1 + \cos(2t)$$

נגזור ונשווה לאפס:

$$\frac{\partial}{\partial t} f(\gamma(t)) = -2 \sin(2t) = 0$$

למשוואה  $\sin(2t) = 0$  יש 4 פתרונות עבור  $t \in [0, 2\pi)$ :

$$\begin{array}{ll} t_0 = 0 & \gamma(t_0) = (1, 0) \\ t_1 = \frac{\pi}{2} & \gamma(t_1) = (0, 1) \\ t_2 = \pi & \gamma(t_2) = (-1, 0) \\ t_3 = \frac{3\pi}{2} & \gamma(t_3) = (0, -1) \end{array} \implies$$

כלומר יש לנו סה"כ 7 נקודות חשודות לקיצון מוחלט:

$$\begin{array}{l} P_1 = (0, 0) \\ P_2 = \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \\ P_3 = \left(0, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \\ P_4 = (1, 0) \\ P_5 = (0, 1) \\ P_6 = (-1, 0) \\ P_7 = (0, -1) \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} f(P_1) = 0 \\ f(P_2) = f(P_3) = -\frac{1}{4} \\ f(P_4) = f(P_6) = 2 \\ f(P_5) = f(P_7) = 0 \end{array}$$

משום ש  $f$  רציפה בתחום הסגור וחסום  $x^2 + y^2 \leq 1$ , היא מקבלת בו את חסמיה, כלומר  $P_2, P_3$  מינימום ו  $P_4, P_6$  מקסימום.

### תרגיל 8.11

מצאו נקודות קיצון ל  $f(x, y) = \sqrt{\frac{1}{x^2 + y^2 + 1}}$  בתחום  $x^2 + y^2 \leq 1$ .

#### פתרון:

נעבור לקואורדינטות פולריות:

$$x = r \cos(\theta), \quad y = r \sin(\theta),$$

ואז התחום שלנו הוא  $0 \leq r \leq 1$ , כאשר  $\theta \in [0, 2\pi)$ . הפונקציה שלנו הינה:

$$F(r \cos(\theta), r \sin(\theta)) = \sqrt{\frac{1}{r^2 + 1}}$$

ברור שהפונקציה יורדת ככל ש  $r$  גדל (תרגיל - הוכיחו זאת!) כלומר היא מקבלת מקסימום כאשר  $r = 0$ , כלומר  $x = y = 0$  ומינימום עבור  $r = 1$ , כלומר כל  $(x, y)$  שמקיימים  $x^2 + y^2 = 1$ .

---

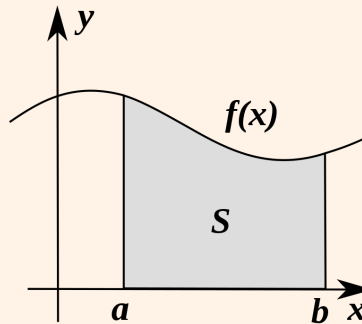
## תרגול תשיעי

---

### 9.1 | אינטגרל כפול במלבן ומשפט פוביני

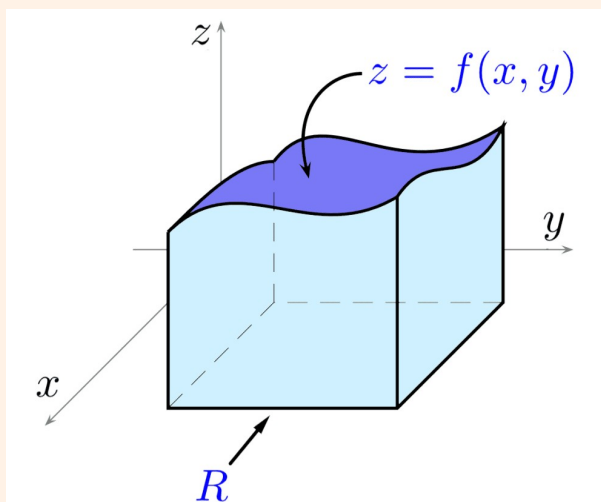
רעיון

בהינתן פונקציה  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}_+$ , האינטגרל החד-ממדי  $\int_a^b f(x) dx$  מחשב לנו את השטח הבא:



אותה שאלה נוכל לשאול על נפח הכלוא תחת גרף של פונקציה  $f : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}_+$ , כלומר, אם  $D = [a, b] \times [c, d] = \{(x, y) | a \leq x \leq b \text{ וגם } c \leq y \leq d\} \subset \mathbb{R}^2$  הוא מלבן, נחשב את הנפח הזה בעזרת אינטגרל כפול:

$$R = \iint_D f(x, y) dx dy$$



### תזכורת – אינטגרליות במלבן

פונקציה נקראת אינטגרלית אם סכומי הרימן שלה מתכנסים (את ההגדרה המלאה ראינו בהרצאה), נזכיר מספר תכונות:

1. אם  $f(x, y)$  רציפה ב- $D$  אז היא אינטגרלית ב- $D$ .

2. אם  $f(x, y), g(x, y)$  אינטגרליות ב- $D$ , אז עבור  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ,  $h(x, y) = \alpha f(x, y) + \beta g(x, y)$  היא אינטגרלית ומתקיים:

$$\iint_D (\alpha f(x, y) + \beta g(x, y)) dx dy = \alpha \iint_D f(x, y) dx dy + \beta \iint_D g(x, y) dx dy$$

3. אם  $D, D'$  תחומים זרים - כלומר  $D \cap D' = \emptyset$  (או אולי הם נחתכים במספר סופי של ישרים או נקודות) ו- $f(x, y)$  אינטגרלית ב- $D$  וב- $D'$  אז היא אינטגרלית ב- $D \cup D'$  ומתקיים:

$$\iint_{D \cup D'} f(x, y) dx dy = \iint_D f(x, y) dx dy + \iint_{D'} f(x, y) dx dy$$

## תזכורת – (משפט פוביני)

אם  $f(x, y)$  רציפה במלבן  $D = [a, b] \times [c, d]$  אז:

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_a^b \left( \int_c^d f(x, y) dy \right) dx = \int_c^d \left( \int_a^b f(x, y) dx \right) dy$$

במילים אחרות, אם נסמן:

$$F(x) = \int_c^d f(x, y) dy, \quad G(y) = \int_a^b f(x, y) dx$$

אז מתקיים:

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_a^b F(x) dx = \int_a^b \left( \int_c^d f(x, y) dy \right) dx$$

וגם:

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_c^d G(y) dy = \int_c^d \left( \int_a^b f(x, y) dx \right) dy$$

## תרגיל 9.1

חשבו את  $\iint_D 3x^3y + xy^5 dx dy$  עבור  $D = [0, 1] \times [0, \sqrt{2}]$ .

**פתרון:**

$f(x, y)$  רציפה, ולכן עפ"י פוביני מתקיים:

$$\iint_D 3x^3y + xy^5 dx dy = \int_0^1 \left( \int_0^{\sqrt{2}} 3x^3y + xy^5 dy \right) dx$$

נתחיל בחישוב האינטגרל הפנימי:

$$\int_0^{\sqrt{2}} 3x^3y + xy^5 dy = 3x^3 \left( \frac{y^2}{2} \right) + x \left( \frac{y^6}{6} \right) \Big|_{y=0}^{y=\sqrt{2}} = 3x^3 + \frac{4x}{3}$$

אז:

$$\begin{aligned} \iint_D 3x^3y + xy^5 dx dy &= \int_0^1 \left( \int_0^{\sqrt{2}} 3x^3y + xy^5 dy \right) dx = \int_0^1 \left( 3x^3 + \frac{4x}{3} \right) dx \\ &= 3 \cdot \frac{x^4}{4} + \frac{4}{3} \cdot \frac{x^2}{2} \Big|_{x=0}^{x=1} = \frac{3}{4} + \frac{2}{3} = \frac{17}{12} \end{aligned}$$

## תרגיל 9.2.

תהא  $f(x, y)$  פונקציה רציפה כך ש- $f(x, y) = A(x)B(y)$ , הוכיחו כי:

$$\iint_{[a,b] \times [c,d]} f(x, y) dx dy = \left( \int_a^b A(x) dx \right) \cdot \left( \int_c^d B(y) dy \right)$$

**פתרון:**

נשים לב כי בעזרת פוביני:

$$\begin{aligned} \iint_{[a,b] \times [c,d]} f(x, y) dx dy &= \int_a^b \left( \int_c^d f(x, y) dy \right) dx = \int_a^b \left( \int_c^d A(x)B(y) dy \right) dx \\ &= \int_a^b A(x) \left( \int_c^d B(y) dy \right) dx = \left( \int_c^d B(y) dy \right) \cdot \left( \int_a^b A(x) dx \right) \end{aligned}$$

כאשר  $\int_a^b =$  נעשה שימוש בכך ש- $A(x)$  אינו תלוי במשתנה  $y$ , ובלינאריות האינטגרל.

## 9.2 | אינטגרציה בתחום פשוט

## תזכורת – (תחום פשוט)

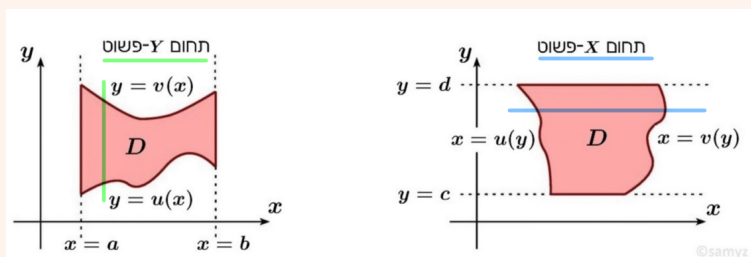
תחום חסום וסגור  $D \subset \mathbb{R}^2$  נקרא **פשוט** אם הוא מהצורה:

$$D = \{(x, y) | a \leq x \leq b, v(x) \leq y \leq u(x)\}$$

עבור פונקציות  $u, v : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  רציפות, או מהצורה:

$$D = \{(x, y) | c \leq y \leq d, p(y) \leq x \leq q(y)\}$$

עבור פונקציות  $p, q : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$  רציפות.



## תזכורת

תהא  $f(x, y)$  אינטגרלית בתחום  $D$ , אם  $D = \{(x, y) | a \leq x \leq b, v(x) \leq y \leq u(x)\}$  הוא תחום פשוט ביחס לציר  $y$ , אז:

$$\iint_D f(x, y) = \int_a^b \left( \int_{v(x)}^{u(x)} f(x, y) dy \right) dx$$

ואם  $D = \{(x, y) | c \leq y \leq d, p(y) \leq x \leq q(y)\}$  הוא תחום פשוט ביחס לציר  $x$ , אז:

$$\iint_D f(x, y) = \int_c^d \left( \int_{p(y)}^{q(y)} f(x, y) dx \right) dy$$

## תרגיל 9.3

חשבו את שטח עיגול היחידה בעזרת אינטגרל כפול.

## פתרון:

שטח עיגול היחידה הוא  $\iint_D f(x, y) dx dy$  עבור  $f(x, y) = 1$ , כאשר  $D$  הוא עיגול היחידה. ראשית, נשים לב כי:

$$\begin{aligned} D &= \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 1\} = \{(x, y) | y^2 \leq 1 - x^2\} \\ &= \{(x, y) | -\sqrt{1 - x^2} \leq y \leq \sqrt{1 - x^2}, -1 \leq x \leq 1\} \end{aligned}$$

אז:

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_{-1}^1 \left( \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} dy \right) dx = 2 \int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2} dx$$

נבצע החלפת משתנים  $x = \sin(u)$ ,  $\frac{dx}{du} = \cos(u) \Rightarrow dx = \cos(u) du$  וגם  $-1 \leq x \leq 1 \Rightarrow -\frac{\pi}{2} \leq u \leq \frac{\pi}{2}$  אז:

$$\begin{aligned} 2 \int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2} dx &= 2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\sin^2(u)} \cos(u) du = 2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} |\cos(u)| \cos(u) du \\ &= 2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(u) du = 2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left( \frac{1}{2} + \frac{\cos(2u)}{2} \right) du \\ &= 2 \left[ \frac{u}{2} + \frac{1}{4} \sin(2u) \right] \Big|_{u=-\frac{\pi}{2}}^{u=\frac{\pi}{2}} = \pi \end{aligned}$$

כאשר השוויון  $\star$  נובע מכך ש- $\cos(u)$  חיובית בתחום. כלומר, השטח של עיגול היחידה הוא  $\pi$ .

## תרגיל 9.4.

עבור האינטגרלים הבאים, זהו שתחום האינטגרציה הוא פשוט גם ביחס לציר  $x$  וגם ביחס לציר ה- $y$ , והשתמשו בכך כדי להחליף את סדר האינטגרציה.

$$1. \int_0^1 \int_0^{y^2} f(x, y) dx dy$$

$$2. \int_0^1 \int_{-y}^y f(x, y) dx dy$$

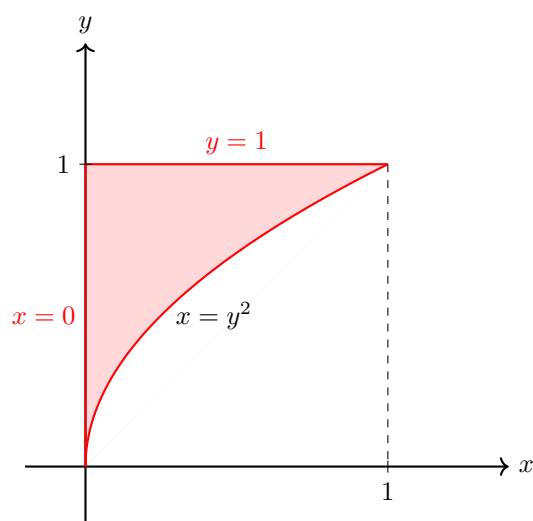
$$3. \int_0^2 \int_0^{2x-x^2} f(x, y) dy dx$$

## פתרון:

1. התחום הוא:

$$\{(x, y) | 0 \leq y \leq 1, 0 \leq x \leq y^2\}$$

נשרטט אותו:



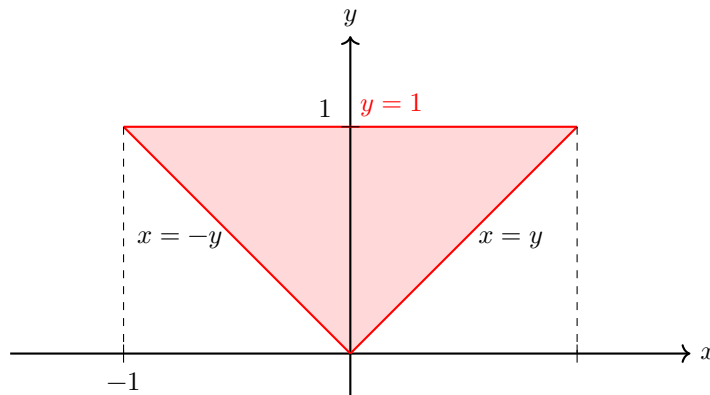
התחום של  $x$  הוא  $x \in [0, 1]$ , ולכל  $x \in [0, 1]$  מתקיים  $\sqrt{x} \leq y \leq 1$ , כלומר:

$$\int_0^1 \int_0^{y^2} f(x, y) dx dy = \int_0^1 \left( \int_{\sqrt{x}}^1 f(x, y) dy \right) dx$$

2. התחום הוא:

$$\{(x, y) | 0 \leq y \leq 1, -y \leq x \leq y\}$$

נשרטט אותו:



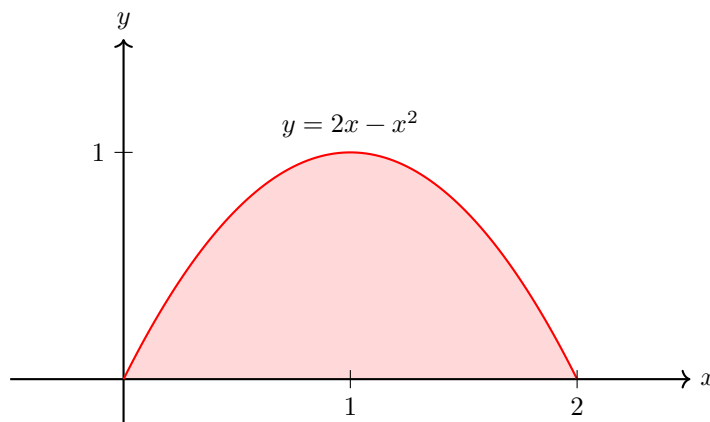
כלומר,  $-1 \leq x \leq 1$ . נשים לב כי הגבול התחתון של  $y$  הוא  $-x$  כאשר  $-1 \leq x \leq 0$ , ו- $x$  כאשר  $0 \leq x \leq 1$ . ניתן לכתוב את הגבול התחתון כ- $|x|$  לכל  $x \in [-1, 1]$ , כלומר:

$$\int_0^1 \int_{-y}^y f(x, y) dx dy = \int_{-1}^1 \int_{|x|}^1 f(x, y) dy dx$$

3. התחום הוא:

$$\{(x, y) | 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 2x - x^2\}$$

נשרטט אותו:



כלומר,  $0 \leq y \leq 1$ . לכל  $y$  כזה, הישר חותך את שפת התחום בנקודות שבהן  $y = 2x - x^2$ , כלומר  $x = \frac{2 \pm \sqrt{4-4y}}{2} = 1 \pm \sqrt{1-y}$ . מכאן שהתחום שלנו הוא:

$$\{(x, y) | y \in [0, 1], 1 - \sqrt{1-y} \leq x \leq 1 + \sqrt{1-y}\}$$

כלומר:

$$\int_0^2 \int_0^{2x-x^2} f(x, y) dy dx = \int_0^1 \int_{1-\sqrt{1-y}}^{1+\sqrt{1-y}} f(x, y) dx dy$$

### 9.3 | החלפת משתנים באינטגרל כפול

#### תזכורת – (החלפת משתנים)

נניח כי  $f(x, y)$  פונקציה רציפה בתחום  $D \subset \mathbb{R}^2$ , נניח כי יש לנו תחום  $\Delta \subset \mathbb{R}^2$  ופונקציה גזירה ברציפות, חח"ע ועל  $\varphi: \Delta \rightarrow D$ , אם נחשוב על  $\Delta$  עם קואורדינטות  $u, v$  ו- $D$  עם קואורדינטות  $x, y$ , אז אפשר לכתוב:

$$\varphi(u, v) = (x(u, v), y(u, v))$$

כלומר,  $(x, y) = \varphi(u, v) = (x(u, v), y(u, v))$ . נסמן את היעקוביאן של  $\varphi$  על ידי:

$$J(u, v) = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u}(u, v) & \frac{\partial x}{\partial v}(u, v) \\ \frac{\partial y}{\partial u}(u, v) & \frac{\partial y}{\partial v}(u, v) \end{pmatrix}$$

בנוסף, נדרוש כי  $J(u, v) \neq 0$  לכל  $(u, v) \in \Delta$ . אז:

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_{\Delta} f(x(u, v), y(u, v)) |J(u, v)| du dv$$

#### הערה

זה משפט כבד, ויש לנו מספר הערות לגביו.

1. המשפט תקף גם אם  $\varphi$  אינה חח"ע, או  $J = 0$  בקבוצה בעלת שטח אפס בלבד, כלומר מספר סופי של עקומים או נקודות.

2. לפעמים יהיה קל יותר לחשב את היעקוביאן ההפוך, כלומר:

$$J^* = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix}$$

$$J = \frac{1}{J^*}$$

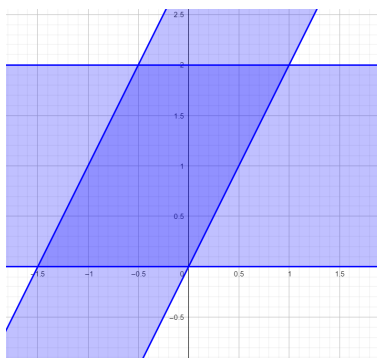
3. שימו לב כי היעקוביאן מופיע בערך מוחלט!

#### תרגיל 9.5.

חשבו את שטח המקבילית החסומה ע"י הישרים:

$$\begin{cases} y = 2x \\ y = 2x + 3 \\ y = 0 \\ y = 2 \end{cases}$$

בעזרת החלפת משתנים למלבן.

**פתרון:**נשרטט את התחום  $D$ :

כלומר, אנו רוצים לחשב את  $\iint_D 1 dx dy$ , כלומר את האינטגרל על התחום  $D$  של הפונקציה  $f(x, y) = 1$ . נחפש משתנים  $(u, v) = (u(x, y), v(x, y))$  כך שיתארו את התחום כמלבן, נשים לב כי אם נסמן:

$$\begin{cases} u = y - 2x \\ v = y \end{cases}$$

נחפש את התחום  $\Delta$  בעזרת  $(u, v)$ , נעשה זאת על ידי חישוב השפה של  $D$  בקואורדינטות  $(u, v)$ :

$$\begin{array}{ll} D & \Delta \\ y = 2x & \rightarrow u = 0 \\ y = 2x + 3 & \rightarrow u = 3 \\ y = 0 & \rightarrow v = 0 \\ y = 2 & \rightarrow v = 2 \end{array}$$

כלומר, קיבלנו את התחום הבא:

$$\Delta = \{(u, v) | 0 \leq u \leq 3, 0 \leq v \leq 2\}$$

נשים לב כי מה שחישבנו הוא ההעתקה ההפוכה, כלומר, במקום  $(x, y) = (x(u, v), y(u, v))$  מצאנו את ההעתקה  $(u, v) = (u(x, y), v(x, y))$ , יש לנו שתי דרכים להתקדם מפה.

1. נהפוך את ההעתקה:

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2}(v - u) \\ y = v \end{cases}$$

ונחשב:

$$J = \begin{vmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -\frac{1}{2}$$

2. נחשב את  $\frac{1}{J}$  ישירות:

$$J^* = J^{-1} = \det \begin{pmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = -2 \Rightarrow J = -\frac{1}{2}$$

בכל מקרה, העתקת המעבר שלנו היא חח"ע, על וגזירה ברציפות, אז:

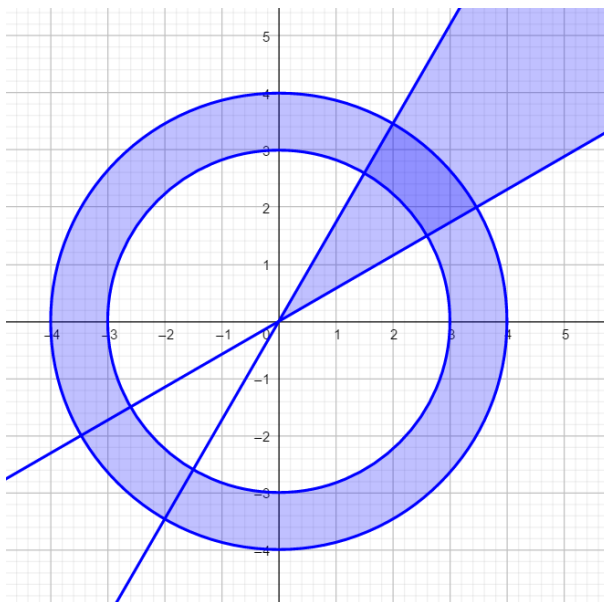
$$\iint_D 1 dx dy = \iint_{\Delta} 1 |J| du dv = \frac{1}{2} \int_{v=0}^2 \int_{u=0}^3 du dv = 3$$

## תרגיל 9.6.

$$D = \left\{ \begin{array}{l} 9 \leq x^2 + y^2 \leq 16 \\ \frac{\sqrt{3}}{3}x \leq y \leq \sqrt{3}x \\ x > 0, y > 0 \end{array} \right\} \text{ כאשר } I = \iint_D \frac{y}{x} dx dy$$

**פתרון:**

ראשית נשרטט את התחום:



נפתור את השאלה ב2 דרכים.

1. ע"י החלפת המשתנים הבאה  $\begin{cases} u = x^2 + y^2 \\ v = \frac{y}{x} \end{cases}$ , אז יחסית קל לחשב את הגבולות של  $u, v$ :

$$9 \leq u \leq 16, \quad \sqrt{\frac{1}{3}} \leq v \leq \sqrt{3}$$

והיעקוביאן:

$$J^{-1} = \begin{vmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2x & 2y \\ -\frac{y}{x^2} & \frac{1}{x} \end{vmatrix} = 2 + 2\frac{y^2}{x^2} = 2(1 + v^2) \neq 0$$

אז היות והחלפת המשתנים היא חח"ע ועל בתחומה, וגזירה ברציפות, מתקיים:

$$\begin{aligned}\iint_D \frac{y}{x} dx dy &= \iint_{\Delta} v |J| dv du \\&= \frac{1}{2} \int_{u=9}^{16} \int_{v=\sqrt{\frac{1}{3}}}^{\sqrt{3}} \frac{v}{1+v^2} dv du = \frac{7}{2} \int_{v=\sqrt{\frac{1}{3}}}^{\sqrt{3}} \frac{v}{1+v^2} dv \\&= \frac{7}{4} \int_{v=\sqrt{\frac{1}{3}}}^{\sqrt{3}} \frac{2v}{1+v^2} dv = \frac{7}{4} [\ln(1+v^2)] \Big|_{\sqrt{\frac{1}{3}}}^{\sqrt{3}} \\&= \frac{7}{4} [\ln(1+3) - \ln(1+\frac{1}{3})] \\&= \frac{7}{4} [\ln(4) - \ln(\frac{4}{3})] = \frac{7}{4} \ln\left(\frac{4}{\frac{4}{3}}\right) = \frac{7}{4} \ln(3)\end{aligned}$$

2. הפעם נעבור לקואורדינטות פולריות,  $\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases}$ .  
נחשב את גבולות האינטגרציה החדשים:

$$\begin{aligned}9 \leq x^2 + y^2 \leq 16 &\rightarrow 3 \leq r \leq 4 \\ \frac{\sqrt{3}}{3}x \leq y \leq \sqrt{3}x &\rightarrow \frac{\sqrt{3}}{3} \leq \frac{y}{x} \leq \sqrt{3} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} \leq \tan \theta \leq \sqrt{3} &\rightarrow \frac{\pi}{6} \leq \theta \leq \frac{\pi}{3}\end{aligned}$$

נחשב את היעקוביאן:

$$J = \begin{vmatrix} x_r & x_\theta \\ y_r & y_\theta \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{vmatrix} = r$$

החלפת המשתנים גזירה ברציפות, חח"ע ועל בתחום האינטגרציה (היא אינה חח"ע רק ב- $r=0$ , שאינו בתחום), ולכן אפשר להפעיל את משפט החלפת המשתנים ולקבל:

$$\begin{aligned}\iint_D \frac{y}{x} dx dy &= \iint_{\Delta} \tan \theta |J| dr d\theta = \int_{\theta=\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \int_{r=3}^4 \frac{\sin \theta}{\cos \theta} r dr d\theta \\&= \int_{\theta=\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \left( \frac{16}{2} - \frac{9}{2} \right) \frac{\sin \theta}{\cos \theta} d\theta \\&= -\frac{7}{2} \ln |\cos \theta| \Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} = -\frac{7}{2} \ln \left( \cos \frac{\pi}{3} \right) + \frac{7}{2} \ln \left( \cos \frac{\pi}{6} \right) \\&= \frac{7}{2} \ln \left( \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} \right) = \frac{7}{2} \ln \sqrt{3} = \frac{7}{4} \ln(3).\end{aligned}$$

## תרגיל 9.7.

$$D = \begin{cases} 1 \leq x^2 - y^2 \leq 9 \\ 1 \leq x \leq 9 \\ y \geq 0 \end{cases} \quad \text{חשבו את } I = \iint_D xye^{x^2-y^2} dx dy, \text{ כאשר}$$

פתרון:

נשרטט את התחום:



נבצע את החלפת המשתנים הבאה  $\begin{cases} u = x^2 - y^2 \\ v = x^2 \end{cases}$ , אז נחשב את גבולות האינטגרציה החדשים:

$$\begin{array}{ll} D & \Delta \\ x^2 - y^2 = 1 & \rightarrow u = 1 \\ x^2 - y^2 = 9 & \rightarrow u = 9 \\ x = 9 & \rightarrow v = 81 \\ y = 0 & \rightarrow v = u \end{array}$$

כלומר, התחום  $\Delta$  הוא:

$$\Delta = \{(u, v) | 1 \leq u \leq 9, u \leq v \leq 81\}$$

במקרה זה יהיה קל יותר לחשב את היעקוביאן ההופכי:

$$J^{-1} = \begin{vmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2x & -2y \\ 2x & 0 \end{vmatrix} = 4xy$$

היעקוביאן שונה מאפס פרט ל  $y = 0$ , שזו קבוצה משטח אפס, ולכן:  $|J| = \frac{1}{|4xy|} = \frac{1}{4xy}$ , ונקבל:

$$\begin{aligned} \iint_D xye^{x^2-y^2} dx dy &= \int_{\Delta} xy e^u \frac{1}{4xy} du dv = \frac{1}{4} \int_{\Delta} e^u du dv \\ &= \frac{1}{4} \int_{u=1}^9 \left( \int_{v=u}^{81} e^u dv \right) du = \frac{1}{4} \int_1^9 e^u (81 - u) du \\ &= \frac{81}{4} \int_1^9 e^u du - \frac{1}{4} \int_1^9 e^u u du \\ &= \left\{ \begin{array}{l} f' = e^u \\ g = u \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} f = e^u \\ g' = 1 \end{array} \right\} = \frac{81}{4} \int_1^9 e^u du - \frac{1}{4} \left( u e^u \Big|_1^9 - \int_1^9 e^u du \right) \\ &= \frac{82}{4} (e^9 - e) - \frac{1}{4} (9e^9 - e) = \frac{73}{4} e^9 - \frac{81}{4} e \end{aligned}$$

### תרגיל 9.8

חשבו את שטח האליפסה  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ , כאשר  $a, b > 0$ .

#### פתרון:

נבצע את החלפת המשתנים הבאה:

$$\begin{cases} x = ar \cos \theta \\ y = br \sin \theta \end{cases}$$

מתקיים:

$$1 = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{a^2 r^2 \cos^2 \theta}{a^2} + \frac{b^2 r^2 \sin^2 \theta}{b^2} = r^2$$

ולכן, תחום האינטגרציה החדש הוא  $\begin{cases} 0 \leq \theta \leq 2\pi \\ 0 \leq r \leq 1 \end{cases}$  נחשב את היעקוביאן:

$$J = \begin{vmatrix} a \cos \theta & -ar \sin \theta \\ b \sin \theta & br \cos \theta \end{vmatrix} = abr \cos^2 \theta + abr \sin^2 \theta = abr$$

הוא מתאפס ב- $r = 0$ , אבל זו קבוצה בעלת שטח אפס. העתקת החלפת המשתנים שלנו היא חח"ע (בכל מקום פרט ל- $r = 0$ ), על וגזירה ברציפות, ולכן אפשר להפעיל את משפט החלפת המשתנים:

$$\begin{aligned} \text{Area} &= \iint_D dx dy = \iint_{\Delta} abr dr d\theta = ab \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{r=0}^1 r dr d\theta \\ &= ab \int_{\theta=0}^{2\pi} \left. \frac{r^2}{2} \right|_{r=0}^{r=1} d\theta = \pi ab \end{aligned}$$

## תרגיל 9.9.

יהא  $D \subset \mathbb{R}^2$  תחום חסום וסגור המקיים  $(x, y) \in D \iff (y, x) \in D$ . תהא  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$  פונקציה רציפה.

$$1. \text{ הוכיחו כי } \iint_D f(x, y) dx dy = \frac{1}{2} \iint_D (f(x, y) + f(y, x)) dx dy$$

$$2. \text{ הוכיחו כי אם } f(x, y) = -f(y, x) \text{ לכל } (x, y) \in D, \text{ אז } \iint_D f(x, y) dx dy = 0$$

## פתרון:

1. נבצע החלפת משתנים  $u = y, v = x$ , אז  $|J| = -1$ ,  $J = \begin{vmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1$ , בפרט  $|J| = 1$ , וההעתקה היא חח"ע ועל, וגזירה ברציפות, אז:

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_D f(v, u) |J| du dv = \iint_D f(y, x) dx dy$$

כלומר:

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_D f(y, x) dx dy$$

בפרט:

$$2 \iint_D f(x, y) dx dy = \iint_D f(x, y) dx dy + \iint_D f(y, x) dx dy = \iint_D (f(x, y) + f(y, x)) dx dy$$

נחלק את השוויון ב-2 ונקבל את התוצאה הרצויה.

2. אם  $f(x, y) = -f(y, x)$  לכל  $(x, y) \in D$ , אז  $f(x, y) + f(y, x) = 0$  לכל  $(x, y) \in D$ , ולכן מהשוויון בסעיף הקודם נקבל:

$$\iint_D (f(x, y) + f(y, x)) dx dy = 0$$

כרצוי.

## 9.4 | תרגול נוסף

## תרגיל 9.10.

חשבו את  $\iint_D e^{3x+6y} dx dy$  כאשר  $D = [0, 1] \times [0, 4]$ .

## פתרון:

נשים לב כי  $e^{3x+6y} = e^{3x}e^{6y}$ , אז אפשר להשתמש בתרגיל שעשינו קודם לכן ולקבל:

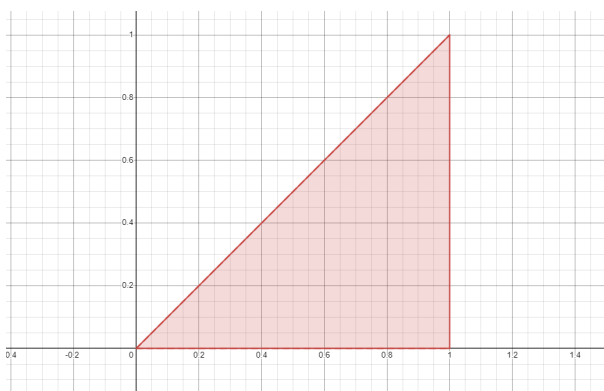
$$\begin{aligned}\iint_D e^{3x+6y} dx dy &= \left( \int_0^1 e^{3x} dx \right) \left( \int_0^4 e^{6y} dy \right) = \left( \frac{e^{3x}}{3} \Big|_{x=0}^{x=1} \right) \left( \frac{e^{6y}}{6} \Big|_{y=0}^{y=4} \right) \\ &= \left( \frac{1}{3}e^3 - \frac{1}{3} \right) \left( \frac{1}{6}e^{24} - \frac{1}{6} \right)\end{aligned}$$

### תרגיל 9.11

חשבו את  $\iint_D \frac{\sin x}{x} dx dy$  עבור  $D$  המשולש החסום בין  $y = x$ ,  $x = 1$  וציר ה- $x$ .

#### פתרון:

נתחיל בלשרטט את התחום הזה:



נשים לב כי אפשר לכתוב את התחום הזה על ידי:

$$D = \{(x, y) | 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq x\}$$

כלומר,  $D$  הוא תחום פשוט ביחס לציר ה- $y$  (האם הוא גם פשוט ביחס לציר ה- $x$ ?), ולכן:

$$\begin{aligned}\iint_D f(x, y) dx dy &= \int_0^1 \left( \int_0^x \frac{\sin(x)}{x} dy \right) dx = \int_0^1 \frac{\sin(x)}{x} \left( \int_0^x dy \right) dx = \int_0^1 \frac{\sin(x)}{x} (x) dx \\ &= \int_0^1 \sin(x) dx = [-\cos(x)] \Big|_{x=0}^{x=1} = -\cos(1) + 1 = 1 - \cos(1)\end{aligned}$$

## תרגיל 9.12

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ x + y = \frac{1}{2} \\ y = x^3 \\ y = 4x^3 \end{cases} \quad \text{חשבו } I = \iint_D \frac{x+3y}{x^4} e^{\frac{y}{x^3}} dx dy, \text{ כאשר } D \text{ הוא התחום החסום ע"י המשוואות}$$

## פתרון:

מטרתנו היא "לרבע" את התחום ולכן נבחר בהחלפת המשתנים הבאה:  $\begin{cases} v = x + y \\ u = \frac{y}{x^3} \end{cases}$ , נחשב את גבולות האינטגרציה החדשים:

$$\begin{array}{ccc} D & \Delta \\ x + y = 1 & \rightarrow & v = 1 \\ x + y = \frac{1}{2} & \rightarrow & v = \frac{1}{2} \\ y = x^3 & \rightarrow & u = 1 \\ y = 4x^3 & \rightarrow & u = 4 \end{array}$$

נחשב את היעקוביאן, במקרה זה יהיה קל יותר לחשב את היעקוביאן ההופכי, שכן  $u, v$  נתונים כבר כפונקציות של  $x, y$ :

$$J^{-1} = \begin{vmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -3yx^{-4} & \frac{1}{x^3} \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -\frac{3y}{x^4} - \frac{1}{x^3} = -\frac{(3y+x)}{x^4}$$

$$\Rightarrow |J| = \left| \frac{1}{J^{-1}} \right| = \frac{x^4}{3y+x}$$

היעקוביאן מוגדר ושונה מאפס, פרט לקבוצה בעלת שטח אפס (מהי? מצאו אותה והסבירו מדוע היא בעלת שטח אפס). נחשב:

$$\begin{aligned} I &= \iint_D \frac{x+3y}{x^4} e^{\frac{y}{x^3}} dx dy = \iint_{\Delta} \frac{x+3y}{x^4} e^{\frac{y}{x^3}} |J| du dv \\ &= \star \iint_{\Delta} e^u du dv = \int_{v=\frac{1}{2}}^1 \int_{u=1}^4 e^u du dv = \frac{1}{2} (e^4 - e) \end{aligned}$$

כאשר השוויון  $\star$  נובע מכך שמתקיים  $\frac{3y+x}{x^4} > 0$  לכל  $(x, y) \in D$ .

## תרגיל 9.13

חשבו את השטח החסום על-ידי העקומה  $(2x+y+1)^2 + (x-y)^2 = 1$ .

**פתרון:**

ננסה לבחור קואורדינטות חדשות כך שיתקבל מעגל:  $\begin{cases} u = 2x + y + 1 \\ v = x - y \end{cases}$ , ונקבל כי התחום החדש  $\Delta$  חסום על-ידי  $u^2 + v^2 = 1$ . נחשב את היעקוביאן:

$$J^{-1} = \begin{vmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -3 \neq 0$$

כלומר,  $|J| = \frac{1}{3} \neq 0$ , נקבל:

$$\text{Area} = \iint_D dx dy = \iint_{\Delta} \frac{1}{3} du dv = \frac{1}{3} \iint_{u^2+v^2 \leq 1} du dv = \frac{\pi}{3}$$

שכן  $\iint_{u^2+v^2 \leq 1} du dv = \pi$  הוא שטח עיגול ברדיוס 1.

## תרגול עשירי

### 10.1 | אינטגרל משולש

#### רעיון

תחום  $D \subset \mathbb{R}^3$  נקרא פשוט אם קיים תחום פשוט  $R \subset \mathbb{R}^2$  ופונקציות רציפות  $f_1, f_2 : R \rightarrow \mathbb{R}$  כך ש:

$$D = \{(x, y, z) | (x, y) \in R, f_1(x, y) \leq z \leq f_2(x, y)\}$$

תהי  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  פונקציה רציפה, אז האינטגרל המשולש של  $f$  על  $D$  מוגדר להיות:

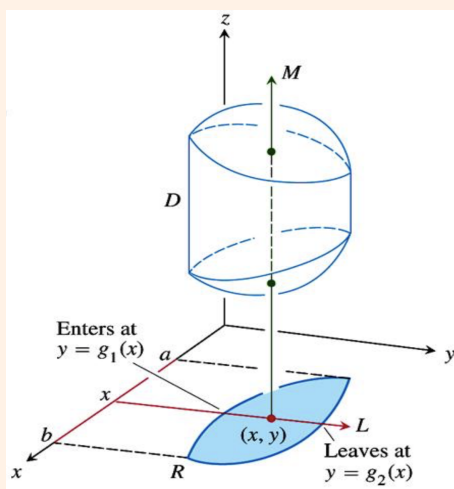
$$\iiint_D f(x, y, z) dx dy dz = \iint_R \left( \int_{f_1(x, y)}^{f_2(x, y)} f(x, y, z) dz \right) dy dx$$

אם בנוסף נסמן:

$$R = \{(x, y) | a \leq x \leq b, g_1(x) \leq y \leq g_2(x)\}$$

עבור  $a < b$  ו- $[a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  רציפות, אז נקבל:

$$\iiint_D f(x, y, z) dx dy dz = \int_a^b \left( \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} \left( \int_{f_1(x, y)}^{f_2(x, y)} f(x, y, z) dz \right) dy \right) dx$$



## תרגיל 10.1

זהו תרגיל ממבחן. חשבו את  $I = \iiint_E \frac{dV}{(x+y+z+1)^3}$  כאשר  $E$  הגוף החסום ע"י המישורים:

$$x = 0, \quad y = 0, \quad z = 0, \quad x + y + z = 1$$

**פתרון:**

נתחיל מגבולות האינטגרציה, תחילה נראה כי:

$$0 \leq z \leq 1 - x - y$$

נחפש את כל הגבולות של  $x, y$ , כלומר, נטיל את הגוף שלנו על מישור  $xy$ , ונקבל כי ההיטל חסום על ידי:

$$x = 0, \quad y = 0, \quad x + y = 1$$

כלומר:

$$0 \leq y \leq 1 - x \quad 0 \leq x \leq 1$$

אז:

$$\begin{aligned} \iiint_E \frac{dV}{(x+y+z+1)^3} &= \int_{x=0}^1 \int_{y=0}^{1-x} \int_{z=0}^{1-x-y} \frac{1}{(x+y+z+1)^3} dz dy dx \\ &= \int_{x=0}^1 \int_{y=0}^{1-x} \left[ -\frac{1}{2} (x+y+z+1)^{-2} \right]_{z=0}^{1-x-y} dy dx \\ &= \int_{x=0}^1 \int_{y=0}^{1-x} \left( -\frac{1}{8} + \frac{1}{2} (x+y+1)^{-2} \right) dy dx \\ &= \int_{x=0}^1 \left[ -\frac{1}{8} y - \frac{1}{2} (x+y+1)^{-1} \right]_{y=0}^{1-x} dx \\ &= \int_{x=0}^1 \left( -\frac{1}{8} (1-x) - \frac{1}{4} + \frac{1}{2} (x+1)^{-1} \right) dx \\ &= \int_{x=0}^1 \left( -\frac{3}{8} + \frac{x}{8} + \frac{1}{2} (x+1)^{-1} \right) dx \\ &= \left[ -\frac{3}{8} x + \frac{1}{16} x^2 + \frac{1}{2} \ln |x+1| \right]_0^1 = -\frac{3}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{2} \ln 2 \\ &= \frac{1}{2} \ln 2 - \frac{5}{16} \end{aligned}$$

## תרגיל 10.2.

זהו תרגיל ממבחן.  
חשבו את נפח הגוף  $V$  המוגדר על ידי:

$$\begin{aligned}x^2 + y^2 &\leq 2y \\ 0 &\leq z \leq (x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}\end{aligned}$$

**פתרון:**

באופן דומה לאינטגרל דו-ממדי, הנפח של גוף  $V \subset \mathbb{R}^3$  מוגדר על ידי:

$$\text{Vol}(V) = \iiint_V 1 dV$$

נסמן  $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 \leq 2y\}$  אז:

$$\text{Vol } V = \iiint_V 1 dV = \iint_D \left( \int_{z=0}^{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} 1 dz \right) dy dx = \iint_D (x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}} dx dy$$

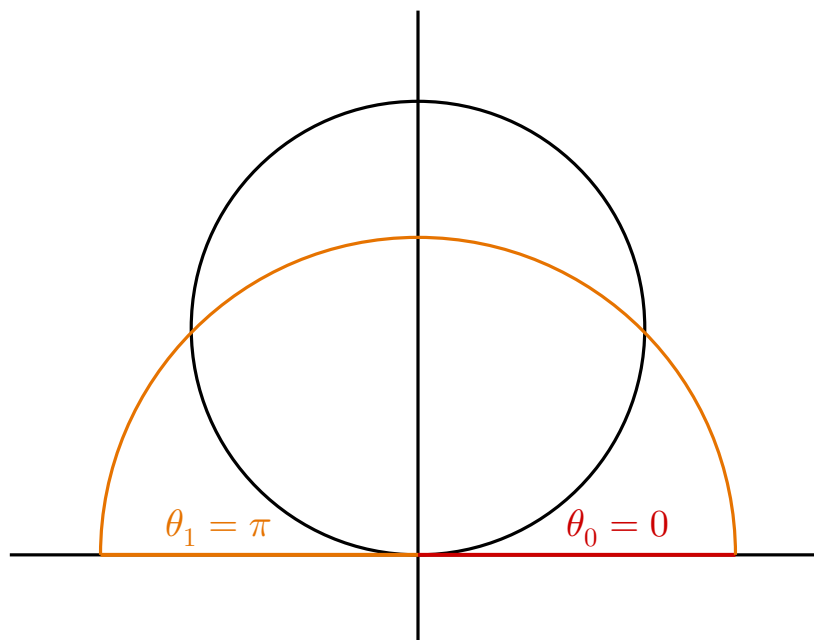
כדי לפשט את התחום  $D$  נבצע החלפה קוטבית. כעת האי-שוויון ב- $D$  נרשם כך:

$$0 \leq x^2 + y^2 \leq 2y \Rightarrow 0 \leq r^2 \leq 2r \sin \theta \Rightarrow 0 \leq r \leq 2 \sin \theta$$

לגבי הזווית, אפשר לראות מהאי-שוויון כי  $0 \leq \sin \theta$ , ולכן  $0 \leq \theta \leq \pi$ , אבל מעבר לכך, נשרטט את התחום:

$$x^2 + y^2 = 2y \Rightarrow x^2 + (y - 1)^2 = 1$$

ואז נראה כי התחום של הזווית הוא  $0 \leq \theta \leq \pi$ :



נשאר לבצע החלפת משתנים, (לא נשכח את היעקוביאן  $!J = r$ )

$$\begin{aligned}\text{Vol}(V) &= \iint_D (x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}} dx dy = \int_0^\pi \int_0^{2\sin\theta} (r^2)^{3/2} r dr d\theta \\ &= \int_0^\pi \left[ \frac{r^5}{5} \right]_0^{2\sin\theta} d\theta = \frac{32}{5} \int_0^\pi (1 - \cos^2 \theta)^2 \sin \theta d\theta \\ &\stackrel{t=\cos\theta}{=} - \int_1^{-1} (1 - t^2)^2 dt = \frac{64}{5} \int_0^1 (1 - t^2)^2 dt \\ &= \frac{64}{5} \left[ t - \frac{2}{3}t^3 + \frac{1}{5}t^5 \right]_0^1 = \frac{512}{75}\end{aligned}$$

### תזכורת – (חישוב "מסה" בעזרת "צפיפות")

נניח כי יש לנו גוף במרחב  $\Omega$ , עם צפיפות  $\rho$ , כאשר:

$$\rho : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$$

נוכל לסמן את מסת הגוף  $\Omega$  להיות:

$$M = \iiint_{\Omega} \rho(x, y, z) dV$$

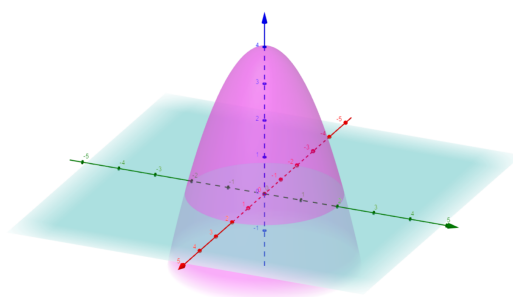
נשים לב כי אם  $\rho = 1$ , אז  $M = \text{Vol } \Omega$ .

### תרגיל 10.3.

מצאו את המסה של גוף  $\Omega$ , המוגדר להיות הגוף החסום מלמטה ע"י הדיסק  $x^2 + y^2 \leq 4$  במישור  $xy$  ( $z = 0$ ), ומלמעלה ע"י הפרבולואיד  $z = 4 - x^2 - y^2$ , עם צפיפות אחידה  $\delta$ .

### פתרון:

נשרטט את הגוף:



אז:

$$M = \iint_{x^2+y^2 \leq 4} \int_{z=0}^{4-x^2-y^2} \delta dz dy dx = \delta \iint_{x^2+y^2 \leq 4} (4-x^2-y^2) dy dx$$

נעבור לקואורדינטות פולריות:

$$\begin{aligned} M &= \delta \int_0^{2\pi} \int_0^2 (4-r^2 \cos^2 \theta - r^2 \sin^2 \theta) r dr d\theta = \delta \int_0^{2\pi} \int_0^2 (4-r^2) r dr d\theta \\ &= \delta \int_0^{2\pi} \left( 2r^2 - \frac{r^4}{4} \right) \Big|_0^2 d\theta = \delta \int_0^{2\pi} 4 d\theta = 8\pi\delta \end{aligned}$$

## 10.2 | החלפת משתנים באינטגרל משולש

### תזכורת – (החלפת משתנים באינטגרל משולש)

החלפת משתנים באינטגרל משולש דומה מאוד להחלפת המשתנים באינטגרל כפול. נניח כי  $f: \Omega \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  פונקציה רציפה, ו- $\Phi: \Delta \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \Omega$  העתקה חד-חד ערכית, על, גזירה ברציפות, אשר הפונקציה ההפוכה שלה  $\Phi^{-1}$  גם גזירה ברציפות. נסמן:

$$(x, y, z) = \Phi(u, v, w) = (x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w))$$

נסמן את היעקוביאן של  $\Phi$  על ידי:

$$J(u, v, w) = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u}(u, v, w) & \frac{\partial x}{\partial v}(u, v, w) & \frac{\partial x}{\partial w}(u, v, w) \\ \frac{\partial y}{\partial u}(u, v, w) & \frac{\partial y}{\partial v}(u, v, w) & \frac{\partial y}{\partial w}(u, v, w) \\ \frac{\partial z}{\partial u}(u, v, w) & \frac{\partial z}{\partial v}(u, v, w) & \frac{\partial z}{\partial w}(u, v, w) \end{pmatrix}$$

אם  $J(u, v, w) \neq 0$  לכל  $(u, v, w) \in \Delta$ , אז:

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_{\Delta} f(x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w)) |J| du dv dw$$

### תרגיל 10.4.

חשבו את האינטגרל:

$$\int_0^3 \int_0^4 \int_{\frac{y}{2}}^{\frac{y}{2}+1} \left( \frac{2x-y}{2} + \frac{z}{3} \right) dx dy dz$$

#### פתרון:

אם נתבונן בתחום האינטגרציה, נשים לב כי  $\frac{y}{2} \leq x \leq \frac{y}{2} + 1$ , כלומר,  $0 \leq x - \frac{y}{2} \leq 1$ , ולכן מתבקש להגדיר  $u = x - \frac{y}{2} = \frac{2x-y}{2}$ , ואז גם נקבל את  $u$  בפונקציה. לגבי שאר גבולות האינטגרציה, הם בעיקרון

כבר מלבניים אז לא נשנה אותם, כלומר נשתמש בהחלפת המשתנים הבאה:

$$\begin{cases} u = \frac{2x-y}{2} \\ v = y \\ w = z \end{cases}$$

נחשב יעקוביאן:

$$J^{-1} = \begin{vmatrix} u_x & u_y & u_z \\ v_x & v_y & v_z \\ w_x & w_y & w_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \Rightarrow |J| = 1 \neq 0$$

החלפת המשתנים שלנו היא חד-חד ערכית, על, וגזירה ברציפות, ולכן אפשר להחליף משתנים באינטגרל:

$$\begin{aligned} I &= \int_0^3 \int_0^4 \int_0^1 \left(u + \frac{w}{3}\right) |J| \, du \, dv \, dw \\ &= \int_0^3 \int_0^4 \frac{1}{2} + \frac{w}{3} \, dv \, dw = 4 \int_0^3 \frac{1}{2} + \frac{w}{3} \, dw = 4 \left( \frac{1}{2}w + \frac{w^2}{6} \right) \Big|_{w=0}^{w=3} \\ &= 4 \left( \frac{3}{2} + \frac{9}{6} \right) = 4 \cdot \frac{18}{6} = 12 \end{aligned}$$

### תרגיל 10.5

זהו תרגיל ממבחן.

יהא  $V \subset \mathbb{R}^3$  התחום החסום ע"י המשטחים:

$$z = 1, \quad z = 0, \quad y = 0, \quad x = 0, \quad x^2 - y^2 \geq 1, \quad 0 \leq x^2 + y^2 \leq 4$$

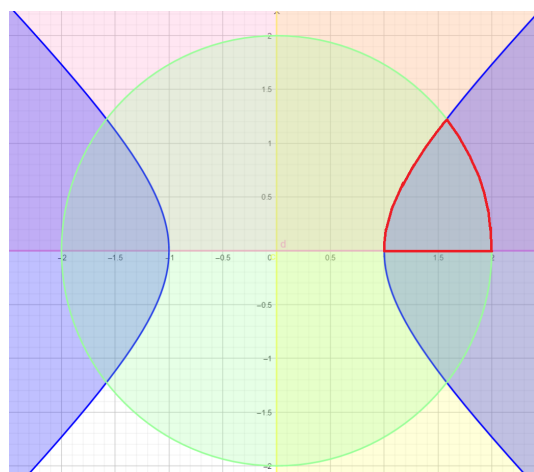
כאשר  $y \geq 0, x \geq 0$ .

חשבו את האינטגרל:

$$I = \iiint_V (x^5 y z - y^5 x z) \, dx \, dy \, dz$$

**פתרון:**

נתחיל מלשרטט את תחום האינטגרציה, נבין כי  $z \in [0, 1]$ , ואם נטיל את התחום על מישור  $xy$ , נקבל את הציר הבא:



נוכל לראות כי לכל  $y$  בתחום,

$$x_1(y) := \sqrt{1+y^2} \leq x \leq \sqrt{4-y^2} := x_2(y)$$

נמצא את נקודת החיתוך של העקומות:

$$\sqrt{4-y^2} = \sqrt{1+y^2} \Rightarrow y = \sqrt{\frac{3}{2}}$$

כלומר, תחום האינטגרציה במישור  $xy$  הוא:

$$R = \left\{ (x, y) \mid \sqrt{1+y^2} \leq x \leq \sqrt{4-y^2}, 0 \leq y \leq \sqrt{\frac{3}{2}} \right\}$$

ננסה להפתר מהשורשים:

$$\begin{aligned} R &= \left\{ (x, y) \mid \sqrt{1+y^2} \leq x \leq \sqrt{4-y^2}, 0 \leq y \leq \sqrt{\frac{3}{2}} \right\} \\ &= \left\{ (x, y) \mid 1+y^2 \leq x^2 \leq 4-y^2, 0 \leq y \leq \sqrt{\frac{3}{2}} \right\} \\ &= \left\{ (x, y) \mid 1 \leq x^2 - y^2 \leq 4 - 2y^2, 0 \leq y \leq \sqrt{\frac{3}{2}} \right\} \end{aligned}$$

נבצע החלפת משתנים:

$$\begin{cases} w = z \\ v = y^2 \\ u = x^2 - y^2 \end{cases}$$

אז נקבל את התחום:

$$\Delta = \left\{ (u, v, w) \mid 1 \leq u \leq 4 - 2v, 0 \leq v \leq \frac{3}{2}, 0 \leq w \leq 1 \right\}$$

נחשב:

$$J^{-1} = \begin{vmatrix} 2x & -2y & 0 \\ 0 & 2y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 4xy \Rightarrow J = \frac{1}{4xy} \neq 0$$

החלפת המשתנים שלנו היא חד-חד ערכית, על, וגזירה ברציפות,

$$\begin{aligned} \iiint_V (x^5 y z - y^5 x z) dx dy dz &= \frac{1}{4} \iiint_{\Delta} (x^4 - y^4) z du dv dw \\ &= \frac{1}{4} \int_0^1 \int_0^{\frac{3}{2}} \int_1^{4-2v} (x^2 - y^2) (x^2 + y^2) z du dv dw \\ &= \frac{1}{4} \int_0^1 \int_0^{\frac{3}{2}} \int_1^{4-2v} u(u+2v) w du dv dw \\ &= \frac{1}{4} \left( \int_0^{\frac{3}{2}} \int_1^{4-2v} (u^2 + 2vu) du dv \right) \left( \int_0^1 w dw \right) \\ &= \frac{1}{8} \left( \int_0^{\frac{3}{2}} \left[ \frac{u^3}{3} + vu^2 \right]_1^{4-2v} dv \right) \\ &= \frac{1}{8} \left( \int_0^{\frac{3}{2}} \left( \frac{(4-2v)^3}{3} + v(4-2v)^2 - \frac{1}{3} - v \right) dv \right) = \frac{225}{128} \end{aligned}$$

### תרגיל 10.6.

זהו תרגיל ממבחן.  
חשבו את נפח הגוף

$$V = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2 - \sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq 4 - (x^2 + y^2), \quad z \geq 1 \right\}$$

**פתרון:**

ראשית נחקור קצת את  $V$ .  $z = 2 - \sqrt{x^2 + y^2}$  הוא חרוט הפוך עם קודקוד ב  $(0, 0, 2)$  ו-  $z = 4 - (x^2 + y^2)$  הוא פרבולואיד הפוך עם קודקוד ב  $(0, 0, 4)$ . הם נחתכים כאשר:

$$2 - \sqrt{x^2 + y^2} = 4 - (x^2 + y^2)$$

נסמן  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ , נקבל:

$$2 - r = 4 - r^2 \Rightarrow r^2 - r - 2 = 0 \Rightarrow (r - 2)(r + 1) = 0 \Rightarrow r = 2 \Rightarrow z = 0.$$

כלומר יש לנו פרבולואיד וחרוט הפוכים הנחתכים במעגל ברדיוס 2 במישור  $z = 0$ , כאשר הפרבולואיד מעל החרוט.

נראה ש  $V$  גם דורש  $z \geq 1$ , כלומר נחתוך את החרוט והפרבולואיד במישור  $z = 1$ .  
לכן, אם נסמן את  $V_1$  להיות הגוף בין  $z = 1$  לפרבולואיד, ו- $V_2$  להיות הגוף בין  $z = 1$  לחרוט, נקבל:

$$\text{Vol}(V) = \text{Vol}(V_1) - \text{Vol}(V_2)$$

נסמן:

$$V_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | 1 \leq z \leq 4 - (x^2 + y^2)\}$$

$$V_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | 1 \leq z \leq 2 - \sqrt{x^2 + y^2}\}$$

אז:

• נחשב את  $\text{Vol}(V_1)$ :

$$\text{Vol}(V_1) = \iiint_{D_1} \int_{z=1}^{4-(x^2+y^2)} dz dx dy = \iint_{D_1} (3 - (x^2 + y^2)) dx dy$$

$D_1$  הוא ההיטל של  $V_1$  על מישור  $xy$ , שפתו היא  $4 - (x^2 + y^2) = z$  כאשר  $z = 1$ , כלומר  $x^2 + y^2 = 3$ .  
כלומר  $D_1 = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 3\}$ .  
נבצע החלפת משתנים קוטבית:

$$\begin{aligned} \text{Vol}(V_1) &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{3}} (3 - r^2) r dr d\theta = 2\pi \int_0^{\sqrt{3}} (3r - r^3) dr = 2\pi \left[ \frac{3}{2} r^2 - \frac{1}{4} r^4 \right]_0^{\sqrt{3}} \\ &= 2\pi \left( \frac{9}{2} - \frac{9}{4} \right) = 2\pi \cdot \frac{9}{4} = \frac{9\pi}{2} \end{aligned}$$

• נחשב את  $\text{Vol}(V_2)$ :

$$\text{Vol}(V_2) = \iiint_{D_2} \int_{z=1}^{2-\sqrt{x^2+y^2}} dz dx dy = \iint_{D_2} (1 - \sqrt{x^2 + y^2}) dx dy$$

$D_2$  הוא ההיטל של  $V_2$  על מישור  $xy$ , שפתו היא  $2 - \sqrt{x^2 + y^2} = z$  כאשר  $z = 1$ , כלומר  $\sqrt{x^2 + y^2} = 1$ , כלומר  $D_2 = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 1\}$ .  
נבצע החלפת משתנים קוטבית:

$$\begin{aligned} \text{Vol}(V_2) &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 (1 - r) r dr d\theta = 2\pi \int_0^1 (r - r^2) dr = 2\pi \left[ \frac{1}{2} r^2 - \frac{1}{3} r^3 \right]_0^1 \\ &= 2\pi \left( \frac{1}{6} \right) = \frac{\pi}{3} \end{aligned}$$

סה"כ:

$$\text{Vol}(V) = \text{Vol}(V_1) - \text{Vol}(V_2) = \frac{9\pi}{2} - \frac{\pi}{3} = \frac{27\pi}{6} - \frac{2\pi}{6} = \frac{25\pi}{6}$$

## 10.3 | החלפת משתנים לקואורדינטות גליליות

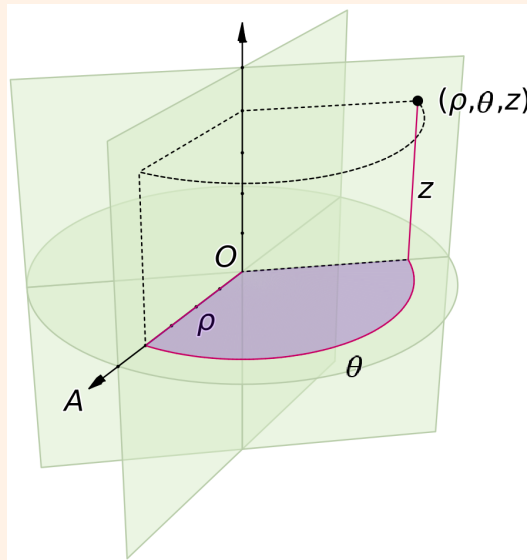
### רעיון

החלפת משתנים שימושית היא קואורדינטות גליליות.

$$\begin{cases} x = \rho \cos \theta \\ y = \rho \sin \theta \\ z = z \end{cases}$$

ואז:

$$\rho \geq 0, \quad 0 \leq \theta < 2\pi, \quad -\infty \leq z \leq \infty, \quad |J| = \rho,$$



### תרגיל 10.7.

יהא  $V \subset \mathbb{R}^3$  התחום:

$$V = \{(x, y, z) \mid 0 \leq z \leq \sqrt{x^2 + y^2} + 1, x^2 + y^2 \leq 1\}$$

חשבו את:

$$\iiint_V \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}} dx dy dz$$

**פתרון:**

נשים לב כי מדובר בגליל שחלקו העליון נחתך ע"י חרוט, לכן ניעזר בקואורדינטות גליליות:

$$\begin{cases} x = \rho \cos \theta \\ y = \rho \sin \theta \\ z = z \end{cases}$$

באופן מיידי אנו מקבלים תחום אינטגרציה נוח יותר:

$$\Delta = \left\{ (\rho, \theta, z) \mid 0 \leq \rho \leq 1, \quad 0 \leq \theta < 2\pi, \quad 0 \leq z \leq \rho + 1 \right\}$$

ולכן:

$$\begin{aligned} \iiint_V \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}} dx dy dz &= \iiint_{\Delta} \frac{z}{\rho} \cdot \rho d\rho d\theta dz = \int_0^{2\pi} \int_0^1 \int_0^{\rho+1} z dz d\rho d\theta = \int_0^{2\pi} \int_0^1 \frac{(\rho+1)^2}{2} d\rho d\theta \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \left( \frac{(\rho+1)^3}{3} \Big|_0^1 \right) d\theta = \frac{1}{2} \cdot 2\pi \cdot \left( \frac{8}{3} - \frac{1}{3} \right) = \frac{7\pi}{3} \end{aligned}$$

**תרגיל 10.8.**

מצאו את הנפח החסום ע"י המשטחים הבאים:

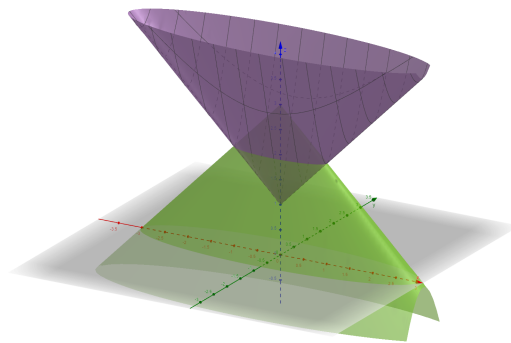
$$z = 1 + \sqrt{x^2 + 16y^2}, \quad z = 3 - \sqrt{x^2 + 16y^2}$$

**פתרון:**

עלינו לחשב את

$$\iint_D \int_{1+\sqrt{x^2+16y^2}}^{3-\sqrt{x^2+16y^2}} 1 dz dA$$

נותר להבין מהו התחום  $D$ , נשרטט אותו:



נמצא את משוואת החיתוך של הצורות:

$$1 + \sqrt{x^2 + 16y^2} = 3 - \sqrt{x^2 + 16y^2}$$

$$x^2 + 16y^2 = 1$$

$$x^2 + \frac{1}{\left(\frac{1}{4}\right)^2} y^2 = 1$$

כלומר  $D$  מוטל על מישור  $xy$  הוא האליפסה  $x^2 + \frac{1}{\left(\frac{1}{4}\right)^2} y^2 = 1$

נבצע החלפת משתנים גלילית מוכללת:

$$\begin{cases} x = \rho \cos \theta \\ y = \frac{1}{4} \rho \sin \theta \\ z = z \end{cases}$$

ואז התחום הינו:

$$\Delta = \left\{ (\rho, \theta, z) \mid 0 \leq \rho \leq 1, \quad 0 \leq \theta < 2\pi, \quad 1 + \rho \leq z \leq 3 - \rho \right\}$$

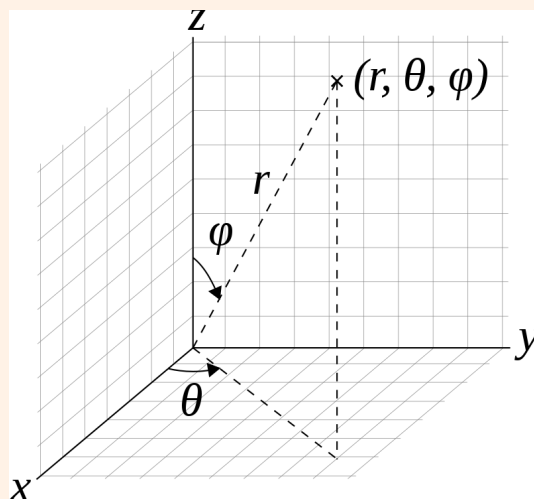
כלומר:

$$\text{Vol}(V) = \int_0^{2\pi} \int_0^1 \int_{1+\rho}^{3-\rho} \frac{1}{4} \rho dz d\rho d\theta = \dots = \frac{\pi}{6}$$

## 10.4 | החלפת משתנים לקואורדינטות כדוריות

### רעיון

החלפת משתנים שימושית נוספת היא **קואורדינטות כדוריות**, נניח כי יש לנו כדור יחידה ב- $\mathbb{R}^3$ :  
 $\{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$ , אנו יכולים למצוא הצגה טריגונומטרית של הקואורדינטות:



$$\begin{cases} x = r \sin \varphi \cos \theta \\ y = r \sin \varphi \sin \theta \\ z = r \cos \varphi \end{cases}$$

ונקבל:

$$r > 0, \quad 0 \leq \theta < 2\pi, \quad 0 \leq \varphi \leq \pi, \quad |J| = r^2 \sin \varphi,$$

### תרגיל 10.9.

יהא:

$$V = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + (z-1)^2 \leq 1\}$$

חשבו את האינטגרל:

$$\iiint_V \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z-1)^2}} dx dy dz$$

**פתרון:**

נשים לב כי  $V$  הוא כדור ברדיוס 1 סביב הנקודה  $(0, 0, 1)$ , אז נבצע החלפת משתנים כדורית, רק שנזיז את

קואורדינטת ה- $z$  ב-1.

$$\begin{cases} x = r \sin \varphi \cos \theta \\ y = r \sin \varphi \sin \theta \\ z - 1 = r \cos \varphi \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0 \leq \theta \leq 2\pi \\ 0 \leq \varphi \leq \pi \\ 0 \leq r \leq 1 \end{cases} \quad \text{כמו בכדוריות נקבל כי } |J| = r^2 \sin \varphi \text{ , גבולות האינטגרציה החדשים הם}$$

אז:

$$\begin{aligned} \iiint_V \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z-1)^2}} dx dy dz &= \iiint_{\Delta} \frac{1}{r} \cdot r^2 \sin \varphi dr d\varphi d\theta \\ &= 2\pi \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 = 2\pi \end{aligned}$$

## תרגול אחד עשר

### 11.1 | עקומים

#### תזכורת – עקום

עקום (או עקומה, או מסילה) הוא פונקציה רציפה:

$$\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$$

נסמן  $\gamma(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))$ . אם  $\gamma$  פונקציה גזירה, נסמן את נגזרתה  $\dot{\gamma}(t) = \gamma'(t)$ , ומתקיים:

$$\dot{\gamma}(t) = \left( \frac{d}{dt}x_1(t), \frac{d}{dt}x_2(t), \dots, \frac{d}{dt}x_n(t) \right)$$

#### תזכורת – עקום סגור ופשוט

יהא עקום  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,

• אם  $\gamma(a) = \gamma(b)$ , אז נקרא ל- $\gamma$  עקום סגור.

• אם  $\gamma$  אינו חותך את עצמו באף נקודה, פרט אולי לקצוות, כלומר:

$$\forall t \neq s \in (a, b), \gamma(t) \neq \gamma(s)$$

נקרא ל- $\gamma$  עקום פשוט.

#### תזכורת – שוויון עקומים עד כדאי פרמטריזציה

לעקומים שונים המתארים את אותה קבוצה במרחב נקרא עקומים שונים עד כדאי פרמטריזציה, לדוגמא:

$$\gamma_1(t) = (0, t), t \in [0, 1], \quad \gamma_2(t) = (0, 1 - t), t \in [0, 1]$$

$$\gamma_3(t) = (0, \sin(t)), t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \quad \gamma_4(t) = (0, 3t + 1), t \in \left[-\frac{1}{3}, 0\right]$$

## תזכורת – אורך עקום

יהא  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  עקום גזיר ברציפות, אז אורך העקום  $\gamma$  על הקטע  $[a, b]$  מוגדר כך:

$$\ell(\gamma) = \int_a^b \|\dot{\gamma}(t)\| dt = \int_a^b \sqrt{x_1'(t)^2 + x_2'(t)^2 + \dots + x_n'(t)^2} dt$$

אם  $\gamma_1, \gamma_2$  הן פרמטריזציות שונות של אותו עקום אז  $\ell(\gamma_1) = \ell(\gamma_2)$ .

## תרגיל 11.1.

מצאו ביטוי כללי להיקף האליפסה

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

פתרון:

נבחר את הפרמטריזציה:

$$\begin{cases} x = a \cos \theta \\ y = b \sin \theta \end{cases}$$

כאשר  $\theta \in [0, 2\pi]$ , אז:

$$\gamma'(\theta) = (-a \sin \theta, b \cos \theta)$$

ולכן:

$$\|\gamma'(\theta)\| = \sqrt{a^2 \sin^2 \theta + b^2 \cos^2 \theta}$$

כלומר:

$$\ell = \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2 \sin^2 \theta + b^2 \cos^2 \theta} d\theta$$

## הערה

עבור  $a, b = 1$  נקבל:

$$\ell = \int_0^{2\pi} \sqrt{\sin^2 \theta + \cos^2 \theta} d\theta = \int_0^{2\pi} 1 d\theta = 2\pi$$

שזה באמת אורך מעגל היחידה, לעומת זאת, עבור  $a, b \neq 1$  אין לנו נוסחה פשוטה לאינטגרל הזה, ונוכל רק לקרב אותו.

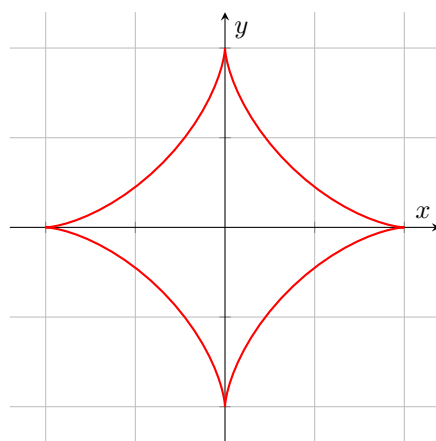
## תרגיל 11.2.

חשבו את אורך העקומה הנתונה ע"י הפרמטריזציה  $t \in [0, 2\pi]$

$$\begin{cases} x(t) = \cos^3 t \\ y(t) = \sin^3 t \end{cases}$$
פתרון:

$$\begin{aligned} \ell &= \int_0^{2\pi} \|\gamma'(t)\| dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{(-3\cos^2 t \sin t)^2 + (3\sin^2 t \cos t)^2} dt \\ &= 3 \int_0^{2\pi} \sqrt{\cos^4 t \sin^2 t + \sin^4 t \cos^2 t} dt \\ &= 3 \int_0^{2\pi} \sqrt{\cos^2 t \sin^2 t (\cos^2 t + \sin^2 t)} dt \\ &= 3 \int_0^{2\pi} |\cos t \sin t| dt = 3 \cdot 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t \sin t dt \\ &= 12 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t \sin t dt = 12 \cdot \frac{1}{2} [\sin^2 t]_0^{\frac{\pi}{2}} = 12 \cdot \frac{1}{2} = 6 \end{aligned}$$

$$\gamma(t) = (\cos^3(t), \sin^3(t))$$



## 11.2 | אינטגרל קווי מסוג ראשון

### תזכורת – אינטגרל קווי מסוג ראשון

בהינתן עקום  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$  גזיר ברציפות, ופונקציה רציפה  $f : D \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ , כאשר  $\text{Im } \gamma \subset D$ , אנו מגדירים את האינטגרל הקווי מסוג ראשון של  $f$  על גבי  $\gamma$  כך:

$$\int_{\gamma} f d\ell = \int_a^b f(\gamma(t)) \|\gamma'(t)\| dt$$

אם נחשוב על  $\gamma$  כחוט, ועל  $f$  כצפיפות החוט (למרות ש  $f$  יכולה להיות גם שלילית), אז אפשר לחשוב על  $\int_{\gamma} f d\ell$  כעל המסה של החוט.

במילים אחרות, אנו "זזים" על העקום  $\gamma(t)$ , וסוכמים את ערכי  $f$  בנקודה  $\gamma(t)$ , ומכפילים באורך הקטע הקטן סביב הנקודה  $\gamma(t)$ , כלומר,  $\|\gamma'(t)\| dt$ .

ערך האינטגרל אינו תלוי בפרמטריזציה של  $\gamma$ .

### 11.3. תרגיל

יהא  $a > 0$ ,  $C$  העקום הנתון ע"י הפרמטריזציה:

$$\begin{cases} x(t) = a(\cos t + t \sin t) \\ y(t) = a(\sin t - t \cos t) \end{cases}, t \in [0, 2\pi]$$

חשבו את:

$$\int_C (x^2 + y^2) d\ell$$

### פתרון:

נחשב את  $f(\gamma(t))$  ואת  $\|\gamma'(t)\|$  ונציב באינטגרל הקווי:

$$\begin{aligned} f(\gamma(t)) &= f(a(\cos t + t \sin t), a(\sin t - t \cos t)) \\ &= (a(\cos t + t \sin t))^2 + (a(\sin t - t \cos t))^2 \\ &= a^2 (\cos^2 t + 2t \cos t \sin t + t^2 \sin^2 t + \sin^2 t - 2 \sin t \cos t + t^2 \cos^2 t) = a^2 (1 + t^2) \\ \gamma'(t) &= (a(-\sin t + \sin t + t \cos t), a(\cos t - \cos t + t \sin t)) = (at \cos t, at \sin t) \end{aligned}$$

ולכן:

$$\|\gamma'(t)\| = \sqrt{(at \cos t)^2 + (at \sin t)^2} = |at| = at$$

סה"כ:

$$\begin{aligned}\int_C (x^2 + y^2) d\ell &= \int_0^{2\pi} a^2 (1 + t^2) a dt = a^3 \left( \frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{4} \right) \Big|_0^{2\pi} \\ &= a^3 \left( \frac{4\pi^2}{2} + \frac{16\pi^4}{4} \right)\end{aligned}$$

## תרגיל 11.4.

יהיו  $a, b > 0$ , נסמן את העקום  $\gamma$  הנתון ע"י הפרמטריזציה:

$$\begin{cases} x = a \cos t \\ y = a \sin t \\ z = bt \end{cases}, \quad t \in [0, 2\pi]$$

חשבו את מסת  $\gamma$  עם פונקציית הצפיפות  $f(x, y, z) = \frac{1}{x^2 + y^2 + z^2}$ .פתרון:נחשב את  $f(\gamma(t))$  ואת  $\|\gamma'(t)\|$  ונציב באינטגרל הקווי:

$$f(\gamma(t)) = \frac{1}{(a \cos t)^2 + (a \sin t)^2 + (bt)^2} = \frac{1}{a^2 + b^2 t^2}$$

וכן:

$$\gamma'(t) = (-a \sin t, a \cos t, b)$$

ולכן:

$$\|\gamma'(t)\| = \sqrt{(-a \sin t)^2 + (a \cos t)^2 + b^2} = \sqrt{a^2 + b^2}$$

סה"כ:

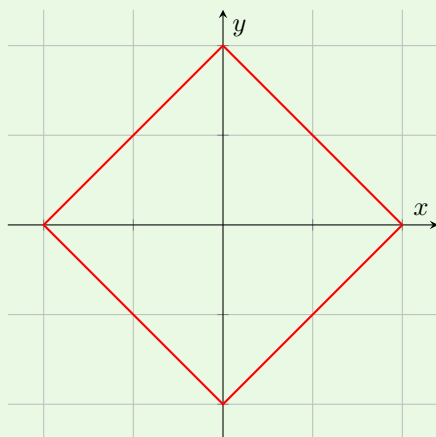
$$\begin{aligned}\int_\gamma f d\ell &= \int_0^{2\pi} f(\gamma(t)) \cdot \|\gamma'(t)\| dt = \int_0^{2\pi} \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a^2 + b^2 t^2} dt \\ &= \sqrt{a^2 + b^2} \cdot \int_0^{2\pi} \frac{1}{a^2} \cdot \frac{1}{\left(1 + \left(\frac{b}{a}\right)^2 t^2\right)} dt = \sqrt{a^2 + b^2} \cdot \frac{1}{a^2} \int_0^{2\pi} \frac{1}{\left(1 + \left(\frac{b}{a}\right)^2 t^2\right)} dt\end{aligned}$$

נבצע החלפת משתנים:  $\text{אז}, s = \frac{b}{a}t \Rightarrow ds = \frac{b}{a}dt \Rightarrow \begin{cases} t = 0 \Rightarrow s = 0 \\ t = 2\pi \Rightarrow s = \frac{2b\pi}{a} \end{cases}$

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} f dl &= \sqrt{a^2 + b^2} \cdot \frac{1}{a^2} \int_0^{2\pi} \frac{1}{\left(1 + \left(\frac{b}{a}t\right)^2\right)} dt = \sqrt{a^2 + b^2} \cdot \frac{1}{a^2} \cdot \frac{a}{b} \int_0^{\frac{2b\pi}{a}} \frac{1}{(1 + s^2)} ds \\ &= \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{ab} \left( \arctan(s) \Big|_{s=0}^{s=\frac{2b\pi}{a}} \right) = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{ab} \left( \arctan\left(\frac{2b\pi}{a}\right) \right) \end{aligned}$$

### תרגיל 11.5.

חשבו את  $\int_C f(x, y) dl$  כאשר  $f(x, y) = xy$  ו- $C$  המסילה  $|x| + |y| = 1$ .



### פתרון:

נחלק את המסילה לארבע מסילות שונות,  $C_1, C_2, C_3, C_4$  כאשר כל מסילה היא ישר, ואז מתקיים:

$$\int_C xy dl = \int_{C_1} xy dl + \int_{C_2} xy dl + \int_{C_3} xy dl + \int_{C_4} xy dl$$

נחשב את האינטגרלים עבור  $C_1, C_2$ :

$C_1$  היא המסילה  $C_1(t) = (1-t, t)$  עבור  $t \in [0, 1]$   $C_2$  היא המסילה  $C_2(t) = (-t, 1-t)$  עבור  $t \in [0, 1]$  אז:

$$\begin{aligned} C_1'(t) &= (-1, 1) \Rightarrow \|C_1'(t)\| = \sqrt{2} \\ C_2'(t) &= (-1, -1) \Rightarrow \|C_2'(t)\| = \sqrt{2} \end{aligned}$$

אז:

$$\int_{C_1} xy dl = \int_0^1 t(1-t)\sqrt{2} dt, \quad \int_{C_2} xy dl = \int_0^1 -t(1-t)\sqrt{2} dt$$

בפרט:

$$\int_{C_1} xy d\ell + \int_{C_2} xy d\ell = 0$$

תרגול עצמי

השלימו את התרגיל, והראו כי גם  $\int_{C_3} xy d\ell + \int_{C_4} xy d\ell = 0$ , ולכן  $\int_C xy d\ell = 0$ .

## תרגיל 11.6.

חשבו את האינטגרל הקווי:

$$\int_C (x^2 + y^2) d\ell$$

כאשר  $C$  הוא העקום הנתון ע"י הפרמטריזציה:

$$\begin{cases} x(t) = 2 \cos t \\ y(t) = 2 \sin t \end{cases}, t \in [0, 2\pi]$$

**פתרון:**נחשב את  $f(\gamma(t))$  ואת  $\|\gamma'(t)\|$  ונציב באינטגרל הקווי:

$$f(\gamma(t)) = f(2 \cos t, 2 \sin t) = (2 \cos t)^2 + (2 \sin t)^2 = 4(\cos^2 t + \sin^2 t) = 4$$

$$\gamma'(t) = (-2 \sin t, 2 \cos t)$$

$$\|\gamma'(t)\| = \sqrt{(-2 \sin t)^2 + (2 \cos t)^2} = 2$$

סה"כ:

$$\int_C (x^2 + y^2) d\ell = \int_0^{2\pi} 4 \cdot 2 dt = 8 \cdot 2\pi = 16\pi$$

## 11.3 | אינטגרל קווי מסוג שני

### תזכורת – (אינטגרל קווי מסוג שני)

יהא  $\gamma : [a, b] \rightarrow D \subset \mathbb{R}^2$  עקום גזיר ברציפות, ויהא  $\vec{F} : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  שדה וקטורי רציף על  $D$ , כך ש  $\text{Im}(\gamma) \subset D$ . נסמן את האינטגרל הקווי מסוג שני בתור:

$$\int_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

אינטגרל זה מחשב את האינטראקציה של השדה  $\vec{F}$  עם המסילה  $\gamma$  בצורה הבאה: בכל נקודה  $t$ , נתבונן ב- $\langle \vec{F}(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle$  ונבצע אינטגרציה לפי  $t$ . בשפה פיזיקלית, אם נחשוב על  $\gamma$  כחלקיק הנע במרחב ועל  $\vec{F}$  ככוח הפועל על החלקיק, אז  $\int_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r}$  שווה לעבודה שמפעיל  $\vec{F}$  על  $\gamma$ .

אם נסמן  $\vec{F}(x, y) = (P(x, y), Q(x, y))$  כאשר  $P, Q : D \rightarrow \mathbb{R}$  ו  $\gamma(t) = (x(t), y(t))$  אז:

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r} &= \int_a^b \langle \vec{F}(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle dt = \int_a^b \left\langle \begin{pmatrix} P(x(t), y(t)) \\ Q(x(t), y(t)) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} \right\rangle dt \\ &= \int_a^b P(x(t), y(t))x'(t) + Q(x(t), y(t))y'(t) dt \end{aligned}$$

לעיתים נסמן  $dx = x'(t)dt, dy = y'(t)dt$  ואז:

$$\int_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{\gamma} Pdx + Qdy$$

שימו לב שזה סימון בלבד! אבל הוא עוזר לנו לזכור את ההגדרה. אם  $\gamma$  היא מסילה סגורה, כלומר  $\gamma(a) = \gamma(b)$ , נסמן:

$$\int_{\gamma} Pdx + Qdy = \oint_{\gamma} Pdx + Qdy$$

### הערה

באופן דומה, אם אנו ב- $\mathbb{R}^3$ :

$$\vec{F}(x, y, z) = (P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z)), \quad \gamma(t) = (x(t), y(t), z(t))$$

אז:

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} Pdx + Qdy + Rdz &= \int_a^b \langle \vec{F}(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle dt \\ &= \int_a^b P(x(t), y(t), z(t))x'(t) + Q(x(t), y(t), z(t))y'(t) + R(x(t), y(t), z(t))z'(t) dt \end{aligned}$$

## הערה

ערך האינטגרל תלוי בכיוון הפרמטריזציה (האוריינטציה) של  $\gamma$ , בצורה הבאה:

1. אם  $\gamma_1, \gamma_2$  הן פרמטריזציות של אותה מסילה, וגם  $\gamma_1(a) = \gamma_2(a) = A, \gamma_1(b) = \gamma_2(b) = B$  אז אכן:

$$\int_{\gamma_1} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{\gamma_2} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

2. אם  $\gamma_1, \gamma_2$  הן פרמטריזציות של אותה מסילה, אך בעלות כיוונים הפוכים, כלומר:  $\gamma_1(a) = A = \gamma_2(b), \gamma_1(b) = B = \gamma_2(a)$  אז עלינו להפוך את סימן האינטגרל

$$\int_{\gamma_1} \vec{F} \cdot d\vec{r} = - \int_{\gamma_2} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

כלומר, האינטגרל תלוי רק בכיוון הפרמטריזציה.

## תרגיל 11.7.

חשבו את:

$$\int_{\gamma} ydx + xdy$$

כאשר  $\gamma$  המסילה העוברת על  $y = x^2$  בין  $x = 0$  ל  $x = 1$ .

## פתרון:

נתחיל בלהבין מהו  $\vec{F}$ , ולמצוא פרמטריזציה ל  $\gamma$ .

$$\vec{F}(x, y) = (P(x, y), Q(x, y)) = (y, x)$$

כלומר,  $P(x, y) = y, Q(x, y) = x$ . עבור המסילה, מתקיים:

$$\gamma(t) = (x(t), y(t)) = (t, t^2), \quad t \in [0, 1]$$

אז לפי הגדרה:

$$\int_{\gamma} ydx + xdy = \int_0^1 y(t)x'(t) + x(t)y'(t) = \int_0^1 t^2 + t \cdot 2t = \int_0^1 3t^2 = 1$$

## תרגיל 11.8.

יהי  $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3$  עקום גזיר ברציפות המוכל על ספירת היחידה  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ , ויהי  $\vec{F}(x, y, z) = (x, y, z)$ . הראו כי  $\int_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$ .

**פתרון:**

נסמן  $\gamma(t) = (x(t), y(t), z(t))$ , אז לפי הנתון, לכל  $t \in [0, 1]$ :

$$\|\gamma(t)\|^2 = x^2(t) + y^2(t) + z^2(t) = 1$$

בפרט,

$$0 = \frac{d}{dt} \|\gamma(t)\|^2 = x(t)x'(t) + y(t)y'(t) + z(t)z'(t)$$

מצד שני, לפי הגדרת האינטגרל הקווי:

$$\int_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_0^1 x(t)x'(t) + y(t)y'(t) + z(t)z'(t)dt = \int_0^1 0dt = 0$$

**תרגיל 11.9.**

יהא  $\varepsilon > 0$ , נסמן  $\gamma : [0, \frac{\pi}{4} - \varepsilon] \rightarrow \mathbb{R}^2$  על ידי  $\gamma(t) = (\cos(t), \sin(t))$ . יהא  $n \in \mathbb{N}$ , נסמן את השדה הוקטורי  $\vec{F}_n = (-2^n y(xy)^n, 2^n x(xy)^n)$ , חשבו את:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\gamma} \vec{F}_n \cdot d\vec{r}$$

**פתרון:**

יהא  $n \in \mathbb{N}$ , נחשב את האינטגרל הקווי:

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} \vec{F}_n \cdot d\vec{r} &= \int_0^{\frac{\pi}{4}-\varepsilon} -2^n \sin(t)(\cos(t) \sin(t))^n (-\sin(t)) + 2^n \cos(t)(\cos(t) \sin(t))^n (\cos(t)) dt \\ &= 2^n \int_0^{\frac{\pi}{4}-\varepsilon} (\cos(t) \sin(t))^n (\sin^2(t) + \cos^2(t)) dt = 2^n \int_0^{\frac{\pi}{4}-\varepsilon} (\cos(t) \sin(t))^n dt \\ &= 2^n \int_0^{\frac{\pi}{4}-\varepsilon} \left( \frac{\sin(2t)}{2} \right)^n dt = \int_0^{\frac{\pi}{4}-\varepsilon} (\sin(2t))^n dt \end{aligned}$$

נסמן  $f_n : [0, \frac{\pi}{4} - \varepsilon] \rightarrow \mathbb{R}$  על ידי  $f_n(t) = (\sin(2t))^n$ , אז מתקיים:

$$\sup_{t \in [0, \frac{\pi}{4} - \varepsilon]} |f_n(t)| = \left| \sin \left( 2 \left( \frac{\pi}{4} - \varepsilon \right) \right) \right|^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

כאשר השתמשנו בכך ש- $\sin(t)$  עולה בתחום  $[0, \pi/2]$ , וש- $\sin(s) < 1$  לכל  $s \in (0, \pi)$ . בפרט, הסדרה  $f_n$  מתכנסת במ"ש לפונקציה 0, ולכן:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\gamma} \vec{F}_n \cdot d\vec{r} = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\frac{\pi}{4}-\varepsilon} (\sin(2t))^n dt = 0$$

## תרגיל 11.10.

חשבו את העבודה של השדה הוקטורי  $\vec{F} = (x^2, 2y, z^2)$  לאורך הישר העובר בין  $(1, 2, 0)$  ל  $(3, -1, 1)$ .

**פתרון:**

נתחיל בלמצוא פרמטריזציה לעקום שלנו:

$$\gamma(t) = (1-t)(1, 2, 0) + t(3, -1, 1) = (1+2t, 2-3t, t), \quad t \in [0, 1]$$

כלומר:

$$x(t) = 1+2t \Rightarrow dx = 2dt, \quad y(t) = 2-3t \Rightarrow dy = -3dt, \quad z(t) = t \Rightarrow dz = dt$$

אז:

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r} &= \int_{\gamma} (x^2 dx + 2y dy + z^2 dz) \\ &= \int_0^1 ((1+2t)^2 2 + 2(2-3t)(-3) + t^2) dt \\ &= \int_0^1 (2(1+4t+4t^2) - 6(2-3t) + t^2) dt \\ &= \int_0^1 (9t^2 + 26t - 10) dt = [3t^3 + 13t^2 - 10t] \Big|_0^1 = 6 \end{aligned}$$

## תרגול שנים עשר

### 12.1 | שדה משמר ופונקציית פוטנציאל

#### תזכורת – (שדה משמר)

שדה וקטורי רציף  $\vec{F}(x, y) = (P(x, y), Q(x, y))$  נקרא שדה משמר בתחום  $D$  אם עבור כל זוג עקומים גזירים ברציפות,  $\gamma_1, \gamma_2 \subset D$  עם אותן נקודות קצה  $\gamma_1(a) = \gamma_2(a)$ ,  $\gamma_1(b) = \gamma_2(b)$  מתקיים:

$$\int_{\gamma_1} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{\gamma_2} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

במקרה זה, האינטגרל על גבי כל מסילה סגורה  $\gamma$  חייב להתאפס:

$$\oint_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$$

למעשה, ראינו בהרצאה כי זהו תנאי שקול; כלומר, אם  $\oint_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$  לכל מסילה סגורה  $\gamma$  ב- $D$ , אז  $\vec{F}$  שדה משמר ב- $D$ .

#### תרגיל 12.1.

יהא  $\vec{F}(x, y) = (y, 2x)$ , האם  $\vec{F}$  שדה משמר ב- $\mathbb{R}^2$ ?

#### פתרון:

נראה כי השדה אינו משמר: נסמן  $p_1 = (-1, 0)$ ,  $p_2 = (1, 0)$ . נחפש שתי מסילות,  $\gamma_1, \gamma_2$  מ- $p_1$  ל- $p_2$  כך ש-

$$\int_{\gamma_1} Pdx + Qdy \neq \int_{\gamma_2} Pdx + Qdy$$

תהא המסילה  $\gamma_1(t) = (t, 0)$ , כאשר  $t \in [-1, 1]$ , אז:

$$\int_{\gamma_1} Pdx + Qdy = \int_{-1}^1 0 \cdot 1 + 2t \cdot 0 dt = 0$$

תהא המסילה  $\gamma_2(t) = (\cos(t), \sin(t))$  כאשר  $t \in [\pi, 2\pi]$  אז:

$$\begin{aligned} \int_{\gamma_2} Pdx + Qdy &= \int_{\pi}^{2\pi} \sin(t)(-\sin(t)) + 2\cos(t)\cos(t)dt = \int_{\pi}^{2\pi} -\sin^2(t) + 2\cos^2(t)dt \\ &= \int_{\pi}^{2\pi} -1 + 3\cos^2(t)dt = -\pi + 3 \int_{\pi}^{2\pi} \cos^2(t)dt = \dots = \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

כלומר השדה אינו משמר.

### תזכורת – פונקציית פוטנציאל

יהא  $D$  תחום פתוח וקשיר. ראינו בהרצאה את 2 המשפטים הבאים:

1. אם קיימת  $U : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  פונקציה גזירה ברציפות, המקיימת  $\vec{F} = \nabla U$ , כלומר:

$$\forall (x, y) \in D, \quad U_x(x, y) = P(x, y), \quad U_y = Q(x, y)$$

אז  $\vec{F}$  שדה משמר ב- $D$ .

2. אם  $\vec{F}$  שדה משמר, אז נבחר  $A \in D$ , ונגדיר את הפונקציה הבאה: לכל  $(x, y) \in D$ , נסמן  $\gamma_{(x,y)} : [a, b] \rightarrow D$  מסילה כלשהי מ- $A$  ל- $(x, y)$ , כלומר  $\gamma_{(x,y)}(a) = A, \gamma_{(x,y)}(b) = (x, y)$  אז:

$$U(x, y) = \int_{\gamma_{(x,y)}} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

היא פונקציה גזירה ברציפות המקיימת  $\nabla U = \vec{F}$ .

כלומר,  $\vec{F}$  שדה משמר אם ורק אם  $\vec{F} = \nabla U$  עבור  $U$  גזירה ברציפות כלשהי. נקרא ל- $U$  פונקציית פוטנציאל של  $\vec{F}$ . במקרה זה, נשים לב כי:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} U(\gamma(t)) &= \frac{\partial}{\partial t} (U(x(t), y(t))) = U_x(x(t), y(t))x'(t) + U_y(x(t), y(t))y'(t) \\ &= P(x(t), y(t))x'(t) + Q(x(t), y(t))y'(t) = \langle \vec{F}(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle \end{aligned}$$

כאשר סימנו  $\gamma(t) = (x(t), y(t))$  אז:

$$\int_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_a^b \langle \vec{F}(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle dt = \int_a^b \frac{\partial}{\partial t} U(\gamma(t)) dt = U(\gamma(b)) - U(\gamma(a)) = U(B) - U(A)$$

## תזכורת

נזכור שראינו שאם  $\vec{F} = (P, Q) = \nabla U$  אז:

$$Q_x(x, y) = P_y(x, y)$$

כלומר, אם  $\vec{F}$  משמר ב- $D$ , אז בהכרח  $P_y(x, y) = Q_x(x, y)$  לכל  $(x, y) \in D$ .

## תרגיל 12.2.

מצאו את פונקציית הפוטנציאל של השדות הווקטוריים הבאים:

1.

$$\vec{F} = (2xy + 3y, x^2 + 3x - 5)$$

2.

$$\vec{F} = \left( \frac{y(3x^3 - 1)}{x}, x^3 + \cos(y) - \ln(x) \right)$$

## פתרון:

1. נזכיר כי אנו מחפשים  $U(x, y)$  כך ש  $\nabla U = \vec{F}$ , כלומר:

$$U_x = P(x, y) = 2xy + 3y, \quad U_y = Q(x, y) = x^2 + 3x - 5$$

בפרט,

$$U(x, y) = \int P(x, y) dx = \int (2xy + 3y) dx = 2y \cdot \frac{x^2}{2} + 3xy + C_1(y) = yx^2 + 3xy + C_1(y)$$

וגם:

$$U(x, y) = \int Q(x, y) dy = \int (x^2 + 3x - 5) dy = yx^2 + 3xy - 5y + C_2(x)$$

כלומר:

$$yx^2 + 3xy + C_1(y) = yx^2 + 3xy - 5y + C_2(x) \Rightarrow C_1(y) + 5y = C_2(x)$$

נבחר למשל  $C_1(y) = -5y, C_2(x) = 0$  אז:

$$U(x, y) = yx^2 + 3xy - 5y$$

## הערה

נשים לב כי היה אפשר לבחור גם  $C_1(y) = -5y + 2026$ ,  $C_2(x) = -2026$ , אז היינו מקבלים:

$$U(x, y) = yx^2 + 3xy - 5y + 2026$$

וזה מתאים לעובדה הבאה:  
אם  $U(x, y)$  פונקציית פוטנציאל של  $\vec{F}$ , אז גם  $V(x, y) = U(x, y) + c$  היא פונקציית פוטנציאל של  $\vec{F}$  לכל  $c \in \mathbb{R}$ .

2. נבצע את אותו הטריק:

$$U(x, y) = \int \frac{y(3x^3 - 1)}{x} dx = \int \left( 3yx^2 - \frac{y}{x} \right) dx = yx^3 - y \ln(x) + C_1(y)$$

$$U(x, y) = \int (x^3 + \cos(y) - \ln(x)) dy = yx^3 + \sin(y) - y \ln(x) + C_2(x)$$

לאחר השוואת שני הביטויים נקבל כי ניתן לבחור  $C_1(y) = \sin(y)$ ,  $C_2(x) = 0$ , ולכן:

$$U(x, y) = yx^3 + \sin(y) - y \ln(x) + c$$

היא פונקציית הפוטנציאל של  $\vec{F}$  לכל  $c \in \mathbb{R}$ .

## תרגיל 12.3

חשבו את האינטגרל:

$$\int_{\gamma} \left( \frac{1}{x^2} \sin y \cdot e^{\frac{1}{x}} + y^3 \right) dx + \left( 3y^2 x + \sin y - \cos y \cdot e^{\frac{1}{x}} \right) dy$$

כאשר  $\gamma$  היא מסילה המונחת על חלק מהמעגל  $(x-2)^2 + y^2 = 1$ , המתחילה בנקודה  $(2, 1)$  ונגמרת בנקודה  $(2, -1)$ , עם כיוון השעון.

## פתרון:

קצת מפחיד לחשב את האינטגרל הזה ישירות, לכן נשים לב כי השדה מוגדר בתחום  $x > 0$  (שהוא פשוט-קשר). נבדוק האם השדה משמר בתחום זה, כלומר נבדוק אם מתקיים  $P_y = Q_x$ :

$$P_y = \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{1}{x^2} \sin y \cdot e^{\frac{1}{x}} + y^3 \right) = \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2} \cos y + 3y^2$$

$$Q_x = \frac{\partial}{\partial x} \left( 3y^2 x + \sin y - \cos y \cdot e^{\frac{1}{x}} \right) = 3y^2 - \frac{-1}{x^2} e^{\frac{1}{x}} \cos y$$

כלומר מתקיים  $P_y = Q_x$  לכל  $(x, y)$  בתחום הגדרתו  $x > 0$ .

## הערה

בהמשך התרגול נראה כי תנאי זה מבטיח שהשדה משמר (בתחום פשוט-קשר), אך כרגע אנו עדיין לא יודעים זאת. עם זאת, אם היינו מקבלים  $P_y \neq Q_x$ , היינו יודעים שהשדה אינו משמר, ולכן לא היינו יכולים להשתמש בשיטת הפוטנציאל.

נחפש פונקציית פוטנציאל  $U(x, y)$ :

$$U(x, y) = \int P(x, y) dx = \int \left( \frac{1}{x^2} \sin y \cdot e^{\frac{1}{x}} + y^3 \right) dx = -\sin y \cdot e^{\frac{1}{x}} + y^3 x + C_1(y)$$

וגם:

$$U(x, y) = \int Q(x, y) dy = \int \left( 3y^2 x + \sin y - \cos y \cdot e^{\frac{1}{x}} \right) dy = y^3 x - \cos y - \sin y \cdot e^{\frac{1}{x}} + C_2(x)$$

כלומר:

$$-\sin y \cdot e^{\frac{1}{x}} + y^3 x + C_1(y) = y^3 x - \cos y - \sin y \cdot e^{\frac{1}{x}} + C_2(x) \Rightarrow C_1(y) + \cos y = C_2(x)$$

כלומר,  $C_1(y) = -\cos y$ ,  $C_2(x) = 0$ , ולכן:

$$U(x, y) = y^3 x - \cos y - \sin y \cdot e^{\frac{1}{x}}$$

ולכן:

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} P dx + Q dy &= U(2, -1) - U(2, 1) \\ &= \left( -\sin(-1) \cdot e^{\frac{1}{2}} - 2 - \cos(-1) \right) - \left( -\sin(1) \cdot e^{\frac{1}{2}} + 2 - \cos(1) \right) \\ &= 2 \sin(1) \cdot e^{\frac{1}{2}} - 4 \end{aligned}$$

## 12.2 | משפט גרין

## תזכורת – (משפט גרין)

יהי  $D$  תחום פשוט-קשר ב- $\mathbb{R}^2$  (כלומר, תחום בלי חורים). תהי  $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$  מסילה סגורה, פשוטה וגזירה למקוטעין, התוחמת את התחום  $D$  כלומר  $\partial D = \gamma([0, 1])$ , במגמה חיובית כלפי  $D$ , כלומר כאשר אנו מתקדמים לאורך  $\gamma$ , אז  $D$  נמצא תמיד משמאלנו. אז כל שדה ווקטורי  $\vec{F} = (P(x, y), Q(x, y))$  עם גזרות חלקיות רציפות על  $D$  מקיים:

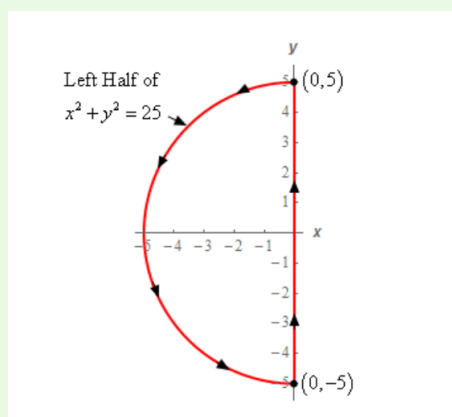
$$\oint_{\gamma} P dx + Q dy = \iint_D \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy$$

## הערה

מסקנה מיידיית מכך: אם  $D$  תחום פשוט-קשר, אז כל שדה ווקטורי  $\vec{F} = (P(x, y), Q(x, y))$  המקיים  $P_y = Q_x$  מקיים כי לכל מסילה סגורה  $\gamma$  מתקיים  $\oint_{\gamma} P dx + Q dy = 0$ , ולכן השדה הווקטורי משמר ב- $D$ .

## תרגיל 12.4.

חשבו את  $\oint_{\gamma} y^3 dx - x^3 dy$ , כאשר  $\gamma$  המסילה הבאה:



## פתרון:

נשתמש במשפט גרין. נשים לב כי  $\gamma$  חוסמת את התחום  $D$  שהוא פשוט-קשר, במגמה חיובית כלפי  $D$ . בפרט:

$$\oint_{\gamma} y^3 dx - x^3 dy = \iint_D \frac{\partial}{\partial x}(-x^3) - \frac{\partial}{\partial y}(y^3) dx dy = \iint_D -3y^2 - 3x^2 dx dy$$

נעבור לקואורדינטות קוטביות (פולריות)  $x = r \cos(\theta)$ ,  $y = r \sin(\theta)$  בתחום  $0 \leq r \leq 5$ ,  $\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{3\pi}{2}$ :

$$\iint_D -3y^2 - 3x^2 dx dy = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \int_0^5 -3r^3 dr d\theta = -\pi \int_0^5 3r^3 dr = -\frac{3 \cdot 5^4}{4} \pi$$

## תרגיל 12.5.

חשבו את  $\oint_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r}$ , כאשר  $\vec{F}(x, y) = (e^y, -\sin(\pi x))$  ו- $\gamma$  היא שפת המשולש שקודקודיו הם

$$(1, 0), (0, 1), (-1, 0)$$

נגד כיוון השעון.

**פתרון:**

נשתמש במשפט גרין. אם נסמן  $\gamma = \partial T$ , אז:

$$\oint_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_T \frac{\partial}{\partial x} (-\sin(\pi x)) - \frac{\partial}{\partial y} e^y dx dy = \iint_T -\pi \cos(\pi x) - e^y dx dy$$

תחום האינטגרציה  $T$  הוא:

$$T = \{(x, y) | y \in [0, 1], y - 1 \leq x \leq 1 - y\}$$

אז:

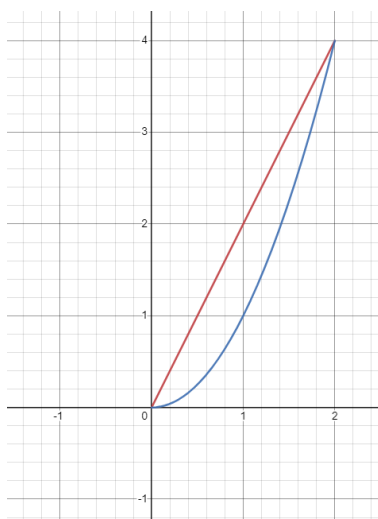
$$\begin{aligned} \oint_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r} &= \int_0^1 \int_{y-1}^{1-y} -\pi \cos(\pi x) - e^y dx dy \\ &= \int_0^1 [-\sin(\pi x) - x e^y] \Big|_{x=y-1}^{x=1-y} dy \\ &= \int_0^1 [-\sin(\pi(1-y)) + \sin(\pi(y-1)) - (1-y)e^y + (y-1)e^y] dy \\ &= \int_0^1 [-2 \sin(\pi(1-y)) - 2(1-y)e^y] dy \\ &= \dots = 4 - 2e - \frac{4}{\pi} \end{aligned}$$

**תרגיל 12.6.**

חשבו את העבודה שחלקיק עושה כאשר נע בקו ישר בין  $(0, 0)$  ל- $(2, 4)$ , ואז חוזר לאורך  $y = x^2$  לראשית, דרך שדה הכוח  $\vec{F}(x, y) = (e^{x^{45} \sin x}, e^x)$ .

**פתרון:**

נשרטט את המסילה.



נשים לב כי המסילה היא בעלת אוריינטציה שלילית. נסמן ב- $\gamma$  את המסילה בעלת האוריינטציה החיובית, ונחשב את  $\oint_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r}$ .  
על פי משפט גרין:

$$-W = \oint_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_D \frac{\partial}{\partial x} e^x - \frac{\partial}{\partial y} (e^{x^4} \sin x) = \iint_D e^x$$

כאשר  $D$  הוא התחום:

$$D = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 2, x^2 \leq y \leq 2x\}$$

אז:

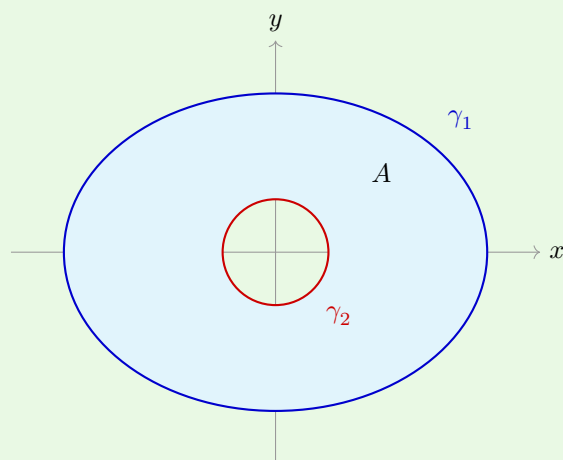
$$-W = \iint_D e^x dx dy = \int_0^2 \int_{x^2}^{2x} e^x dy dx = \int_0^2 e^x \int_{x^2}^{2x} dy dx = \int_0^2 e^x (2x - x^2) dx = \dots = 4$$

כלומר  $W = -4$ .

### תרגיל 12.7.

נסמן ב- $A$  את הקבוצה הכלואה בתוך האליפסה ומחוץ לעיגול היחידה:

$$A = \left\{ (x, y) \mid 1 \leq x^2 + y^2 \text{ וגם } \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} \leq 1 \right\}$$



חשבו את האינטגרל:

$$\iint_A 4x^2 dx dy$$

**פתרון:**

נסמן את התחומים המלאים:

$$D_1 = \left\{ (x, y) \mid \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} \leq 1 \right\}, \quad D_2 = \{ (x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 1 \}$$

אז  $D_1 = D_2 \sqcup A$  ובפרט:

$$\iint_A 4x^2 dx dy = \iint_{D_1} 4x^2 dx dy - \iint_{D_2} 4x^2 dx dy$$

העקומים הבאים מהווים פרמטריזציה במגמה חיובית של שפתם בהתאמה:

$$\gamma_1(t) = (4 \cos t, 3 \sin t), \quad \gamma_2(t) = (\cos t, \sin t) \quad t \in [0, 2\pi]$$

נחפש שדה וקטורי  $\vec{F} = (P, Q)$  כך ש- $Q_x - P_y = 4x^2$ . נבחר את השדה:

$$P(x, y) = 0, \quad Q(x, y) = \frac{4x^3}{3}$$

נפעיל את משפט גרין על האליפסה  $D_1$ , ונקבל:

$$\iint_{D_1} 4x^2 dx dy = \oint_{\gamma_1} \frac{4x^3}{3} dy = \int_0^{2\pi} \frac{4(4 \cos t)^3}{3} (3 \cos t) dt = \int_0^{2\pi} 256 \cos^4 t dt$$

כעת נפעיל את משפט גרין על עיגול היחידה  $D_2$ , ונקבל:

$$\iint_{D_2} 4x^2 dx dy = \oint_{\gamma_2} \frac{4x^3}{3} dy = \int_0^{2\pi} \frac{4(\cos t)^3}{3} (\cos t) dt = \frac{4}{3} \int_0^{2\pi} \cos^4 t dt$$

אז סה"כ:

$$\iint_A 4x^2 dx dy = \int_0^{2\pi} 256 \cos^4 t dt - \frac{4}{3} \int_0^{2\pi} \cos^4 t dt = \left(256 - \frac{4}{3}\right) \int_0^{2\pi} \cos^4 t dt$$

נשאיר כתרגול עצמי את החישוב של  $\int_0^{2\pi} \cos^4 t dt$ , הרמז הוא להשתמש פעמיים בזהות  $\cos^2 t = \frac{1+\cos(2t)}{2}$ .

## 12.3 | פרמטריזציה של משטח

תזכורת – (הצגה פרמטרית של משטח ב  $\mathbb{R}^3$ )

הצגה פרמטרית של משטח ב  $\mathbb{R}^3$  היא העתקה רציפה:

$$\vec{S} : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3.$$

כלומר:

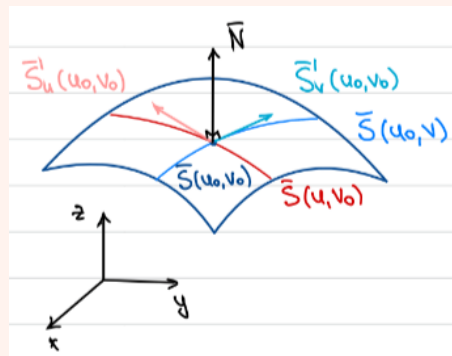
$$\vec{S}(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$$

תהא נקודה על המשטח  $\vec{S}(u_0, v_0) = (x(u_0, v_0), y(u_0, v_0), z(u_0, v_0))$ , הנורמל למשטח בנקודה זו מוגדר על ידי:

$$\vec{N}(u_0, v_0) = \frac{\partial \vec{S}}{\partial u}(u_0, v_0) \times \frac{\partial \vec{S}}{\partial v}(u_0, v_0) = \det \begin{pmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{pmatrix}$$

כאשר

$$\hat{i} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{j} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{k} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$



## הערה

נשים לב כי  $S_u(u_0, v_0), S_v(u_0, v_0)$  הם וקטורים משיקים למשטח בנקודה  $\vec{S}(u_0, v_0)$ , ו- $\vec{N}(u_0, v_0)$  מאונך להם.

## תזכורת – (שטח פנים של משטח)

תהא  $\vec{S} : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  פרמטריזציה גזירה ברציפות כך ש  $\vec{N}(u, v) \neq \vec{0}$  לכל  $(u, v) \in D$ . נגדיר את שטח הפנים של המשטח  $S$  כ:

$$A = \iint_D \|\vec{N}(u, v)\| du dv = \iint_D \left\| \frac{\partial \vec{S}}{\partial u}(u, v) \times \frac{\partial \vec{S}}{\partial v}(u, v) \right\| du dv$$

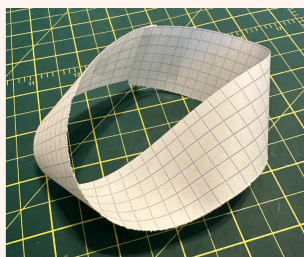
## הערה

אם  $S$  הוא גרף של פונקציה גזירה ברציפות  $z = f(x, y)$ , כלומר, קיימת פרמטריזציה  $\vec{S}(u, v) = (u, v, f(u, v))$ :

$$\|N\| = \left\| \det \begin{pmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & 0 & f_u \\ 0 & 1 & f_v \end{pmatrix} \right\| = \left\| \begin{pmatrix} -f_u \\ -f_v \\ 1 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{1 + f_u^2 + f_v^2}$$

## תזכורת – (משטח דו-צדדי)

משטח דו-צדדי הוא משטח שבו קיימת בחירה רציפה של נורמל שאינו מתאפס  $\vec{N}$ , במהלך הקורס נעבוד רק עם משטחים דו-צדדיים. דוגמה למשטח שאינו דו-צדדי היא טבעת מוביוס, לה "צד" אחד בלבד:



דוגמאות למשטח דו-צדדי הן כדור, גליל, חרוט, פרבולואיד, גרף של פונקציה גזירה ברציפות וכו'.

## תרגיל 12.8.

חשבו את שטח הפנים של גליל בעל רדיוס  $r$  וגובה  $h$ :

$$S = \{(x, y, z) \mid 0 \leq z \leq h, x^2 + y^2 = r^2\}$$

שימו לב כי מדובר בגליל ללא הבסיסים העליון והתחתון.

**פתרון:**

נבחר פרמטריזציה:

$$S(u, v) = (r \cos u, r \sin u, v), \quad D = \{(u, v) | 0 \leq u < 2\pi, 0 \leq v \leq h\}$$

נחשב את הנורמל:

$$\vec{N}(u, v) = \underbrace{\begin{pmatrix} -r \sin u \\ r \cos u \\ 0 \end{pmatrix}}_{S_u(u, v)} \times \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{S_v(u, v)} = \det \begin{pmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ -r \sin u & r \cos u & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cos u \\ r \sin u \\ 0 \end{pmatrix}$$

בפרט  $\|\vec{N}(u, v)\| = r \neq 0$ , לכן:

$$A = \iint_D \|\vec{N}(u, v)\| du dv = \int_0^{2\pi} \int_0^h r dv du = 2\pi r h$$

## תרגיל 12.9.

יהיו  $0 \leq a < b \leq 1$ , חשבו את שטח הפנים של:

$$S = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1, z \in [a, b]\}$$

**פתרון:**

נזכור את הפרמטריזציה הכדורית (של כדור היחידה):

$$\vec{r}(\theta, \varphi) = (\sin \varphi \cos \theta, \sin \varphi \sin \theta, \cos \varphi), \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi, \quad 0 \leq \varphi \leq \pi$$

במקרה שלנו,  $S$  אינו כל כדור היחידה, אלא רק החלק שבו  $z \in [a, b]$ , כלומר:

$$z = \cos \varphi \leq b \Rightarrow \varphi \geq \arccos b$$

וגם:

$$z = \cos \varphi \geq a \Rightarrow \varphi \leq \arccos a$$

(שימו לב כי  $\cos(x)$  היא פונקציה יורדת ב  $[0, \pi]$ , ולכן האי-שוויון מתהפך!) סך הכול:

$$\varphi \in [\arccos b, \arccos a]$$

כלומר:

$$D = \{(\theta, \varphi) \mid 0 \leq \theta \leq 2\pi, \arccos b \leq \varphi \leq \arccos a\}$$

ומתקיים:

$$\text{Area}(S) = \iint_S 1 dS = \iint_D \|\vec{N}(\theta, \varphi)\| d\theta d\varphi$$

נחשב את  $\|\vec{N}(\theta, \varphi)\| = \|r_\theta(\theta, \varphi) \times r_\varphi(\theta, \varphi)\|$ .

$$\begin{aligned}\vec{N}(\theta, \varphi) &= r_\theta(\theta, \varphi) \times r_\varphi(\theta, \varphi) = \det \begin{pmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ x_\theta & y_\theta & z_\theta \\ x_\varphi & y_\varphi & z_\varphi \end{pmatrix} \\ &= \det \begin{pmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ -\sin \varphi \sin \theta & \sin \varphi \cos \theta & 0 \\ \cos \varphi \cos \theta & \cos \varphi \sin \theta & -\sin \varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin^2 \varphi \cos \theta \\ -\sin^2 \varphi \sin \theta \\ -\sin \varphi \cos \varphi \end{pmatrix}\end{aligned}$$

בפרט:

$$\begin{aligned}\|\vec{N}(\theta, \varphi)\| &= \sqrt{(-\sin^2 \varphi \cos \theta)^2 + (-\sin^2 \varphi \sin \theta)^2 + (-\sin \varphi \cos \varphi)^2} \\ &= \sqrt{\sin^4 \varphi \cos^2 \theta + \sin^4 \varphi \sin^2 \theta + \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi} \\ &= \sqrt{\sin^4 \varphi + \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi} = |\sin \varphi| = \sin \varphi\end{aligned}$$

כאשר בשוויון האחרון השתמשנו בעובדה ש- $0 \leq \varphi \leq \pi$ , ונשים לב כי  $\sin \varphi$  מתאפס רק בקטבים - שהיא קבוצה בעלת שטח אפס. בפרט:

$$\begin{aligned}\text{Area}(S) &= \int_S 1 dS = \iint_D \|\vec{N}(\theta, \varphi)\| d\theta d\varphi = \int_0^{2\pi} \int_{\arccos b}^{\arccos a} \sin \varphi d\varphi d\theta \\ &= 2\pi \left( -\cos \varphi \Big|_{\arccos b}^{\arccos a} \right) = 2\pi (-\cos(\arccos a) + \cos(\arccos b)) = 2\pi(b - a)\end{aligned}$$

## תרגול חזרה למבחן

### 13.1 | סדרות פונקציות

#### תזכורת

יהי  $I \subset \mathbb{R}$  קטע. סדרת פונקציות  $\{f_n\}_{n=1}^\infty$  היא סדרה שכל איבר בה הוא פונקציה  $f_n : I \rightarrow \mathbb{R}$ . תהי  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ , נאמר כי:

1. סדרת הפונקציות  $\{f_n\}_{n=1}^\infty$  מתכנסת נקודתית ל  $f$  אם לכל  $x_0 \in I$  מתקיים:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x_0) = f(x_0)$$

2. סדרת הפונקציות  $\{f_n\}_{n=1}^\infty$  מתכנסת במידה שווה ל  $f$  אם:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in I} |f_n(x) - f(x)| = 0$$

#### תזכורת

אם  $f_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{Uniform}} f$  אז:

1. אם  $f_n$  אינטגרבילית לכל  $n \in \mathbb{N}$ , אז  $f$  אינטגרבילית, ולכל  $[a, b] \subset I$ :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dx = \int_a^b f(x) dx$$

2. אם  $f_n$  רציפה לכל  $n \in \mathbb{N}$ , אז  $f$  רציפה.

#### תרגיל 13.1.

תהא

$$g_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad g_n(x) = \frac{nx}{1 + n^2 x^2}$$

מצאו את הפונקציה הגבולית, ובדקו התכנסות במ"ש ב- $\mathbb{R}$ .

פתרון:

נתחיל במציאת הפונקציה הגבולית.

1. אם  $x = 0$ , אז  $g_n(0) = 0$  לכל  $n \in \mathbb{N}$ .

2. אם  $x \neq 0$ , אז:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} g_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{nx}{1 + n^2 x^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x}{\frac{1}{n} + nx^2} = 0$$

כלומר הפונקציה הגבולית היא  $f(x) = 0$ . נבדוק התכנסות במ"ש, נסמן  $a_n = \sup_{x \in \mathbb{R}} |g_n(x)|$  למרות ש  $I = \mathbb{R}$ , נגזור על מנת לקבל איזשהו מועמד ל  $a_n$ :

$$0 = g'_n(x) = \frac{n(1 + n^2 x^2) - nx(2n^2 x)}{(1 + n^2 x^2)^2} = \frac{n(1 - n^2 x^2)}{(1 + n^2 x^2)^2} \Rightarrow x = \pm \frac{1}{n}$$

נציב  $x = \frac{1}{n}$ :

$$g_n\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{n \cdot \frac{1}{n}}{1 + n^2 \cdot \frac{1}{n^2}} = \frac{1}{2}$$

כלומר,  $a_n \geq \frac{1}{2}$  לכל  $n \in \mathbb{N}$ , ובפרט ההתכנסות אינה במ"ש.

## תזכורת

יהא טור חזקות  $s(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$ , קיים לו רדיוס התכנסות  $R \in [0, \infty]$ , ומתקיים:

$$R = \frac{1}{\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}} \stackrel{*}{=} \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}} \stackrel{*}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}$$

כאשר  $\stackrel{*}{=}$  תקף כאשר הגבולות קיימים. נקרא לקבוצה:

$$\{x \in \mathbb{R} \mid |x - x_0| < R\} \cup \{\text{יש לבדוק פרטנית}\}$$

תחום ההתכנסות של הטור.

1. בכל  $[a, b]$  המוכל בתחום ההתכנסות:

$$\int_a^b s(x) dx = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \int_a^b (x - x_0)^n dx$$

2. לכל  $x$  בתחום ההתכנסות מתקיים:

$$\frac{\partial}{\partial x} s(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x - x_0)^{n-1}$$

## תרגיל 13.2.

חשבו את רדיוס ההתכנסות של:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^n x^n}{n!}$$

**פתרון:**נמצא את רדיוס ההתכנסות  $R$ :

$$\begin{aligned} R &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^n}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{(n+1)!}{n!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^n}{(n+1)^n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n}{n+1} \right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 - \frac{1}{n+1} \right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 - \frac{1}{n+1} \right)^{n+1} \left( 1 - \frac{1}{n+1} \right)^{-1} = \frac{1}{e} \end{aligned}$$

## תרגיל 13.3.

חשבו את:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \frac{nx + \sin(nx^2)}{n} dx$$

**פתרון:**נתבונן בסדרה  $g_n(x) = \frac{nx + \sin(nx^2)}{n}$ ,  $g_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ . נבדוק התכנסות נקודתית, יהא  $x \in [0, 1]$  קבוע:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} g_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( x + \frac{\sin(nx^2)}{n} \right) = x$$

כלומר,  $g_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} f$  ל- $f(x) = x$ . נבדוק התכנסות במ"ש. נסמן  $a_n = \sup_{x \in [0, 1]} |g_n(x) - f(x)|$ , אז:

$$a_n = \sup_{x \in [0, 1]} |g_n(x) - x| = \sup_{x \in [0, 1]} \left| \frac{\sin(nx^2)}{n} \right| \leq \frac{1}{n}$$

בפרט,  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ , כלומר  $g_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{Uniform}} f$  ב- $[0, 1]$ , ובפרט:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 g_n(x) dx = \int_0^1 \lim_{n \rightarrow \infty} g_n(x) dx = \int_0^1 x dx = \frac{1}{2}$$

תזכורת – (משפט  $M$  של ויירשטראס)

תהא סדרת פונקציות  $f_n : I \rightarrow \mathbb{R}$ , אם לכל  $n \in \mathbb{N}$  קיים  $M_n \geq 0$  כך ש  $|f_n(x)| \leq M_n$  לכל  $x \in I$ , ומתקיים כי טור המספרים  $\sum_{n=1}^{\infty} M_n$  מתכנס, אז:  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$  מתכנס בהחלט ובמ"ש ב- $I$ .

## תרגיל 13.4.

הוכיחו כי:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 + x^4}{n^4 + x^2}$$

מתכנס לפונקציה רציפה ב  $[-100, 100]$ .

## פתרון:

נוכיח כי סדרת הסכומים החלקיים  $f_k(x) = \sum_{n=1}^k \frac{n^2 + x^4}{n^4 + x^2}$  מתכנסת במ"ש ל- $f(x)$ , ואז, היות שכל הפונקציות  $f_k$  רציפות, גם  $f$  תהיה רציפה. נשתמש במשפט  $M$  של ויירשטראס:

$$\left| \frac{n^2 + x^4}{n^4 + x^2} \right| \leq \left| \frac{n^2 + x^4}{n^4} \right| \leq \frac{1}{n^2} + \frac{x^4}{n^4} \leq \frac{1}{n^2} + \frac{100^4}{n^4}$$

כמובן שהטור  $\sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1}{n^2} + \frac{100^4}{n^4} \right)$  מתכנס, ולכן, לפי משפט  $M$  של ויירשטראס,  $f_k$  מתכנס במ"ש ל  $f$  ב  $[-100, 100]$ , בפרט,  $f$  רציפה ב  $[-100, 100]$ .

## 13.2 | פונקציות במספר משתנים

## תזכורת

יהיו  $\gamma_1, \gamma_2 : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$  מסילות רציפות כך ש- $\vec{x}_0 = \gamma_1(0) = \gamma_2(0)$ . אם:

$$\lim_{t \rightarrow 0} f(\gamma_1(t)) \neq \lim_{t \rightarrow 0} f(\gamma_2(t))$$

אז הגבול  $\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{x}_0} f(\vec{x})$  לא קיים.

## תזכורת – (דיפרנציאביליות)

נאמר כי  $f : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  גזירה (דיפרנציאבילית) ב- $(x_0, y_0)$  אם ורק אם:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} \underbrace{\frac{f(x,y) - (f(x_0,y_0) + f'_x(x_0,y_0)(x-x_0) + f'_y(x_0,y_0)(y-y_0))}{\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}}}_{\varepsilon(x,y)} = 0$$

אם  $f'_x, f'_y$  קיימות ורציפות בתחום  $D \subset \mathbb{R}^2$ , אז  $f$  גזירה שם, ונסמן  $f \in C^1(D)$ . אם  $f$  גזירה ב- $(x_0, y_0)$ , אז קיים לגרף שלה מישור משיק, ומשוואת המשיק היא:

$$z = f(x_0, y_0) + f'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0)(y - y_0)$$

## תרגיל 13.5.

תהא  $f(x, y) = x + y\sqrt{x^2 + y^2}$ . חשבו את  $f_x, f_y$  בכל  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ , והוכיחו כי הן רציפות בכל  $\mathbb{R}^2$ .

**פתרון:**

עבור  $(x, y) \neq (0, 0)$ , נחשב ישירות:

$$f_x(x, y) = (x + y(x^2 + y^2)^{1/2})_x = 1 + y((x^2 + y^2)^{1/2})_x = 1 + \frac{y}{2} \cdot \frac{2x}{(x^2 + y^2)^{1/2}} = 1 + \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$f_y(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2} + y((x^2 + y^2)^{1/2})_y = \sqrt{x^2 + y^2} + \frac{y^2}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

ב- $(0, 0)$  נחשב לפי ההגדרה:

$$f_x(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h, 0) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h}{h} = 1$$

$$f_y(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0, h) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h \cdot |h|}{h} = 0$$

כלומר:

$$f_x(x, y) = \begin{cases} 1 + \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} & \text{if } (x, y) \neq (0, 0) \\ 1 & \text{if } (x, y) = (0, 0) \end{cases}, \quad f_y(x, y) = \begin{cases} \sqrt{x^2 + y^2} + \frac{y^2}{\sqrt{x^2 + y^2}} & \text{if } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{if } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

נבדוק רציפות של  $f_x$  ב- $(0, 0)$ . נעבור לקואורדינטות קוטביות:

$$f_x(r \cos \theta, r \sin \theta) = 1 + \frac{r^2 \cos \theta \sin \theta}{r} = 1 + r \cos \theta \sin \theta$$

אז:

$$|f_x(r \cos \theta, r \sin \theta) - 1| = |r \cos \theta \sin \theta| < r \xrightarrow{r \rightarrow 0} 0$$

כלומר:

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} f_x(x, y) - 1 = 0 \Rightarrow \lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} f_x(x, y) = 1 = f_x(0, 0)$$

באופן דומה:

$$f_y(r \cos \theta, r \sin \theta) = r + \frac{r^2 \sin^2 \theta}{r} = r + r \sin^2 \theta$$

אז:

$$|f_y(r \cos \theta, r \sin \theta)| = |r + r \sin^2 \theta| < 2r \xrightarrow{r \rightarrow 0} 0$$

כלומר:

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} f_y(x, y) = 0 = f_y(0, 0)$$

בפרט,  $f_x, f_y$  רציפות בכל  $\mathbb{R}^2$ .

## תזכורת

תהא פונקציה סתומה:

$$F(x, y, z) = 0$$

נחפש  $z = f(x, y)$  כך ש:

$$z = f(x, y) \iff F(x, y, f(x, y)) = 0$$

אז בהינתן  $(x_0, y_0, z_0)$  כך ש- $F(x_0, y_0, z_0) = 0$ , אם קיימת סביבה שבה:1.  $F_x, F_y, F_z$  רציפות.2.  $F_z(x_0, y_0, z_0) \neq 0$ אז קיימת פונקציה יחידה  $z = f(x, y)$  המקיימת כי בסביבה של  $(x_0, y_0)$ :

$$z = f(x, y) \iff F(x, y, f(x, y)) = 0$$

ומתקיים:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = -\frac{F'_x(x, y, f(x, y))}{F'_z(x, y, f(x, y))}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = -\frac{F'_y(x, y, f(x, y))}{F'_z(x, y, f(x, y))}$$

## תזכורת

תהא  $F(x, y, z)$  פונקציה גזירה ברציפות בסביבת  $(x_0, y_0, z_0)$  כך שמתקיים:1.  $F(x_0, y_0, z_0) = 0$ 2.  $\nabla F(x_0, y_0, z_0) \neq \vec{0}$ אז למשטח רמה  $F(x, y, z) = 0$  קיים מישור משיק ב- $(x_0, y_0, z_0)$  כך שמשוואתו:

$$\left\langle \nabla F(x_0, y_0, z_0), \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \\ z - z_0 \end{pmatrix} \right\rangle = 0$$

כלומר:

$$F'_x(x_0, y_0, z_0)(x - x_0) + F'_y(x_0, y_0, z_0)(y - y_0) + F'_z(x_0, y_0, z_0)(z - z_0) = 0$$

## תזכורת – (כופלי לגרנד' של פונקציה עם 3 משתנים ואילוץ יחיד)

יהיו  $f, g : D \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  פונקציות גזירות ברציפות, אם  $P = (x_0, y_0, z_0)$  נקודה פנימית של  $D$  המקיימת  $g(P) = 0, \nabla g(P) \neq 0$  ו- $P$  נקודת קיצון של  $f$  תחת האילוץ  $g(x, y, z) = 0$ , אז קיים  $\lambda \in \mathbb{R}$  כך שאם  $L(x, y, z, \lambda) = f(x, y, z) - \lambda g(x, y, z)$  אז  $\nabla L(x, y, z, \lambda) = \vec{0}$ .

## תרגיל 13.6.

תהא  $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | xy + z = 1, x, y, z > 0\}$ , תהא  $p = (x_0, y_0, z_0) \in S$ .  
נסמן ב- $\Sigma$  את המישור המשיק ל- $S$  ב- $p$ , מצאו את הנקודה הקרובה ביותר על  $\Sigma$  לראשית.

## פתרון:

נמצא את  $\Sigma$ . נגדיר  $F(x, y, z) = xy + z - 1$ , אז  $F$  כמובן גזירה ברציפות בכל  $\mathbb{R}^3$ , ובפרט בסביבת  $(x_0, y_0, z_0)$ , ומתקיים כי:

$$\nabla F(x_0, y_0, z_0) = \begin{pmatrix} y_0 \\ x_0 \\ 1 \end{pmatrix} \neq \vec{0}$$

לכן, המישור המשיק הוא:

$$0 = \left\langle \nabla F(x_0, y_0, z_0), \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \\ z - z_0 \end{pmatrix} \right\rangle = y_0(x - x_0) + x_0(y - y_0) + (z - z_0)$$

או:

$$z = z_0 - y_0(x - x_0) - x_0(y - y_0)$$

כלומר:

$$\Sigma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | z = z_0 - y_0(x - x_0) - x_0(y - y_0)\}$$

נפעיל את כופלי לגרנז'. פונקציית המטרה שלנו היא:

$$f(x, y, z) = \left( \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \right)^2 = x^2 + y^2 + z^2$$

האילוץ שלנו הוא:

$$g(x, y, z) = y_0(x - x_0) + x_0(y - y_0) + (z - z_0) = 0$$

אז:

$$L(x, y, z, \lambda) = f(x, y, z) - \lambda g(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - \lambda(y_0(x - x_0) + x_0(y - y_0) + (z - z_0))$$

כלומר:

$$\nabla L(x, y, z, \lambda) = \begin{pmatrix} 2x - \lambda y_0 \\ 2y - \lambda x_0 \\ 2z - \lambda \\ -(y_0(x - x_0) + x_0(y - y_0) + (z - z_0)) \end{pmatrix} = \vec{0}$$

בפרט,  $2z = \lambda = \frac{2x}{y_0}$ , ו- $x = \frac{x_0}{y_0} \lambda = \frac{1}{2} x_0 y$ . נציב:

$$0 = y_0(x - x_0) + x_0(y - y_0) + (z - z_0) = y_0(x - x_0) + x_0 \left( \frac{x_0}{y_0} x - y_0 \right) + \left( \frac{x}{y_0} - z_0 \right)$$

כלומר:

$$0 = x \left( y_0 + \frac{x_0^2}{y_0} + \frac{1}{y_0} \right) + (-2x_0 y_0 - z_0)$$

כלומר:

$$x = \frac{2x_0y_0 + z_0}{y_0 + \frac{x_0^2}{y_0} + \frac{1}{y_0}}, \quad y = \frac{x_0}{y_0}x, \quad z = \frac{x}{y_0}$$

בנוסף, צריך גם לבדוק נקודות בהן  $\vec{\nabla}g = \vec{0}$ , אך מתקיים  $\vec{\nabla}g = \begin{pmatrix} y_0 \\ x_0 \\ 1 \end{pmatrix} \neq \vec{0}$ . מחקירת הבעיה ברור כי קיימת נקודת מינימום, ולכן הנקודה שמצאנו היא נקודת המינימום.

## 13.3 | אינטגרלים

## תרגיל 13.7.

יהא  $D$  גוף ב- $\mathbb{R}^2$ , הכלוא בין הקבוצות:

$$x^2 + y^2 = 2x - 2y - 1, \quad x^2 + y^2 = 2x - 2y + 7$$

חשבו את מסתו של  $D$  כאשר פונקציית הצפיפות היא  $\rho(x, y) = xy$ .

פתרון:

על ידי השלמה לריבוע נקבל כי:

$$x^2 + y^2 = 2x - 2y - 1 \iff (x - 1)^2 + (y + 1)^2 = 1$$

$$x^2 + y^2 = 2x - 2y + 7 \iff (x - 1)^2 + (y + 1)^2 = 9$$

נבצע החלפת משתנים:

$$\begin{cases} x - 1 = r \cos \theta \\ y + 1 = r \sin \theta \end{cases} \implies \begin{cases} x = r \cos \theta + 1 \\ y = r \sin \theta - 1 \end{cases}$$

אז כמובן שהתחום שלנו הוא:

$$\Delta = \{(r, \theta) \mid 1 \leq r \leq 3, 0 \leq \theta < 2\pi\}$$

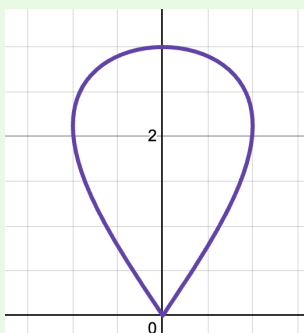
היעקוביאן הוא  $r$ , ולכן:

$$\begin{aligned} \iint_D xy dx dy &= \int_0^{2\pi} \int_1^3 (r \cos \theta + 1)(r \sin \theta - 1)r dr d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \int_1^3 (r^3 \cos \theta \sin \theta - r^2 \cos \theta + r^2 \sin \theta - r) dr d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \left( \frac{r^4}{4} \cos \theta \sin \theta - \frac{r^3}{3} \cos \theta + \frac{r^3}{3} \sin \theta - \frac{r^2}{2} \right) \Big|_{r=1}^3 d\theta \\ &= \dots = -8\pi \end{aligned}$$

## תרגיל 13.8.

חשבו את שטח התחום החסום על ידי:

$$C(t) = \begin{pmatrix} \sin(2t) \\ 3 \sin(t) \end{pmatrix}, \quad t \in [0, \pi]$$

**פתרון:**

נשים לב, לפי האיור, כי העקום הוא סגור ופשוט. בנוסף, עבור  $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$  מתקיים  $\sin(2t) \geq 0$ , כלומר העקום מכוון במגמה החיובית, ולכן ניתן להשתמש במשפט גרין. נשים לב כי  $\text{Area}(D) = \iint_D 1 dx dy$  אם נמצא שדה ווקטורי  $\vec{F} = (P, Q)$  כך ש- $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 1$ : אז

$$\text{Area}(D) = \iint_D 1 dx dy = \oint_C P dx + Q dy$$

נבחר את השדה  $\vec{F} = (0, x)$ : אז

$$\begin{aligned} \oint_C P dx + Q dy &= \int_0^\pi \vec{F}(C(t)) \cdot C'(t) dt = \int_0^\pi \begin{pmatrix} 0 \\ \sin(2t) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \cos(2t) \\ 3 \cos(t) \end{pmatrix} dt = \int_0^\pi 3 \sin(2t) \cos(t) dt \\ &= \int_0^\pi 6 \sin(t) \cos^2(t) dt = \dots = 4 \end{aligned}$$

**תרגיל 13.9.**

יהא:

$$S = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 = 1, 0 \leq z \leq 1\} \cup \{(x, y, 1) \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$$

יהא  $\vec{F}(x, y, z) = (\alpha x, \beta y, z^{10})$  שדה ווקטורי עבור  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ . חשבו את השטף של  $\vec{F}$  דרך  $S$ , כאשר רכיב הנורמל בכיוון  $z$  בנקודה  $(0, 0, 1)$  הוא חיובי.

**פתרון:**

נחלק את המשטח לשני חלקים, ונסכום את השטף.

1. עבור המשטח הראשון,  $S_1 = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 = 1, 0 \leq z \leq 1\}$ , נבחר פרמטריזציה:

$$\begin{cases} x = \cos u \\ y = \sin u \\ z = v \end{cases}, \quad u \in [0, 2\pi], v \in [0, 1]$$

הנורמל הוא:

$$\pm N = S_u \times S_v = \begin{pmatrix} -\sin u \\ \cos u \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ -\sin u & \cos u & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos u \\ \sin u \\ 0 \end{pmatrix}$$

עבור  $u = 0$ , נקבל  $N = \pm(\cos 0, \sin 0, 0) = \pm(1, 0, 0)$  ונבחר את הכיוון החיובי, כלומר  $N = (1, 0, 0)$ , כלומר:

$$N(u, v) = \begin{pmatrix} \cos u \\ \sin u \\ 0 \end{pmatrix}$$

אז השטף הוא:

$$\begin{aligned} \Phi_1 &= \iint_{S_1} \vec{F} \cdot d\vec{s} = \iint_{\Delta} \vec{F}(S(u, v)) \cdot N(u, v) \, dudv = \iint_{\Delta} \vec{F}(\cos u, \sin u, v) \cdot \begin{pmatrix} \cos u \\ \sin u \\ 0 \end{pmatrix} \, dudv \\ &= \iint_{\Delta} \begin{pmatrix} \alpha \cos u \\ \beta \sin u \\ v^{10} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos u \\ \sin u \\ 0 \end{pmatrix} \, dudv = \iint_{\Delta} \alpha \cos^2 u + \beta \sin^2 u \, dudv \\ &= \int_0^1 \int_0^{2\pi} \alpha \cos^2 u + \beta \sin^2 u \, du \, dv = \int_0^{2\pi} \alpha \cos^2 u + \beta \sin^2 u \, du \\ &= \int_0^{2\pi} \alpha \cos^2 u + \beta (1 - \cos^2 u) \, du = \dots = \pi(\alpha + \beta) \end{aligned}$$

2. עבור המשטח השני,  $S_2 = \{(x, y, 1) \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$ , שהוא דיסק במישור  $z = 1$ , נבחר פרמטריזציה:

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \\ z = 1 \end{cases}, \quad r \in [0, 1], \theta \in [0, 2\pi]$$

אז הנורמל הוא:

$$\pm N = S_r \times S_\theta = \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -r \sin \theta \\ r \cos \theta \\ 0 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -r \sin \theta & r \cos \theta & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ r \end{pmatrix}$$

לפי הנתון נבחר בכיוון החיובי, כלומר:

$$N(r, \theta) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ r \end{pmatrix}$$

אז השטף הוא:

$$\begin{aligned}\Phi_2 &= \iint_{S_2} \vec{F} \cdot d\vec{s} = \iint_{\Delta} \vec{F}(S(r, \theta)) \cdot N(r, \theta) dr d\theta = \iint_{\Delta} \vec{F}(r \cos \theta, r \sin \theta, 1) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ r \end{pmatrix} dr d\theta \\ &= \iint_{\Delta} \begin{pmatrix} \alpha r \cos \theta \\ \beta r \sin \theta \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ r \end{pmatrix} dr d\theta = \iint_{\Delta} r dr d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 r dr d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{r^2}{2} \Big|_0^1 d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} d\theta = \pi\end{aligned}$$

סך הכול השטף הוא:

$$\Phi = \Phi_1 + \Phi_2 = \pi(\alpha + \beta) + \pi = \pi(\alpha + \beta + 1)$$

תזכורת – (משפט גאוס (לפעמים נקרא גם משפט הדיברגנץ))

יהי  $V \subset \mathbb{R}^3$  גוף סגור וחסום בעל נורמל המכוון כלפי חוץ, ויהי  $\vec{F} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  שדה ווקטורי גזיר ברציפות. אז:

$$\oiint_{\partial V} \vec{F} \cdot d\vec{s} = \iiint_V \text{div}(\vec{F}) dx dy dz$$

כאשר  $\partial V$  מעטפת הגוף  $V$ .

הערה

1. הסימון  $\oiint_S \vec{F} \cdot d\vec{s}$  הוא לאינטגרל המשטחי  $\iint_S \vec{F} \cdot d\vec{s}$ , כאשר אנו מדגישים ש- $S$  משטח סגור. בדומה לסימון  $\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$  עבור אינטגרל קווי מסוג שני.

2. נסמן  $\vec{F}(x, y, z) = (P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z))$  אז:

$$\text{div}(\vec{F})(x, y, z) = \frac{\partial P}{\partial x}(x, y, z) + \frac{\partial Q}{\partial y}(x, y, z) + \frac{\partial R}{\partial z}(x, y, z)$$

תרגיל 13.10.

נסמן ב- $S$  את הכיפה העליונה של ספירת היחידה:

$$S = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1, z \geq 0\}$$

נסמן:

$$\vec{F}(x, y, z) = (100zxy^{99}, -zy^{100}, z+1)$$

חשבו את  $\iint_S \vec{F} \cdot d\vec{s}$  כאשר כיוון הנורמל הוא כך ש- $N(0, 0, 1) = (0, 0, 1)$ .

## פתרון:

ראשית, נשים לב כי  $\operatorname{div}(\vec{F}) = \frac{\partial}{\partial x}(100xyz^{99}) + \frac{\partial}{\partial y}(-zy^{100}) + \frac{\partial}{\partial z}(z+1) = 100zy^{99} - 100zy^{99} + 1 = 1$  אז נרצה להשתמש במשפט הדיברגנץ (גאוס). היות ש- $S$  אינו משטח סגור, נצטרך לסגור אותו. נשים לב שכאשר  $z = 0$  השדה הווקטורי נהיה פשוט מאוד:  $\vec{F}(x, y, 0) = (0, 0, 1)$  אז נסגור את הכיפה עם העיגול  $D = \{(x, y, 0) \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$  אם נסמן  $A = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, z \geq 0\}$  אז לפי משפט הדיברגנץ:

$$\begin{aligned} \iint_S \vec{F} \cdot d\vec{s} + \iint_D \vec{F} \cdot d\vec{s} &= \iiint_{S \cup D} \vec{F} \cdot d\vec{s} = \iiint_A \operatorname{div}(\vec{F}) dx dy dz = \iiint_A 1 dx dy dz \\ &= \operatorname{Vol}(A) = \frac{1}{2} \cdot \operatorname{Vol}(B(1)) = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3}\pi = \frac{2\pi}{3} \end{aligned}$$

כאשר האינטגרל  $\iint_D \vec{F} \cdot d\vec{s}$  מחושב עם נורמל בכיוון  $-z$ , ו- $B(1)$  הוא כדור היחידה. נחשב את  $\iint_D \vec{F} \cdot d\vec{s}$  עבור  $D$  נבחר קואורדינטות קוטביות  $(x, y, z) = (r \cos \theta, r \sin \theta, 0)$  כאשר  $r \in [0, 1], \theta \in [0, 2\pi]$  אז הנורמל הוא:

$$\pm N = S_r \times S_\theta = \det \begin{pmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -r \sin \theta & r \cos \theta & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ r \end{pmatrix}$$

נבחר כיוון נורמל בכיוון  $-z$ , כלומר  $N = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -r \end{pmatrix}$  אז:

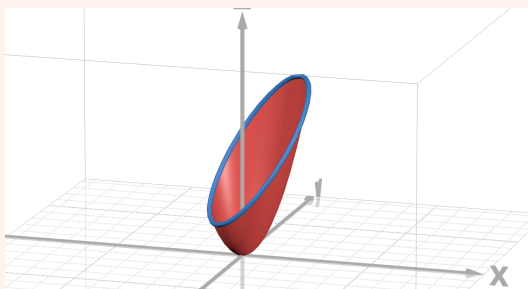
$$\begin{aligned} \iint_D \vec{F} \cdot d\vec{s} &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 \vec{F}(r \cos \theta, r \sin \theta, 0) \cdot N(r, \theta) dr d\theta = \int_0^{2\pi} \int_0^1 \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -r \end{pmatrix} \right\rangle dr d\theta \\ &= - \int_0^{2\pi} \int_0^1 r dr d\theta = -\pi \end{aligned}$$

לכן:

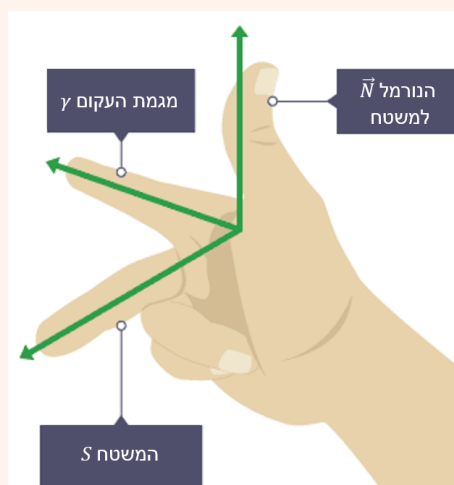
$$\iint_S \vec{F} \cdot d\vec{s} = \frac{2\pi}{3} - (-\pi) = \frac{2\pi}{3} + \pi = \frac{5\pi}{3}$$

### תזכורת – (מגמה חיובית של מסילה סגורה במרחב ומשטח שהיא תוחמת)

יהי  $S \subset \mathbb{R}^3$ , נסמן ב- $\partial S$  את השפה שלו כעקום סגור וחלק למקוטעין. שימו לב!  $\partial S$  הוא סימון, והכוונה אינה לשפה הטופולוגית, אלא לעקום התוחם את המשטח  $S$ .



בהינתן בחירה של נורמל  $\vec{N}$  למשטח  $S$ , נוכל למצוא לשפה  $\partial S$  פרמטריזציה  $\gamma$  בעלת מגמה חיובית בצורה הבאה:  
נשתמש ב**כלל יד ימין**, כלומר בעזרת יד ימין שלנו, אם האצבע מצביעה לכיוון המסילה, האמה בכיוון המשטח, והאגודל בכיוון הנורמל.



שימו לב! המגמה החיובית היא תכונה של העקום יחד עם המשטח! אין משמעות למשל למגמה חיובית/שלילית של עקום בלבד.  
דרך לזכור זאת היא שהמעגל:

$$\gamma(t) = (\cos(t), \sin(t), 0)$$

עם הנורמל  $\vec{N} = (0, 0, 1)$  הוא בעל מגמה חיובית.

## תזכורת – (curl של שדה וקטורי)

יהא  $\vec{F} = (P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z))$  שדה וקטורי גזיר ברציפות. נסמן:

$$\text{curl}(\vec{F})(x, y, z) = \begin{pmatrix} R_y(x, y, z) - Q_z(x, y, z) \\ P_z(x, y, z) - R_x(x, y, z) \\ Q_x(x, y, z) - P_y(x, y, z) \end{pmatrix}$$

ניתן לזכור זאת בעזרת הסימון הלא פורמלי:

$$\text{curl}(\vec{F})(x, y, z) = \det \begin{pmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P(x, y, z) & Q(x, y, z) & R(x, y, z) \end{pmatrix}$$

לפעמים נסמן  $\text{curl}(\vec{F}) = \text{rot}(\vec{F})$ . אפשר לסמן גם  $\text{curl}(\vec{F}) = \nabla \times \vec{F}$ , כאשר  $\nabla = \left( \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)$  הוא אופרטור דיפרנציאלי, אבל זה רק סימון.

## תזכורת – (משפט סטוקס)

יהא  $S$  משטח פרמטרי, דו-צדדי, גזיר ברציפות, בעל נורמל  $\vec{N}$  שאינו מתאפס, כך ששפת המשטח  $\partial S$  היא עקום סגור ופשוט גזיר ברציפות  $\gamma$  בעל מגמה חיובית ביחס ל- $\vec{N}$ .  
יהא  $\vec{F} = (P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z))$  שדה ווקטורי גזיר ברציפות. אז:

$$\oint_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_S \text{curl}(\vec{F}) \cdot d\vec{s}$$

## תרגיל 13.11.

יהא  $\vec{F} = (xy, x^2, z^2)$ , חשבו את  $I = \oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$  כאשר  $C$  היא המסילה המתקבלת מחיתוך הפרבולואיד  $z = x^2 + y^2$  עם המישור  $z = y$ , וכיוונה נגד כיוון השעון אם מסתכלים מהחלק החיובי של ציר  $z$  מטה.

## פתרון:

נשתמש במשפט סטוקס. נתחיל בחישוב  $\text{curl}(\vec{F})$ :

$$\text{curl}(\vec{F}) = \det \begin{pmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ xy & x^2 & z^2 \end{pmatrix} = (0, 0, 2x - x) = (0, 0, x)$$

כעת, נחפש משטח  $S$  כלשהו, כך ש- $\partial S = C$ .  
קיימות לפחות שתי בחירות טבעיות:

1. הבחירה הראשונה: הפרבולואיד  $z = x^2 + y^2$  כאשר  $z \leq y$ , כלומר:

$$S_1 = \{(x, y, x^2 + y^2) \mid x^2 + y^2 \leq y\}$$

כאשר כמובן:

$$x^2 + y^2 \leq y \iff x^2 + y^2 - y + \frac{1}{4} \leq \frac{1}{4} \iff x^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 \leq \frac{1}{4}$$

כלומר:

$$S_1 = \left\{ (x, y, x^2 + y^2) \mid x^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 \leq \frac{1}{4} \right\}$$

2. הבחירה השנייה: העיגול המוכל במישור  $y = z$ , כלומר ממש העיגול ש- $C$  תוחם באופן ישיר. שוב, אם  $y = z$ , ההיטל של החיתוך של הפרבולואיד עם המישור  $z = y$  על המישור  $xy$  הוא בדיוק:

$$D = \left\{ (x, y) \mid x^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 \leq \frac{1}{4} \right\}$$

ואז המשטח שלנו הוא:

$$S_2 = \left\{ (x, y, y) \mid x^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 \leq \frac{1}{4} \right\}$$

לשם הפשטות נבחר ב- $S_2$ . נזכור כי וקטור הנורמל למשטח המהווה גרף של פונקציה  $z = f(x, y)$  הוא:

$$N(x, y, f(x, y)) = \pm \begin{pmatrix} -f_x(x, y) \\ -f_y(x, y) \\ 1 \end{pmatrix}$$

אז במקרה של  $S_2$ , כמובן  $f(x, y) = y$ , ולכן:

$$\vec{N} = \pm (-f_x, -f_y, 1) = \pm (0, -1, 1)$$

המסילה היא נגד כיוון השעון, אז על מנת לקבל התאמה במגמות, נבחר  $\vec{N} = (0, -1, 1)$ , אז קיבלנו:

$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_{S_2} \text{curl}(\vec{F}) \cdot d\vec{s} = \iint_D (0, 0, x) \cdot (0, -1, 1) dx dy = \iint_D x dx dy$$

נעבור לקואורדינטות קוטביות מוזזות:

$$x = r \cos \theta, y = \frac{1}{2} + r \sin \theta, \quad \Delta = \left\{ (r, \theta) \mid 0 \leq r \leq \frac{1}{2}, 0 \leq \theta \leq 2\pi \right\}$$

אז:

$$\begin{aligned} \iint_D x dx dy &= \iint_{\Delta} r \cos \theta \cdot r dr d\theta = \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{1}{2}} r^2 \cos \theta dr d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \cos \theta d\theta \int_0^{\frac{1}{2}} r^2 dr = 0 \end{aligned}$$

כלומר,  $I = 0$ .