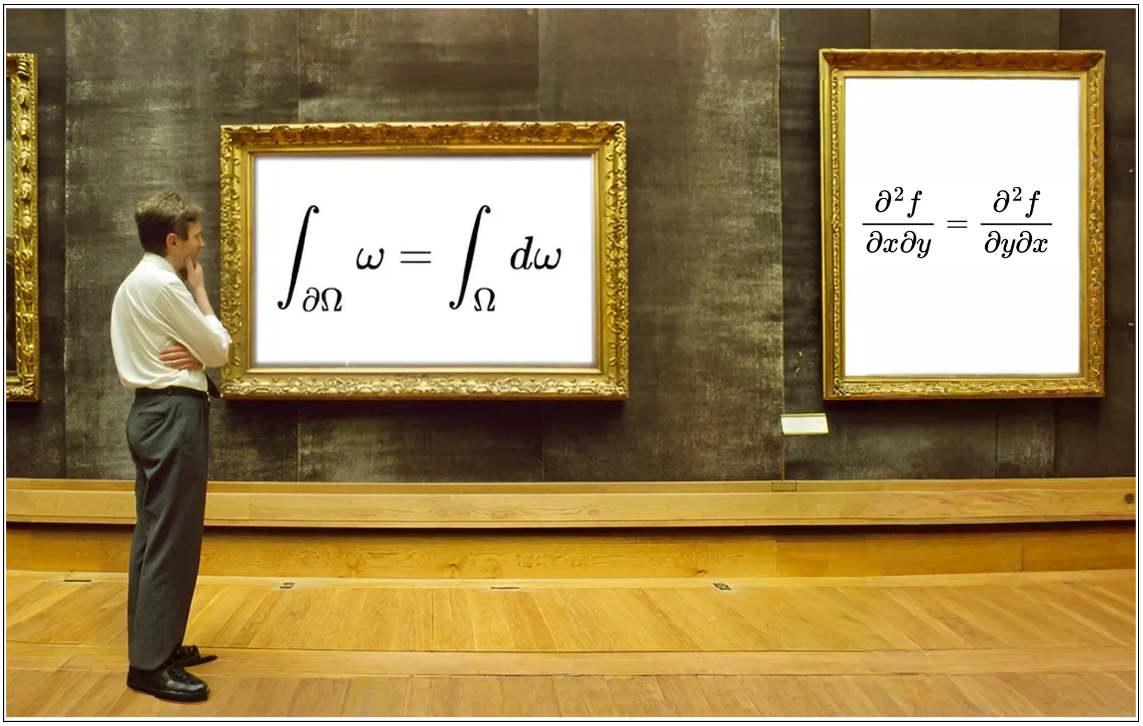
רשימות תרגול לקורס חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי 2ב׳ להנדסת חשמל ואלקטרוניקה

רשימות תרגול לקורס חדו"א 2ב׳ כפי שתורגל ע"י בן פוירשטיין, ליר בהק ורפאל לוי בסמסטר ב׳ תשפ"ה.

רשימות אילו נכתבו בצמוד לקורס כפי שלימדו ד"ר לודה מרקוס-אפשטיין, ד"ר גיא לנדסמן וד"ר שי פוקס.
הרשימות עלולות להכיל טעויות, חוסרים או אי דיוקים, תיקונים יתקבלו בברכה.



נכתב ע"י בן פוירשטיין - bf1@mail.tau.ac.il

תוכן העניינים

תרגול ראשון

1.1 התכנסות סדרת פונקציות

תזכורת – (התכנסות נקודתית של סדרת פונקציות)

יהא $I \subset \mathbb{R}$ קטע (או $I = \mathbb{R}$ כולו). **סדרת פונקציות** היא אוסף של פונקציות $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ מהצורה $f_n : I \to \mathbb{R}$, כלומר לכל $n \geq 1$ קיימת פונקציה $f_n : I \to \mathbb{R}$.
תהא $f : I \to \mathbb{R}$ פונקציה נוספת. נאמר כי **סדרת הפונקציות f_n מתכנסת נקודתית לפונקציה f** אם לכל $x \in I$ סדרת הערכים $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת ל-$f(x)$, כלומר:

$$\forall x \in I, \quad \lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$$

או בכתיב יותר מפורט:

$$\forall x \in I, \forall \epsilon > 0, \exists N_{\epsilon,x} \in \mathbb{N}, \forall n > N_{\epsilon,x}, \quad |f_n(x) - f(x)| < \epsilon$$

במקרה זה f נקרא **הפונקציה הגבולית של הסדרה $(f_n)_{n=1}^{\infty}$** ונסמן $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{} f$.

תרגיל 1.1.

תהא סדרת הפונקציות $f_n : (0,1] \to \mathbb{R}$, $f_n = \begin{cases} n & x \in \left(0, \frac{1}{n}\right) \\ x^2 & \text{אחרת} \end{cases}$.

1. מצאו פונקציה f שעבורה $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{} f$.
2. בדקו האם:
$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)dx = \int_0^1 f(x)dx$$

פתרון:

1. נתבונן בסדרה f_n.
$$f_1(x) = \begin{cases} 1 & x \in (0,1) \\ x^2 & x = 1 \end{cases} \Rightarrow f_1(x) = 1.$$

$$f_2(x)=\begin{cases}2 & x\in(0,\frac{1}{2})\\ x^2 & \frac{1}{2}\le x\le 1\end{cases}, \qquad f_3(x)=\begin{cases}3 & x\in(0,\frac{1}{3})\\ x^2 & \frac{1}{3}\le x\le 1\end{cases}, \qquad f_4(x)=\begin{cases}4 & x\in(0,\frac{1}{4})\\ x^2 & \frac{1}{4}\le x\le 1\end{cases}\ \cdots$$

נבחר $x_0\in(0,1]$. אינטואיטיבית, עבור n גדול מאוד, $f_n(x_0)=x_0^2$.
פורמלית - קיים N כך שלכל $n>N$, מתקיים $\frac{1}{n}<x_0$, כלומר $f_n(x_0)=x_0^2$, כלומר:

$$(f_n(x_0))_{n=1}^{\infty}=(1,2,3,...,N,x_0^2,x_0^2,x_0^2,...,x_0^2,...)$$

למשל, עבור $x=0.19$ מתקיים:

$$(f_n(0.19))_{n=1}^{\infty}=(1,2,3,4,5,(0.19)^2,(0.19)^2,...,(0.19)^2,...)$$

כלומר, הסדרה קבועה החל ממקום מסוים, ולכן $(f_n(x_0))_{n=1}^{\infty}\xrightarrow[n\to\infty]{}x_0^2$, כלומר עבור $f(x)=x^2$ מתקיים
$f_n\xrightarrow[n\to\infty]{}f$.

2. את האינטגרל נחשב ישירות:

$$\int_0^1 f_n(x)dx=\int_0^{\frac{1}{n}}ndx+\int_{\frac{1}{n}}^1 x^2dx=1+\left[\frac{x^3}{3}\right]\Bigg|_{x=\frac{1}{n}}^{x=1}=\frac{4}{3}-\frac{1}{3n^3}\xrightarrow[n\to\infty]{}\frac{4}{3}.$$

ומצד שני:

$$\int_0^1 x^2dx=\frac{1}{3}$$

כלומר:

$$\frac{1}{3}=\int_0^1\lim_{n\to\infty}f_n(x)dx\neq\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)dx=\lim_{n\to\infty}\frac{4}{3}-\frac{1}{3n^3}=\frac{4}{3}$$

הערה

אנו רואים כאן "בעיה" בהגדרה של התכנסות נקודתית, שכן היינו מצפים שאם $f_n\xrightarrow[n\to\infty]{}f$ אז $\int f_ndx\xrightarrow[n\to\infty]{}\int fdx$. תכף נראה הגדרה נוספת של התכנסות (במידה שווה) - ובהמשך הקורס נראה כי היא מקיימת (במידה מסוימת) את תכונה זו, יחד עם עוד תכונות שנראות "טבעיות".

תרגיל 1.2.

תהא $f_n:[0,2]\to\mathbb{R}$ הסדרה $f_n(x)=(-1)^n x^2$, הוכיחו כי סדרת הפונקציות לא מתכנסת לאף פונקציה גבולית.

פתרון:
נשים לב כי:

$$(f_n(1))_{n=1}^{\infty}=(-1,1,-1,\ldots)$$

זאת סדרת מספרים שלא מתכנסת, ולכן סדרת הפונקציות לא מתכנסת.

תזכורת – (התכנסות במידה שווה)

יהא $I\subset\mathbb{R}$ קטע (או $I=\mathbb{R}$ כולו), ותהא $f_n:I\to\mathbb{R}$ סדרת פונקציות, ו$f:I\to\mathbb{R}$ פונקציה נוספת.
נומר כי **סדרת הפונקציות $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת במידה שווה ל f** אם:

$$\forall\epsilon>0,\exists N_\epsilon\in\mathbb{N}:\forall x\in I,\forall n>N_\epsilon,\quad |f_n(x)-f(x)|<\epsilon$$

במקרה זה, נסמן $f_n\xrightarrow[n\to\infty]{\text{Uniform}}f$ (לפעמים נסמן $f_n\twoheadrightarrow f$ או $f_n\xrightarrow{u}f$).

הערה

התכנסות במ"ש זו תכונה חזקה מהתכנסות, כלומר אם $f_n\xrightarrow[n\to\infty]{\text{Uniform}}f$ אז בהכרח $f_n\xrightarrow[n\to\infty]{}f$ (אבל לא להפך).

תזכורת – (קריטריון הסופרמום)

קריטריון הסופרמום אומר כי:

$$f_n\xrightarrow[n\to\infty]{\text{Uniform}}f\iff\lim_{n\to\infty}\sup_{x\in I}|f_n(x)-f(x)|=0$$

כלומר, $f_n\xrightarrow[n\to\infty]{\text{Uniform}}f$ אמ"מ כלומר סדרת המספרים $\sup_{x\in I}|f_n(x)-f(x)|$ מתכנסת לאפס,

תרגיל 1.3.

תהא סדרת הפונקציות $f_n(x)=\frac{x}{n}$, $f:I\to\mathbb{R}$.

1. במקרה בו $I=\mathbb{R}$, מצאו f כך ש $f_n\xrightarrow[n\to\infty]{}f$.
2. במקרה בו $I=\mathbb{R}$ בדקו האם $f_n\xrightarrow[n\to\infty]{\text{Uniform}}f$.

3. במקרה בו $I=[-2025,2025]$ בדקו האם $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{\text{Uniform}} f$.

פתרון:

1. יהא $x\in I$, ישר נשים לב כי:
$$\lim_{n\to\infty} f_n(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{x}{n}=0$$
כלומר סדרת הפונקציות מתכנסות נקודתית לפונקציה $f(x)\equiv 0$.

2. נבדוק התכנסות במ"ש עבור $I=\mathbb{R}$, נשים לב כי:
$$\lim_{n\to\infty}\sup_{x\in\mathbb{R}}|f_n(x)-f(x)|=\lim_{n\to\infty}\sup_{x\in\mathbb{R}}\left|\frac{x}{n}\right|=\infty\neq 0$$
כלומר סדרת הפונקציות אינה מתכנסת במ"ש בכל $\mathbb{R}$.

3. נבדוק התכנסות במ"ש עבור $I=[-2025,2025]$:
$$\lim_{n\to\infty}\sup_{x\in[-2025,2025]}|f_n(x)-f(x)|=\lim_{n\to\infty}\sup_{x\in[-2025,2025]}\left|\frac{x}{n}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{2025}{n}=0$$

תרגיל 1.4.

האם סדרת הפונקציות $f_n(x)=\frac{x^n}{3+2x^n}$ מתכנסת נקודתית או במ"ש ב$[0,2]$?

פתרון:
נתחיל בלמצוא את הפונקציה הגבולית, לשם כך נחלק למקרים:

1. עבור $x=0$, מתקיים $f_n(0)=0$.
2. עבור $0<x<1$ מתקיים:
$$\lim_{n\to\infty} f_n(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{x^n}{3+2x^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\underbrace{\frac{3}{x^n}}_{\to\infty}+2}=0$$
3. עבור $x=1$ מתקיים $f_n(1)=\frac{1}{5}$.
4. עבור $1<x\leq 2$ מתקיים:
$$\lim_{n\to\infty} f_n(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{x^n}{3+2x^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\underbrace{\frac{3}{x^n}}_{\to 0}+2}=\frac{1}{2}$$

כלומר הפונקציה הגבולית הינה:

$$f(x)=\begin{cases}0 & x\in[0,1)\\ \frac{1}{5} & x=1\\ \frac{1}{2} & x\in(1,2]\end{cases}$$

כעת, נזכר במשפט שראינו בהרצאה.

תזכורת

תהא $f_n: I\to\mathbb{R}$ סדרת פונקציות רציפות. אם $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{\text{Uniform}} f$, אז f רציפה.

נשים לב כי f_n רציפה לכל n, ו f אינה רציפה, לכן ההתכנסות אינה במידה שווה.

תרגיל 1.5.

האם סדרת הפונקציות $f_n:[0,1]\to\mathbb{R}$, $f_n(x)=x^n-x^{n+1}$ מתכנסת במ"ש?

פתרון:

ראשית נבדוק התכנסות נקודתית, נבדוק את הקצוות:

$$\forall n\in\mathbb{N}, f_n(0)=f_n(1)=0$$

עבור $x\in(0,1)$ בעזרת א"ש המשולש:

$$|f_n(x)|=\left|x^n-x^{n+1}\right|\le|x^n|+\left|x^{n+1}\right|\xrightarrow[n\to\infty]{}0$$

כלומר f_n מתכנסות נקודתית ל$f(x)=0$.
על מנת להוכיח התכנסות במ"ש, נחשב:

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{x\in[0,1]}|f_n(x)-f(x)|=\lim_{n\to\infty}\underbrace{\sup_{x\in[0,1]}\left|x^n-x^{n+1}\right|}_{:=M_n}$$

היות וx^n-x^{n+1} רציפה בקטע סגור, עפ"י משפט ויירשטראס, $g(x)=x^n-x^{n+1}$ מקבלת את ערכה המקסימלי והמינימלי בקטע $[0,1]$, על מנת למצוא אותו נגזור ונשווה לאפס:

$$g'(x)=nx^{n-1}-(n+1)x^n=0$$

משום ש$f_n(x)\ge 0$ אפשר להניח כי המקסימום לא מתקבל ב$x=0$ (כי $f_n(0)=0$) ולכן ניתן לחלק בx^{n-1} ונקבל:

$$n-(n+1)x=0\Rightarrow x=\frac{n}{n+1}$$

ומאותה סיבה, נקודה זאת היא אכן המקסימום המוחלט, ולכן:

$$M_n=f_n\left(\frac{n}{n+1}\right)=\left(\frac{n}{n+1}\right)^n-\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1}=\left(\frac{n}{n+1}\right)^n\left(1-\frac{n}{n+1}\right)$$

נרצה לחשב את M_n $\lim_{n\to\infty}$, ולשם כך נפשט את M_n:

$$\begin{aligned} M_n &= \left(\frac{n}{n+1}\right)^n \left(1-\frac{n}{n+1}\right) = \left(1-\frac{1}{n+1}\right)^n \left(1-\frac{n}{n+1}\right) \\ &= \left(1+\frac{-1}{n+1}\right)^n \left(1-\frac{n}{n+1}\right) = \left(1+\frac{-1}{n+1}\right)^{n+1} \left(1+\frac{-1}{n+1}\right)^{-1} \left(1-\frac{n}{n+1}\right) \end{aligned}$$

ולכן:

$$\lim_{n\to\infty} M_n = \lim_{n\to\infty} \overbrace{\left(1+\frac{-1}{n+1}\right)^{n+1}}^{\to \frac{1}{e}} \overbrace{\left(1+\frac{-1}{n+1}\right)^{-1}}^{\to 1} \overbrace{\left(1-\frac{n}{n+1}\right)}^{\to 0} = 0$$

ולכן סדרת הפונקציות מתכנסת במידה שווה.

תרגיל 1.6.

יהיו $f \xrightarrow[n\to\infty]{\text{Uniform}} f_n$ סדרת פונקציות המתכנסות במ"ש לפונקציה f כך שלכל n, הפונקציה f_n חסומה, הוכיחו כי f חסומה.

פתרון:

היות ו $\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in I}|f_n(x)-f(x)| = 0$ קיים n כך ש $\sup_{x\in I}|f_n(x)-f(x)| \le 1$, כלומר לכל $x \in I$ מתקיים:

$$|f_n(x)-f(x)| < 1$$

אז לכל $x \in I$:

$$|f(x)| = |f(x)-f_n(x)+f_n(x)| \le |f(x)-f_n(x)| + |f_n(x)| \le 1 + |f_n(x)|$$

אבל f_n חסומה, אז קיים K כך שלכל $x \in I$ מתקיים $|f_n(x)| \le K$, אז:

$$|f(x)| \le 1 + |f_n(x)| \le K+1$$

לכל $x \in I$, כלומר $f(x)$ חסומה.

1.2 התכנסות טורי פונקציות

תזכורת – (טור פונקציות)

מקרה פרטי של סדרת פונקציות שנעסוק בו רבות בקורס הוא טור פונקציות, כלומר אם יש לנו סדרת פונקציות $f_n(x) : I \to \mathbb{R}$ אז נגדיר:

$$s_n(x) = \sum_{i=1}^{n} f_n(x)$$

ונקבל סדרת פונקציות חדשה, אם הסדרה מתכנסת נקודתית, נסמן את הפונקציה הגבולית שלה ע"י:

$$s(x) = \lim_{n\to\infty} s_n(x) = \sum_{i=1}^{\infty} g_n(x)$$

כמו במקרים הקודמים, נרצה לדבר על התכנסות נקודתית ובמ"ש של הסדרה s_n לפונקציה s.

תרגיל 1.7.

יהא הטור $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{2^n}$, בדקו התכנסות נקודתית ובמ"ש בכל $\mathbb{R}$.

פתרון:

נקבע $x_0 \in \mathbb{R}$, נשים לב כי הסכום הוא סכום סדרה הנדסית.

תזכורת

סכום סדרה הנדסית $q, q^2, \ldots, q^N$ הוא:

$$\sum_{n=1}^{N} q^n = \frac{1-q^{N+1}}{1-q} - 1 = \frac{q(1-q^N)}{1-q}$$

כלומר:

$$s_n(x_0) = \sum_{k=1}^{n} \frac{x_0}{2^n} = x_0 \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^n} = x_0 \left(\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}}{1-\frac{1}{2}} - 1 \right) \xrightarrow[n\to\infty]{} x_0 \left(\frac{1}{1-\frac{1}{2}} - 1 \right) = x_0$$

כלומר הטור מתכנס נקודתית:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{2^n} = x$$

נבדוק התכנסות במ"ש, בעזרת קריטריון הסופרמום, יהא $n \in \mathbb{N}$, אז:

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |s_n(x) - x| = \sup_{x\in\mathbb{R}} \left| \sum_{k=1}^{n} \frac{x}{2^k} - x \right| = \sup_{x\in\mathbb{R}} |x| \underbrace{\left| \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k} - 1 \right|}_{\text{מספר חיובי}} = \infty$$

ולכן ההתכנסות אינה במידה שווה.

תרגול עצמי

מצאו מפורשות את ערך הביטוי הבא, והוכיחו כי הוא חיובי:

$$\left|\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2^k}-1\right|$$

תרגיל 1.8.

יהא הטור:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x^n}{n^2}-\frac{x^{n+1}}{(n+1)^2}\right)$$

בדקו התכנסות נקודתית ובמ"ש ב$[-1,1]$.

פתרון:

נשים לב כי:

$$s_1(x)=x-\frac{x^2}{2^2}$$

$$s_2(x)=x\cancelto{0}{-\frac{x^2}{2^2}+\frac{x^2}{2^2}}-\frac{x^3}{3^2}$$

$$s_3(x)=x\cancelto{0}{-\frac{x^2}{2^2}+\frac{x^2}{2^2}-\frac{x^3}{3^2}+\frac{x^3}{3^2}}-\frac{x^4}{4^2}$$

כלומר, הטור הוא טלסקופי. נמשיך ובאופן דומה נקבל כי:

$$s_n(x)=x-\frac{x^{n+1}}{(n+1)^2}$$

תרגול עצמי

הוכיחו זאת באינדוקציה.

נשים לב כי עבור $x_0\in[-1,1]$ מתקיים:

$$\lim_{n\to\infty}s_n(x_0)=\lim_{n\to\infty}\left(x_0-\frac{x_0^{n+1}}{(n+1)^2}\right)=x_0$$

כלומר:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x^n}{n^2}-\frac{x^{n+1}}{(n+1)^2}\right)=x$$

ועבור התכנסות במ"ש:

$$\begin{aligned}\sup_{x\in[-1,1]}|s_n(x)-x| &= \sup_{x\in[-1,1]}\left|x-\frac{x^{n+1}}{(n+1)^2}-x\right| \\ &= \sup_{x\in[-1,1]}\left|\frac{x^{n+1}}{(n+1)^2}\right| = \sup_{x\in[-1,1]}\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)^2} \\ &= \frac{1}{(n+1)^2}\sup_{x\in[-1,1]}|x|^{n+1} = \frac{1}{(n+1)^2}\xrightarrow[n\to\infty]{}0\end{aligned}$$

כלומר הטור מתכנס במ"ש.

תזכורת – (משפט M של ויירשטראס)

תהא סדרת פונקציות $f_n : I \to \mathbb{R}$, אם לכל $n \in \mathbb{N}$ קיים $M_n \geq 0$ כך ש $|f(x)| \leq M_n$ לכל $x \in I$, ומתקיים כי טור המספרים $\sum_{n=1}^{\infty} M_n$ מתכנס, אז: $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ מתכנס בהחלט ובמ"ש בI.

הערה

1. כדי להשתמש במבחן אין צורך לדעת מהי הפונקציה הגבולית של הטור - יותר מכך, הוא אומר כי טור מתכנס במ"ש, ולא אומר מהי הפונקציה הגבולית.
2. מעבר להתכנסות במידה שווה, המבחן גם מראה לנו כי הטור מתכנס בהחלט, כלומר הטור:

$$\sum_{n=1}^{\infty}|f_n(x)|$$

מתכנס נקודתית בI.

תרגיל 1.9.

הוכיחו כי הטור:

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k\cos(kx)+k\sin(x)}{k^3}$$

מתכנס במ"ש לכל $x \in \mathbb{R}$.

פתרון:

נשים לב כי:

$$\begin{aligned}\left|\frac{(-1)^k\cos(kx)+k\sin(x)}{k^3}\right| &= \left|\frac{(-1)^k\cos(kx)}{k^3}+\frac{k\sin(x)}{k^3}\right| \\ &\leq \left|\frac{(-1)^k\cos(kx)}{k^3}\right|+\left|\frac{k\sin(x)}{k^3}\right| \leq \frac{1}{k^3}+\frac{1}{k^2}\end{aligned}$$

כלומר, עבור $M_k = \frac{1}{k^3} + \frac{1}{k^2}$ מתקיים כי $\left|\frac{(-1)^k \cos(kx) + k\sin(x)}{k^3}\right| \leq M_k$, ובאמת $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^3} + \frac{1}{k^2}$ מתכנס, אז ממשפט M של ויירשטראס, הטור $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k \cos(kx) + k\sin(x)}{k^3}$ מתכנס במ"ש בכל $\mathbb{R}$.

תרגיל 1.10.

נגדיר את הטור:

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{x^2 + \sqrt{n}}$$

1. הוכיחו כי הטור מתכנס במ"ש ב I.
2. הראו כי לא קיימת סדרת מספרים M_n המקיימת את תנאי משפט M של ויירשטראס.

הערה

המסקנה מסעיף ב' הוא שמשפט M של ויירשטראס אינו אמ"מ, כלומר, אם לא מתקיימים תנאי המשפט, זה לא גורר שההתכנסות לא במ"ש.

פתרון:

נזכר במבחן לייבניץ להתכנסות סדרה מתחלפת מחדו"א 1.

תזכורת – (מבחן לייבניץ)

תהא $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרה, אם מתקיימים התנאים הבאים:

1. לכל n, $a_n \geq 0$.
2. a_n סדרה מונוטונית יורדת.
3. $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

אז טור המספרים $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ מתכנס, ויותר מזה, מתקיים כי:

$$\forall n \in \mathbb{N}, \left|\sum_{i=1}^{n} (-1)^n a_n - \sum_{i=1}^{\infty} (-1)^n a_n\right| \leq a_{n+1}$$

1. נקבע $x_0 \in \mathbb{R}$, ונתבונן בסדרת המספרים $\left(\frac{1}{x_0^2 + \sqrt{n}}\right)_{n=1}^{\infty}$, ו נשים לב שסדרה זאת היא אכן סדרת לייבניץ:
   (א) לכל n, $\frac{1}{x_0^2 + \sqrt{n}} > 0$.
   (ב) $\frac{1}{x_0^2 + \sqrt{n+1}} > \frac{1}{x_0^2 + \sqrt{n}}$, כלומר הסדרה מונוטונית.

(ג) $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{x_0^2+\sqrt{n}} = 0$.

כלומר הטור מתכנס נקודתית. נבדוק התכנסות במ"ש בעזרת קריטריון הסופרמום, כלומר נחקור את הביטוי:

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{x\in\mathbb{R}}|s_n(x)-s(x)| = \lim_{n\to\infty}\sup_{x\in\mathbb{R}}\left|\sum_{i=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{x^2+\sqrt{n}} - \sum_{i=1}^{n}\frac{(-1)^n}{x^2+\sqrt{n}}\right|$$

אז היות ולכל $x\in\mathbb{R}$ הטור שלנו הוא טור לייבניץ, מתקיים כי:

$$\forall x_0\in\mathbb{R}, \left|\sum_{i=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{x_0^2+\sqrt{n}} - \sum_{i=1}^{n}\frac{(-1)^n}{x_0^2+\sqrt{n}}\right| \le \frac{1}{x_0^2+\sqrt{n+1}}$$

כלומר:

$$\sup_{x\in\mathbb{R}}|s_n(x)-s(x)| \le \sup_{x\in\mathbb{R}}\left|\frac{1}{x_0^2+\sqrt{n+1}}\right| = \sup_{x\in\mathbb{R}}\left|\frac{1}{x_0^2+\sqrt{n+1}}\right| = \frac{1}{\sqrt{n+1}} \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

ולכן:

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{x\in\mathbb{R}}|s_n(x)-s(x)| = 0$$

והטור שלנו מתכנס במ"ש.

2. נניח בשלילה כי קיימת סדרת מספרים M_n המקיימת את תנאי משפט M של ויירשטראס, בפרט הטור מתכנס בהחלט, כלומר לכל $x\in\mathbb{R}$:

$$s(x) := \sum_{i=1}^{\infty}\left|\frac{(-1)^n}{x^2+\sqrt{n}}\right| = \sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{x^2+\sqrt{n}}$$

בפרט, עבור $x=0$, הטור הוא $s(0)=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$ - אבל מחדו"א 1 אנו יודעים שהטור אינו מתכנס.

תרגול שני

2.1 | גזירה ואינטגרציה של סדרות וטורי פונקציות

תזכורת – (אינטגרציה של סדרת פונקציות)

תהא $f_n : I \to \mathbb{R}$ סדרת פונקציות אינטגרביליות, אם $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{\text{Uniform}} f$, אז f אינטגרבילית, ולכל $[a,b] \subset I$ מתקיים:

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)dx = \int_a^b \lim_{n\to\infty} f_n(x)dx = \int_a^b f(x)dx.$$

מקרה פרטי הוא טור פונקציות, $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$, אם הטור מתכנס במ"ש, אז לכל $[a,b] \subset I$,

$$\int_a^b \left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \right) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b f_n(x)dx$$

תרגיל 2.1.

תהא סדרת הפונקציות $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$:

$$f_n(x) = n^\alpha x e^{-nx}$$

עבור $\alpha \in \mathbb{R}$ פרמטר.

1. עבור אילו ערכים של α הסדרה מתכנסת במ"ש ב$[0,1]$?
2. עבור אילו ערכי α מתקיים:

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n dx = \int_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n dx$$

פתרון:

1. ראשית, נשים לב כי לכל $x \in [0,1]$ ולכל $\alpha > 0$ מתקיים:

$$\lim_{n\to\infty} n^\alpha x e^{-nx} = 0$$

נבדוק התכנסות במ"ש בעזרת קריטריון הסופרמום, נסמן:

$$M_n = \sup_{x\in I}|n^\alpha x e^{-nx}|$$

נשים לב כי $[0,1]$ קטע סגור, ולכן עפ"י משפט ויירשטראס f_n משיגה את חסמיה, נגזור ונשווה לאפס:

$$\frac{\partial}{\partial x}n^\alpha x e^{-nx} = n^\alpha(-n)xe^{-nx} + n^\alpha e^{-nx} = n^\alpha e^{-nx}\left(1-nx\right)$$

כלומר $x=\frac{1}{n} \iff \frac{\partial}{\partial x}f_n(x)=0$, כלומר M_n יכול לקבל שלושה ערכים:

$$M_n = \max\left\{f_n(0), f_n(1), f_n\left(\frac{1}{n}\right)\right\}$$

נשים לב כי לכל $\alpha\in\mathbb{R}$

$$f_n(0)=0, f_n(1)=n^\alpha e^{-n}\xrightarrow[n\to\infty]{}0$$

אבל:

$$f_n\left(\frac{1}{n}\right) = n^\alpha\frac{1}{n}e^{-1} = \frac{n^{\alpha-1}}{e}$$

שמתכנס ל0 אמ"מ $\alpha<1$. כלומר סדרת הפונקציות מתכנסת במ"ש אמ"מ $\alpha<1$.

2. מסעיף א' אנו יודעים כי:

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f_n dx = \int_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n dx$$

לכל $\alpha<1$, אבל אנו לא יודעים מה קורה ב $\alpha\geq 1$, אין מנוס אלא פשוט לחשב:

$$\begin{aligned}
\int_0^1 n^\alpha x e^{-nx}dx &= n^\alpha\int_0^1 \underbrace{x}_{u}\underbrace{e^{-nx}}_{v'}dx = n^\alpha\left(\left[-\frac{x}{n}e^{-nx}\right]\Big|_{x=0}^{x=1} - \int_0^1\left(-\frac{1}{n}e^{-nx}\right)dx\right)\\
&= n^\alpha\left(\left[-\frac{x}{n}e^{-nx}\right]\Big|_{x=0}^{x=1} + \frac{1}{n}\int_0^1\left(e^{-nx}\right)dx\right)\\
&= n^\alpha\left(\left[-\frac{x}{n}e^{-nx}\right]\Big|_{x=0}^{x=1} + \frac{1}{n}\left[-\frac{e^{-nx}}{n}\right]\Big|_{x=0}^{x=1}\right)\\
&= n^\alpha\left(\left[-\frac{x}{n}e^{-nx} - \frac{e^{-nx}}{n^2}\right]\Big|_{x=0}^{x=1}\right)\\
&= ... = -\frac{n^{\alpha-1}}{e^n} - \frac{n^{\alpha-2}}{e^n} + n^{\alpha-2}
\end{aligned}$$

מצד שני:

$$\int_0^1\lim_{n\to\infty}f_n dx = \int_0^1 0dx = 0$$

אז השאלה היא מתי:

$$\lim_{n\to\infty} -\frac{n^{\alpha-1}}{e^n} - \frac{n^{\alpha-2}}{e^n} + n^{\alpha-2} = 0$$

לכל $\alpha\in\mathbb{R}$ מתקיים $\lim_{n\to\infty}-\frac{n^{\alpha-1}}{e^n} = \lim_{n\to\infty}\frac{n^{\alpha-2}}{e^n} = 0$, אבל המחובר השלישי (ולכן גם כל הביטוי) מתכנס ל0 אמ"מ $\alpha<2$. סה"כ, סדרת האינטגרלים מתכנסת עבור $\alpha<2$ או $\alpha\geq 1$.

תרגיל 2.2.

תהא סדרת הפונקציות $f_n:[0,\infty)\to\mathbb{R}$:

$$f_n(x)=\frac{\arctan\left(x^n\right)}{n}$$

1. בדקו התכנסות נקודתית ובמ"ש.
2. הראו כי f_n' לא מתכנסת אפילו נקודתית ל-f'.

פתרון:

1. נשים לב כי $\arctan(t)$ חסומה על ידי $\frac{\pi}{2}$ ולכן ננחש כי הפונקציה הגבולית היא $f\equiv 0$, ובאמת:

$$\sup_{x\in[0,\infty)}\left|f_n(x)-f(x)\right|=\sup_{x\in[0,\infty)}\left|f_n(x)\right|\le\frac{\pi}{2}\frac{1}{n}\xrightarrow[n\to\infty]{}0$$

כלומר $f_n\twoheadrightarrow 0$.
נשים לב כי התכנסות במ"ש גוררת התכנסות נקודתית, כלומר, בהכרח גם $f\xrightarrow[n\to\infty]{}0$.

2. נבדוק ישירות:

$$f_n'(x)=\left(\frac{\arctan\left(x^n\right)}{n}\right)'=\frac{1}{n}\frac{1}{1+\left(x^n\right)^2}nx^{n-1}=\frac{x^{n-1}}{1+x^{2n}}$$

מצד שני $f'(x)=0$, אבל למשל עבור $x_0=1$ מתקיים:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_0^{n-1}}{1+x_0^{2n}}=\frac{1}{2}\neq 0$$

הערה

המסקנה מהתרגיל הקודם היא שאין לנו משפט עבור התכנסות נגזרות כפי שיש לנו עבור אינטגרציה.
הסיכוי היחיד שלנו הוא להשתמש באינטגרציה ולקבל את המשפט הבא.

תזכורת – (גזירה של סדרת פונקציות)

תהא $f_n : I \to \mathbb{R}$ סדרת פונקציות גזירות בI. אם מתקיימים התנאים הבאים:

1. קיים $x_0 \in I$ כך ש $(f_n(x_0))_{i=1}^{\infty}$ סדרת מספרים מתכנסת.
2. $(f_i')_{i=1}^{\infty}$ מתכנסת במ"ש לפונקציה g.

אז קיימת $f : I \to \mathbb{R}$ כך ש $f \xrightarrow[n\to\infty]{\text{Uniform}} f_n$ וגם $f'(x) = g(x)$ לכל $x \in I$.

תרגיל 2.3.

יהא $R > 1$, וטור הפונקציות $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{x+n}$, בדקו התכנסות במ"ש בקטע $I = [1, R]$.

פתרון:

נשים לב כי לכל $x_0 \in I$ הטור $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{x_0+n}$ הוא לייבניץ - כלומר $a_n = \frac{1}{x_0+n}$ סדרה חיובית, מונוטונית ומתכנסת לאפס, כלומר הטור מתכנס נקודתית בI.
לגבי התכנסות במ"ש, נבדוק בעזרת משפט הגזירה.

1. נסמן $u_n(x) = \frac{(-1)^n}{x+n}$.
2. נגזור:
$$u_n'(x) = \frac{(-1) \cdot (-1)^n}{(x+n)^2}$$
3. נפעיל את משפט M של ויירשטראס על הטור $\sum_{n=1}^{\infty} u_n'(x)$, בעזרת:
$$|u_n'(x)| = \frac{1}{(x+n)^2} \leq \underbrace{\frac{1}{n^2}}_{M_n}$$
וכמובן כי $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ מתכנס.

אז לפי המשפט, קיבלנו כי הטור <u>המקורי</u> מתכנס.

תרגול עצמי

פתרו את תרגיל זה בדומה לתרגיל 1.10.

2.2 טורי חזקות

תזכורת – (טור חזקות ורדיוס התכנסות)

טור חזקות הוא טור פונקציות מהצורה:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + ...$$

עבור $(a_n)_{n=0}^{\infty} \subset \mathbb{R}$ סדרת מספרים ו$x_0 \in \mathbb{R}$.
לכל טור קיים **רדיוס התכנסות** $0 \leq R < \infty$, או $R = \infty$ כך ש:

1. (א) אם $|x-x_0| < R$ אז הטור מתכנס נקודתית בx.
   (ב) אם $|x-x_0| > R$ אז הטור מתבדר בx.
   (ג) אם $|x-x_0| = R$ אז הטור יכול להתכנס או להתבדר, תלוי בטור.
2. לכל קטע סגור $[\alpha, \beta]$ בתחום ההתכנסות הטור מתכנס במ"ש.

הערה

שימו לב ששוב פעם יש פה עניין עם האינסוף, - אם $R = \infty$, אז הטור מתכנס נקודתית בכל $\mathbb{R}$, ובמ"ש בכל $[a,b] \subset \mathbb{R}$, אבל לא בהכרח בכל $\mathbb{R}$.

תזכורת – (קושי-הדמר)

עבור טור חזקות $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$ מתקיים:

$$R = \frac{1}{\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}$$

כאשר אנו מחשיבים את הגבולות הבאים:

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 0 \implies R = \infty$$

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \infty \implies R = 0$$

לפעמים נוכל לחשב את R בקלות יותר. במקרה ואחד הגבולות הבאים קיימים:

1.

$$L = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}}$$

2.

$$L = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|$$

(יכולים גם להיות ∞) אז $R = L$.

תזכורת – (lim sup)

תהא $\mathbb{R} \supset (a_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרת מספרים.
אם $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרה מתכנסת, אז $\limsup_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} a_n$.
אם ℓ היא קבוצת כל **הגבולות החלקיים של** $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, אז $\limsup_{n\to\infty} a_n = \sup \ell$.

תרגיל 2.4.

מצאו את תחום ההתכנסות של טור החזקות:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{2^n n^2}$$

פתרון:

ראשית, נמצא את רדיוס ההתכנסות, נעשה זאת בשתי דרכים:

.1

$$R =_{\star} \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{1}{2^n n^2}}{\frac{1}{2^{n+1}(n+1)^2}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{2^{n+1}(n+1)^2}{2^n n^2}\right| = \lim_{n\to\infty} 2\left|\frac{(n+1)^2}{n^2}\right| = 2$$

.2

$$R =_{\star} \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{\left|\frac{1}{2^n n^2}\right|}} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)\sqrt[n]{\left|\frac{1}{n^2}\right|}} = \lim_{n\to\infty}\frac{2}{\sqrt[n]{\left|\frac{1}{n^2}\right|}} = 2$$

($\star$ - בהנחה שהגבול קיים.)
כלומר, $R = 2$, נבדוק מה קורה בקצוות:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{2^n n^2}\bigg|_{x=2} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{2^n n^2} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n^2} < \infty$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{2^n n^2}\bigg|_{x=-2} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-2)^n}{2^n n^2} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2} < \infty$$

כלומר הטור מתכנס ב $[-2, 2]$.

תרגיל 2.5.

בדקו התכנסות של הטור:

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n n\left(\frac{x}{2}-3\right)^n$$

פתרון:
נציב $t = \frac{x}{2} - 3$, ונקבל את הטור:

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n n t^n$$

נבדוק עבור רדיוס התכנסות:

$$R =_{\star} \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{n}{n+1}\right| = 1$$

($\star$ - בהנחה שהגבול קיים.)
כלומר הטור מתכנס כאשר $|t| < 1$, נשים לב כי:

$$|t| < 1 \iff \left|\frac{x}{2}-3\right| < 1 \iff -1 < \frac{x}{2} - 3 < 1 \iff 2 < \frac{x}{2} < 4 \iff 4 < x < 8$$

נבדוק קצוות, עבור $x = 8$:

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n n\left(\frac{x}{2}-3\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n n$$

שאינו מתכנס, ועבור $x=4$:

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n n\left(\frac{x}{2}-3\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty}n$$

שגם לא מתכנס, כלומר הטור מתכנס ב$(4,8)$.

תרגיל 2.6.

מצאו את רדיוס ההתכנסות של הטור:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^n+(-2)^n}{n}x^n$$

פתרון:

נשים לב כי אפשר לפרק את הטור לסכום של שני טורים:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^n+(-2)^n}{n}x^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^n}{n}x^n+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-2)^n}{n}x^n$$

יש פה משחק מסוכן, כי נכון שאם שני טורים מתכנסים אז גם סכומם מתכנס, אבל אם הם מתבדרים זה לא אומר שסכומם מתבדר.

1. עבור הטור $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^n}{n}x^n$ נשים לב כי:

$$R=_{\star}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{\left|\frac{3^n}{n}\right|}}=\frac{1}{3}$$

כלומר הטור מתכנס ב $|x|<\frac{1}{3}$.

2. הטור $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-2)^n}{n}x^n$ מתכנס ב:

$$R=_{\star}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{\left|\frac{(-2)^n}{n}\right|}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{\left|\frac{2^n}{n}\right|}}=\frac{1}{2}$$

כלומר הטור מתכנס כאשר $|x|<\frac{1}{2}$.

($\star$ - בהנחה שהגבול קיים.)

נשים לב כי הטור הנתון מתכנס כאשר $|x|<\frac{1}{3}$ ומצד שני, מתבדר עבור $x\in\left(\frac{1}{3},\frac{1}{2}\right)$, כי שם טור אחד מתכנס וטור שני מתבדר, כלומר כל הטור מתבדר (סכום איבר-איבר של טור מתכנס ומתבדר הוא מתבדר) כלומר, רדיוס ההתכנסות חייב להיות $\frac{1}{3}$.

תזכורת – (חדו"א של טורי חזקות)

יהא טור חזקות $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ עם רדיוס התכנסות $R>0$, נסמן בI את תחום ההתכנסות ואת $s(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ להיות פונקציית סכום הטור, אז:

1. $s(x)$ רציפה בI.
2. $s(x)$ אינטגרבילית בI ולכל $x\in I$ מתקיים:

$$\int_{x_0}^{x} s(t)dt=\int_{x_0}^{x}\sum_{n=0}^{\infty} a_n(t-x_0)^n dt=\sum_{n=0}^{\infty}\int_{x_0}^{x} a_n(t-x_0)^n dt=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n+1}a_n(x-x_0)^{n+1}$$

וטור האינטגרלים $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n+1}a_n(x-x_0)^{n+1}$ בעל רדיוס התכנסות R.

3. לכל $x\in I$, $s(x)$ גזירה ומתקיים:

$$s'(x)=\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n\right)'=\sum_{n=0}^{\infty}\left(a_n(x-x_0)^n\right)'=\sum_{n=1}^{\infty} na_n(x-x_0)^{n-1}$$

כאשר טור הנגזרות בעל רדיוס התכנסות R.

לגבי התכנסות בקצוות של תחום ההתכנסות, כלומר ב$\xi=x_0\pm R$.

1. אם $s(\xi)$ קיים (כלומר הגבול $\sum_{n=0}^{\infty} a_n\xi^n$) אז גם $S(x)=\int_0^x s(t)dt$ מתכנס.

תרגול עצמי

הוכיחו זאת, רמז, השמתמשו במבחן אבל לסדרות.

2. אם $s(\xi)$ קיים, אז $s'(\xi)$ לא בהכרח קיים.

תרגול עצמי

הראו כי $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^2}$ היא דוגמה לכך.

תרגיל 2.7.

פתחו את $f(x)=\arctan(x)$ לטור חזקות סביב $x=0$.

פתרון:

נשים לב כי $f'(x)=\frac{1}{1+x^2}=\frac{1}{1-(-x^2)}$, שאת הטור הזה אנחנו יודעים לפתח לטור חזקות סביב $x_0=0$,

עבור $\left|-x^2\right| < 1$, אז נקבל, שעבור $x \in (-1,1)$:

$$f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(-x^2)^n = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}$$

אז עבור $x \in (-1,1)$:

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x) - \underbrace{f(0)}_{=0} = \int_0^x f'(t)dt = \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n t^{2n}dt = \sum_{n=0}^{\infty}\int_0^x (-1)^n t^{2n}dt \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \int_0^x t^{2n}dt = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \end{aligned}$$

$$\forall x \in (-1,1), \text{arctan}(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

הערה

עבור x שלילי יש פה נקודה עדינה:

$$\int_0^x f'(x)dx = \begin{cases} \int_0^x f'(x)dx = f(x) - f(0) & x \geq 0 \\ -\int_x^0 f'(x) = -(f(0) - f(x)) = f(x) - f(0) & x < 0 \end{cases} = f(x) - f(0)$$

תרגיל 2.8.

יהיו $s_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n, s_2(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n(x-x_0)^n$ שני טורי חזקות בעלי רדיוס התכנסות $R > 0$, נסמן $I = \{x| -R < x - x_0 < R\}$, כלומר תחום ההתכנסות ללא הקצוות.
הוכיחו כי אם לכל $x \in I$, $s_1(x) = s_2(x)$, אז לכל n, $a_n = b_n$.

פתרון:
נשים לב כי:

$$s_1(0) = s_2(0) \Rightarrow a_0 = b_0$$

באופן דומה, היות ו-$I \ni 0$ אז מהמשפט $s_1'(0) = s_2'(0)$ ובאמת $s_1'(0) = 2a_1, s_2'(0) = 2b_1$, וניתן להמשיך באופן אינדוקטיבי, $s_1''(0) = s_2''(0)$ וגם $s_1''(0) = 6a_2, s_2''(0) = 6b_2$ וכן הלאה.

תרגיל 2.9.

חשבו את ערך הטור:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n+1}{5^n}$$

פתרון:

נשים לב כי אם $s(x)=\sum_{i=0}^{\infty}(n+1)x^n$ אז $s\left(\frac{1}{5}\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n+1}{5^n}$ ערך הטור הנדרש.
בדיקה מהירה תראה כי $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=1$ ולכן רדיוס ההתכנסות הוא $R=1$.
נשים לב כי:

$$\forall x\in(-1,1)\,,\qquad \int_0^x s(t)dt=\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^x(n+1)t^n dt=\sum_{n=0}^{\infty}x^{n+1}=\sum_{n=1}^{\infty}x^n$$

כלומר:

$$\int_0^x s(t)dt=\sum_{n=1}^{\infty}x^n=\sum_{n=1}^{\infty}x^n+1-1=\sum_{n=0}^{\infty}x^n-1=\frac{1}{1-x}-1$$

ולכן:

$$s(x)=\left(\int_0^x s(t)dt\right)'=\left(\frac{1}{1-x}-1\right)'=\frac{1}{(1-x)^2}$$

בפרט:

$$s\left(\frac{1}{5}\right)=\frac{1}{\left(1-\frac{1}{5}\right)^2}=\frac{1}{\left(\frac{4}{5}\right)^2}=\frac{25}{16}$$

תרגול שלישי

3.1 | טורי טיילור

תזכורת – (טורי טיילור)

בחדו"א 1 ראינו כי הפולינום מסדר k שמקרב בצורה הטובה ביותר פונקציה $f : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ הגזירה ∞ פעמים בסביבה של $x_0 \in \mathbb{R}$ הוא פולינום טיילור:

$$T_k(x) = \sum_{n=0}^{k} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

והגדרנו את טור טיילור להיות הפונקציה הגבולית:

$$T(x) = \lim_{k\to\infty} T_k(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

נשאלת השאלה מתי $f(x) = T(x)$, ואכן ראינו את משפט השארית:

$$R_n(x) := f(x) - T_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}$$

עבור c נקודה בין x ו- x_0. בשפה של חדו"א 2, סדרת הפונקציות $T_n(x)$ מתכנסת נקודתית ל $f(x)$ אמ"מ $R_n(x)$ מתכנסת נקודתית לפונקציית האפס.
עוד פרט חשוב שלמדנו הוא יחידות מקדמי טיילור, כלומר שאם:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$$

אז בהכרח:

$$a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$$

תזכורת

מספר טורים מוכרים:

$$\cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}$$

$$\sin(x) = -\frac{\partial}{\partial x}\left(\cos(x)\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}(2n)}{(2n)!} x^{2n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}$$

$$e^x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

לשלושת הטורים הללו רדיוס התכנסות $R = \infty$.

תרגיל 3.1.

חשבו את טור טיילור של:

$$f(x) = \sin^2(x)$$

פתרון:

נשתמש בזהות הטריגונומטרית:

$$\sin^2(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(2x)$$

אז אפשר פשוט להציב בטור טיילור של $\cos(x)$:

$$\begin{aligned}\sin^2(x) &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!}(2x)^{2n}\right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!}(2x)^{2n}\right) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2}\frac{(-1)^{n+1}}{(2n)!}(2x)^{2n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n)!} 2^{2n-1} x^{2n}\end{aligned}$$

תרגיל 3.2.

תהא $f(x)$ פונקציה עם טור חזקות סביב $x_0 = 0$, הוכיחו כי אם f זוגית, אז כל מקדמי טיילור האי-זוגיים מתאפסים, ואם f אי-זוגית אז המקדמים הזוגיים מתאפסים.
הסיקו כי, לפחות עבור פונקציה עם טור חזקות, נגזרת של פונקציה זוגית היא אי-זוגית, ונגזרת של פונקציה אי-זוגית היא זוגית.

פתרון:

ראשית נראה עבור f זוגית, נניח כי $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, ב-$I$, אז היות ו-$f$ זוגית מתקיים:

$$f(x) - f(-x) = 0$$

אבל נשים לב כי:

$$f(-x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(-x)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n x^n$$

כלומר:

$$0 = f(x) - f(-x) = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n - (-1)^n a_n) x^n = \sum_{n=0}^{\infty} 2a_{2n+1} x^{2n+1} = 2a_1 x + 2a_3 x^3 + 2a_5 x^5 + 2a_7 x^7 \ldots.$$

אבל, כמובן ש$g(x) = 0$ היא פונקציה עם טור החזקות $0 = \sum_{i=0}^{\infty} c_n x^n, c_n = 0$, אז מיחידות מקדמי טיילור אנו מקבלים:

$$\forall n \in \mathbb{N}, 2a_{2n+1} = c_{2n+1} = 0 \implies a_{2n+1} = 0$$

נעשה דבר דומה עבור f אי-זוגית, כאשר מתקיים:

$$f(x) + f(-x) = 0$$

כלומר:

$$0 = f(x) + f(-x) = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n + (-1)^n a_n) x^n = \sum_{n=0}^{\infty} 2a_{2n} x^{2n}$$

אז שוב, מיחידות מקדמי טיילור של $g(x) = 0$ נקבל:

$$\forall n \in \mathbb{N}, a_{2n} = 0$$

נשים לב כי אם f זוגית בעלת טור חזקות, אז:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{2n} x^{2n} \implies f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (2n) a_{2n} x^{2n-1}$$

היא אי-זוגית (על פי הסיווג שהרגע הוכחנו), וכמובן שההוכחה עבור f אי-זוגית זהה לגמרי.

תרגיל 3.3.

הוכיחו את נוסחת אוילר:

$$e^{ix} = \cos(x) + i\sin(x)$$

כאשר $i^2 = (-1)$.

פתרון:

נציב בטורים הידועים:

$$\begin{aligned}
e^{ix} &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(ix)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(ix)^{2n}}{(2n)!} + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(ix)^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{i^{2n}x^{2n}}{(2n)!} + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{i^{2n+1}x^{2n+1}}{(2n+1)!} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(i^2)^n x^{2n}}{(2n)!} + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{i\left(i^2\right)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(i^2)^n x^{2n}}{(2n)!} + i\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(i^2\right)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} + i\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(-1\right)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} = \cos(x) + i\sin(x)
\end{aligned}$$

הערה

מספרים מרוכבים לא בחומר הקורס, אבל זאת מסקנה מאוד חזקה שאפשר להסיק מכלים שפיתחנו בקורס.

תרגיל 3.4.

מצאו טור מספרים המתכנס ל:

$$\int_0^1 e^{-x^4}dx$$

עובדה מעניינת היא כי לe^{-x^4} לא קיימת פונקציה קדומה פשוטה, ולכן זה אינטגרל שקשה לחשב.

פתרון:

אנו יודעים כי הטור טיילור של e^x הוא $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$, וטור זה בעל רדיוס התכנסות ∞, בפרט גם עבור e^{-x^4}:

$$e^{-x^4} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-x^4)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{4n}}{n!}$$

ולכן:

$$\begin{aligned}
\int_0^1 e^{-x^4}dx &= \int_0^1\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{4n}}{n!}dx = \sum_{n=0}^{\infty}\int_0^1\frac{(-1)^n}{n!}x^{4n}dx \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}\int_0^1 x^{4n}dx = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!(4n+1)}
\end{aligned}$$

3.2 | וקטורים

תזכורת – (וקטורים)

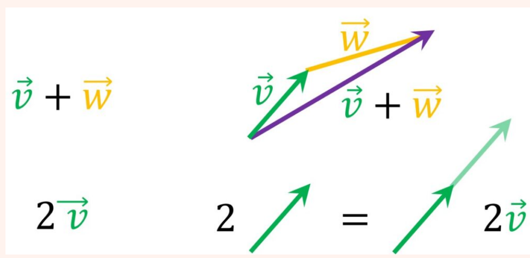
וקטור ב-$\mathbb{R}^n$ הוא n-יה של n איברים ב-$\mathbb{R}$,

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

שלו פעולת חיבור וכפל בסקלר:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix}, \qquad \lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \vdots \\ \lambda x_n \end{pmatrix}$$

לפעמים נוח לחשוב על וקטורים בתור "גודל מכוון" - כלומר בתור החצים בין ראשית הצירים לנקודה ב-$\mathbb{R}^n$, ואז יש אינטואיציה גאומטרית לפעולות החיבור וכפל בסקלר..



תזכורת – (מכפלה פנימית ונורמה)

על $\mathbb{R}^n$, יש לנו מכפלה פנימית טבעית:

$$\left\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \right\rangle = x_1 y_1 + \ldots + x_n y_n$$

ונורמה:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \qquad \|\vec{x}\| = \sqrt{\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle} = \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2}$$

הזווית בין שני וקטורים $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$ היא $\theta = \arccos \frac{\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle}{|\vec{x}||\vec{y}|}$. אם $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = 0$ אז $\vec{x}, \vec{y}$ נקראים אורתוגונליים ונסמן $\vec{x} \perp \vec{y}$.

יהיו $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$.

נסמן $\vec{x} \times \vec{y} = \det \begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 y_3 - x_3 y_2 \\ x_3 y_1 - x_1 y_3 \\ x_1 y_2 - x_2 y_1 \end{pmatrix}$.

תרגיל 3.5.

יהיו $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^3$, הוכיחו כי $(\vec{x} \times \vec{y}) \perp \vec{x}$ וגם $(\vec{x} \times \vec{y}) \perp \vec{y}$.

פתרון:

נראה כי $\langle (\vec{x} \times \vec{y}), \vec{x} \rangle = 0$, את הסעיף השני נשאיר כתרגיל.
נסמן חישוב ישיר יראה כי:

$$\begin{aligned} \langle \vec{x} \times \vec{y}, \vec{x} \rangle &= \left\langle \det \begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} x_2 y_3 - x_3 y_2 \\ x_3 y_1 - x_1 y_3 \\ x_1 y_2 - x_2 y_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \right\rangle \\ &= x_1(x_2 y_3 - x_3 y_2) + x_2(x_3 y_1 - x_1 y_3) + x_3(x_1 y_2 - x_2 y_1) \\ &= x_1 x_2 y_3 - x_1 x_3 y_2 + x_2 x_3 y_1 - x_1 x_2 y_3 + x_3 x_1 y_2 - x_2 x_3 y_1 = 0 \end{aligned}$$

תזכורת – (משוואת ישר ומישור)

ישר ב$\mathbb{R}^n$ העובר בין זוג נקודות $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^n$ הינו:

$$\ell = \{v_1 + t(v_2 - v_1) | t \in \mathbb{R}\}$$

מישור העובר ב-$v \in \mathbb{R}^n$, עם נורמל $n \in \mathbb{R}^n$ הוא:

$$S = \{x \in \mathbb{R}^n | \langle x - v, n \rangle = 0\}$$

תרגיל 3.6.

יהיו זוג מישורים ב$\mathbb{R}^3$:

$$S_1 = \left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \middle| x+y+z=1\right), \qquad S_2 = \left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \middle| -3x-3y+z=17\right)$$

מצאו את משוואת הישר של $S_1 \cap S_2$.

פתרון:

מספיק למצוא נקודה ב$S_1 \cap S_2$.

נקודה $v = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ היא ב$S_1 \cap S_2$ אמ"מ $v \in S_1$ וגם $v \in S_2$, כלומר:

$$\begin{cases} x+y+z=1 \\ -3x-3y+z=17 \end{cases} \implies 4z=20 \implies z=5 \implies x+y=-4$$

נבחר למשל בנקודות:

$$v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 5 \end{pmatrix}, \qquad v_2 = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$$

אז:

$$\ell = \{v_1 + t(v_2 - v_1) | t \in \mathbb{R}\} = \left\{\begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 5 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} | t \in \mathbb{R}\right\} = \left\{\begin{pmatrix} -4t \\ -4+4t \\ 5 \end{pmatrix} | t \in \mathbb{R}\right\}$$

תזכורת – (פונקצית מרחק)

יהיו $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ המרחק בין x לy הינו:

$$d(x,y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2}$$

תרגיל 3.7.

יהא ℓ הישר ב-$\mathbb{R}^3$ העובר בין נקודות $v_2 = \begin{pmatrix}4\\5\\6\end{pmatrix}$, $v_1 = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$, ויהי $p = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$, מצאו את המרחק בין p ל-ℓ, כלומר את הנקודה על ℓ הקרובה ביותר ל-p.

<u>פתרון:</u>
נמצא את המשוואה של ℓ:

$$\ell = \{v_1 + t(v_2 - v_1) | t \in \mathbb{R}\} = \left\{ \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}3\\3\\3\end{pmatrix} \middle| t \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix}1+3t\\2+3t\\3+3t\end{pmatrix} \middle| t \in \mathbb{R} \right\}$$

תהא $\ell \ni q = \begin{pmatrix}1+3t\\2+3t\\3+3t\end{pmatrix}$, נמצא את הערך המינימלי של $d(p,q)^2$, כדי להימנע מגזירת שורשים, אז:

$$d(p,q)^2 = (1-(1+3t))^2 + (1-(2+3t))^2 + (1-(3+3t))^2 = 27t^2 + 18t + 5$$

על מנת למצוא את הערך המינימלי, נגזור ונקבל

$$\frac{\partial}{\partial t}(27t^2 + 18t + 5) = 54t + 18 = 0 \implies t = -\frac{1}{3} \Rightarrow q = \begin{pmatrix}1+3t\\2+3t\\3+3t\end{pmatrix}\Bigg|_{t=-\frac{1}{3}} = \begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}$$

תרגיל 3.8.

הוכיחו כי לכל $u, v, w \in \mathbb{R}^3$ מתקיים:

$$u \times (v \times w) = \langle u, w\rangle v - \langle u, v\rangle w$$

<u>פתרון:</u>

נראה את התרגיל עבור $u = e_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$.

תרגול עצמי

הראו זאת עבור $u = e_2, u = e_3$ והסיקו את התוצאה הכללית.

נסמן

$$u = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \qquad v = \begin{pmatrix}v_1\\v_2\\v_3\end{pmatrix}, \qquad w = \begin{pmatrix}w_1\\w_2\\w_3\end{pmatrix}$$

אז $v\times w=\begin{pmatrix}v_2w_3-v_3w_2\\v_3w_1-v_1w_3\\v_1w_2-v_2w_1\end{pmatrix}$ ולכן:

$$u\times(v\times w)=\det\begin{pmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & 0 & 0\\ v_2w_3-v_3w_2 & v_3w_1-v_1w_3 & v_1w_2-v_2w_1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\v_2w_1-v_1w_2\\v_3w_1-v_1w_3\end{pmatrix}$$

מצד שני,

$$\langle u,w\rangle v-\langle u,v\rangle w=w_1\begin{pmatrix}v_1\\v_2\\v_3\end{pmatrix}-v_1\begin{pmatrix}w_1\\w_2\\w_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\v_2w_1-v_1w_2\\v_3w_1-v_1w_3\end{pmatrix}$$

תרגיל 3.9.

נזכר שראינו בהרצאה כי אם $x,y,z\in\mathbb{R}^3$, $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ אז מתקיים:

$$(\alpha x+\beta y)\times z=\alpha(x\times z)+\beta(y\times z),\qquad x\times(\alpha y+\beta z)=\alpha(x\times y)+\beta(x\times z)$$

לתכונה הזאת קוראים <u>בילינאריות.</u>
הוכיחו כי לא קיימת מכפלה וקטורית ב-$\mathbb{R}^4$, כלומר מכפלה שנסמן $v_1\chi v_2$, $v_1,v_2\in\mathbb{R}^4$, המקיימת:

1. בילינאריות.
2. מתקיים $u\chi(v\chi w)=\langle u,w\rangle v-\langle u,v\rangle w$ כמו בתרגיל הקודם.
3. $u\chi v$ אורתוגונלי ל-u,v.
4. $v\chi u=-u\chi v$.
5. לכל $i\neq j$, מתקיים $e_i\chi e_j\neq\vec{0}$.

<u>פתרון:</u>
נניח בשלילה שקיימת כזאת. אנו יודעים כי $\langle e_1\chi e_2,e_1\rangle=0$, וגם $\langle e_1\chi e_2,e_2\rangle=0$, ולכן $e_1\chi e_2$ מהצורה

$$e_1\chi e_2=\begin{pmatrix}0\\0\\\alpha\\\beta\end{pmatrix}=\alpha e_3+\beta e_4.$$

מתקיים:

$$e_3\chi(e_1\chi e_2)=\langle e_3,e_2\rangle e_1-\langle e_3,e_1\rangle e_2=0$$
$$e_4\chi(e_1\chi e_2)=\langle e_4,e_2\rangle e_1-\langle e_4,e_1\rangle e_2=0$$

מצד שני,

$$e_3\chi(e_1\chi e_2)=e_3\chi(\alpha e_3+\beta e_4)=\alpha e_3\chi e_3+\beta e_3\chi e_4=\beta e_3\chi e_4$$

וגם:

$$e_4\chi(e_1\chi e_2)=e_4\chi(\alpha e_3+\beta e_4)=\alpha e_4\chi e_3+\beta e_4\chi e_4=-\alpha e_3\chi e_4$$

כלומר:

$$\beta e_3 \chi e_4 = -\alpha e_3 \chi e_4 = 0$$

אבל, $e_3 \chi e_4 \neq 0$, ולכן $\alpha = \beta = 0$, כלומר $e_1 \chi e_2 = \vec{0}$ וזו סתירה.

הערה

גם ב $\mathbb{R}^5, \mathbb{R}^6$ לא קיימת כזו, אבל דווקא ב$\mathbb{R}^7$ כן קיימת.

3.3 | טופולוגיה - תרגול עצמי

תזכורת

1. עבור $\mathbb{R}^n$ נגדיר את פונקציית המרחק:

$$d(\vec{x}, \vec{y}) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2}\ , \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

2. כדור פתוח ברדיוס $R > 0$ סביב נקודה p הוא:

$$B_R(p) := \{x \in \mathbb{R}^n | d(x, p) < R\}$$

3. כדור סגור (או דיסק) ברדיוס $R > 0$ סביב נקודה p הוא:

$$\overline{B}_R(p) := D_R(p) := \{x \in \mathbb{R}^n | d(x, p) \leq R\}$$

4. נקודה $p \in A \subseteq \mathbb{R}^n$ נקראת נקודת פנים של A אם קיים $\epsilon > 0$ כך שכדור פתוח ברדיוס ϵ ממורכז בנקודה p מוכל בA.
5. קבוצה $A \subseteq \mathbb{R}^n$ נקראת פתוחה אם כל נקודה בה היא נקודת פנים.
6. נקודה $p \in \mathbb{R}^n$ נקראת נקודת שפה של $A \subseteq \mathbb{R}^n$ אם לכל $\epsilon > 0$ הכדור ברדיוס ϵ סביב p מכיל גם נקודה בA וגם נקודה שאינה בA.
7. אוסף נקודות השפה של $A \subseteq \mathbb{R}^n$ נקרא השפה של A ומסומן ∂A.
8. קבוצה $A \subseteq \mathbb{R}^n$ נקראת סגורה אם $\partial A \subseteq A$.
9. קבוצה $A \subseteq \mathbb{R}^n$ נקראת חסומה אם קיים $R > 0$ כך ש-A מוכלת בכדור ברדיוס R סביב 0.
10. עבור $A \subseteq \mathbb{R}^n$, נסמן ב$A^c = \{x \in \mathbb{R}^n | x \notin A\}$ את המשלים של A.
11. ראינו בהרצאה כי A פתוחה אמ"מ A^c סגורה, וA סגורה אמ"מ A^c פתוחה, וכי $(A^c)^c = A$.

תרגיל 3.10.

הוכיחו כי קבוצה $A \subseteq \mathbb{R}^n$ היא פתוחה אמ"מ היא לא מכילה אף נקודת שפה.

פתרון:

$$\Longleftarrow$$

אם A פתוחה, אז לכל נקודה $x_0 \in A$ קיים $\epsilon_{x_0} > 0$ כך שכדור סביב x_0 ברדיוס ϵ_{x_0} מוכל בA, כלומר x_0 לא יכולה להיות נקודת שפה, כלומר A לא מכילה אף נקודת שפה.

$$\Longrightarrow$$

אם A לא פתוחה, היא מכילה נקודה $p \in A$ שאינה נקודת שפה, כלומר לכל $\epsilon > 0$ הכדור $B_\epsilon(p)$ לא מוכל בA, אבל, $p \in B_\epsilon(p)$ וגם $p \in A$, אז p נקודת שפה.

תרגיל 3.11.

הוכיחו כי אם $A \subseteq \mathbb{R}^n$, פתוחה וסגורה אז $A = \mathbb{R}^n$ או $A = \emptyset$.

פתרון:

דבר ראשון, $\mathbb{R}^n, \emptyset$ אכן גם סגורות וגם פתוחות, ונשים לב כי הן המשלימות אחת של השנייה, ויותר מכך, אם A אכן גם סגורה וגם פתוחה, אז A^c גם כזאת, נניח בשלילה כי A, A^c הן לא $\mathbb{R}^n, \emptyset$, כלומר קיימים $p \in A, q \in A^c$, נסמן:

$$\ell = \{t \in [0,1] \mid t\vec{q} + (1-t)\vec{p} \in A\}$$

נשים לב כי $0 \in \ell, 1 \notin \ell$ נסמן $S = \sup \ell$, ברור כי $S \geq 0$, אבל גם $S < 1$, כי אם $S = 1$, נקבל כי $\vec{q} \in A$, כי A סגורה, אז הנקודה $\vec{X} = S\vec{q} + (1-S)\vec{p} \in A$ כי A סגורה, אבל היות וA פתוחה קיים $r > 0$ כך ש $B_r(X) \subseteq A$, אז $S + r \in \ell$ בסתירה לכך ש $S = \sup \ell$.

תרגיל 3.12.

1. הוכיחו את הטענות הבאות:
   (א) יהיו $\{U_n\}_{n=1}^\infty$ קבוצות פתוחות, הוכיחו כי $U = \bigcup_{n=1}^\infty U_n$ פתוחה.
   (ב) יהיו $\{F_n\}_{n=1}^\infty$ קבוצות סגורות, הוכיחו כי $F = \bigcap_{n=1}^\infty F_n$ סגורה.
   (ג) יהיו U_1, U_2 פתוחות, הוכיחו כי $U = U_1 \cap U_2$ פתוחה, הסיקו כי כל חיתוך <u>סופי</u> של קבוצות פתוחות הוא פתוח.
   (ד) יהיו F_1, F_2 סגורות, הוכיחו כי $F = F_1 \cup F_2$ סגורה, הסיקו כי כל איחוד <u>סופי</u> של קבוצות סגורות הוא סגור,
2. מצאו דוגמה נגדית לטענות הבאות:
   (א) יהיו $\{U_n\}_{n=1}^\infty$ קבוצות פתוחות, הוכיחו כי $U = \bigcap_{n=1}^\infty U_n$ פתוחה.

(ב) יהיו $\{F_n\}_{n=1}^{\infty}$ קבוצות סגורות, הוכיחו כי $F=\bigcup_{n=1}^{\infty}F_n$ סגורה.

פתרון:

1. (א) תהא $p\in U$ היות והיא באיחוד, קיים k כך ש $p\in U_k$, היות וU_k פתוחה, קיים $r>0$ כך ש $B_r(p)\subseteq U_k\subseteq U$, אז $B_r(p)\subseteq U$, וסיימנו.

   (ב) נזכר כי K סגורה אמ"מ K^c פתוחה, ונשתמש בחוקי דה-מורגן:

$$F=\bigcap_{n=1}^{\infty}F_n=\bigcap_{n=1}^{\infty}(F_n^c)^c=\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}F_n^c\right)^c$$

   אז לפי הסעיף הקודם, $\bigcup_{n=1}^{\infty}F_n^c$ פתוחה, אז $F=\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}F_n^c\right)^c$ סגורה.

   (ג) תהא $p\in U_1\cap U_2$, אז $p\in U_1$ וגם $p\in U_2$, היות ו U_1,U_2 פתוחות, קיימים $r_1,r_2>0$ כך ש $B_{r_1}(p)\subseteq U_1$ וגם $B_{r_2}(p)\subseteq U_2$, נסמן $r=\min\{r_1,r_2\}>0$, אז $B_r(p)\subseteq B_{r_1}(p)$ וגם $B_r(p)\subseteq B_{r_2}(p)$ ולכן $B_r(p)\subset U_1\cap U_2$ וסיימנו.

   (ד) נשאיר את סעיף זה כתרגיל.

2. (א) נסמן $U_n=B_{\frac{1}{n}}(0)$, אז:

$$U=\bigcap_{i=1}^{\infty}U_i=\bigcap_{n=1}^{\infty}B_{\frac{1}{n}}(0)=\{0\}$$

   אינה פתוחה.

   (ב) נסמן $F_n=D_{1-\frac{1}{n}}(0)$, אז:

$$F=\bigcup_{n=1}^{\infty}D_{1-\frac{1}{n}}(0)=B_1(0)$$

   שאינה סגורה.

תרגול רביעי

4.1 | פונקציות במספר משתנים

תזכורת

יהא תחום $D \subseteq \mathbb{R}^n$, פונקציה בn משתנים היא פונקציה מהצורה $f : D \to \mathbb{R}^m$, כאשר אנו מסמנים:

$$f(x_1, ..., x_n) = (f_1(x_1, ..., x_n), ..., f_m(x_1, ..., x_n)), \qquad \forall i, f_i : D \to \mathbb{R}.$$

אם $m = 1$ נקרא ל f פונקציה סקלרית ואם $m > 1$ נקרא לה פונקציה וקטורית.
בדומה למקרה החד-ממדי, נקרא לתחום הגדול ביותר בו מוגדרת הפונקציה תחום ההגדרה של הפונקציה, ואת התמונה של הפונקציה נסמן:

$$\text{Im}(f) = \{f(x_1, ..., x_n) | (x_1, ..., x_n) \in D\} \subseteq \mathbb{R}^m.$$

גרף של פונקציה היא הקבוצה הבאה:

$$\Gamma_f = \{(x_1, ..., x_n, y_1, ..., y_m) | (y_1, ..., y_m) = f(x_1, ..., x_n)\} \subseteq \mathbb{R}^{n+m}$$

שזו קבוצה שקצת קשה לצייר עבור ממדים גבוהים, אז נחפש דרך אחרת להציג פונקציה.
תהא $f : D \to \mathbb{R}$ פונקציה סקלרית, לכל $c \in \mathbb{R}$ הקבוצה הבאה:

$$f^{-1}(c) := \{(x_1, ..., x_m) | f(x_1, ..., x_m) = c\} \subseteq D$$

נקראת קו הגובה במקרה בו $m = 2$, ואז זו קבוצה ב$\mathbb{R}^2$, או משטח רמה אם $m = 3$, ואז זו קבוצה ב$\mathbb{R}^3$.

תרגיל 4.1.

מצאו וציירו את תחום ההגדרה של הפונקציות הבאות, בדקו האם תחומים אילו פתוחים, סגורים וחסומים.

1.
$$f(x, y) = \sqrt{(x^2 + y^2 - 16)(x^2 + y^2 - 9)}$$

2.
$$g(x, y) = \arcsin(2x - y)$$

3.
$$h(x, y) = \ln\left(x^2 - y^2 - 4\right)$$

4.

$$s(x,y) = \sqrt{y|\ln(x)|}$$

פתרון:

1. נשים לב שעל מנת שf תהיה מוגדרת, הביטוי תחת השורש צריך להיות חיובי, ביטוי זה חיובי אמ"מ מתקיימת אחת מ2 האפשרויות הבאות:

(א) $(x^2+y^2-16) \geq 0$ **וגם** $(x^2+y^2-9) \geq 0$, **כלומר:**

$$x^2+y^2 \geq 16 \text{ וגם } x^2+y^2 \geq 9 \implies x^2+y^2 \geq 16$$

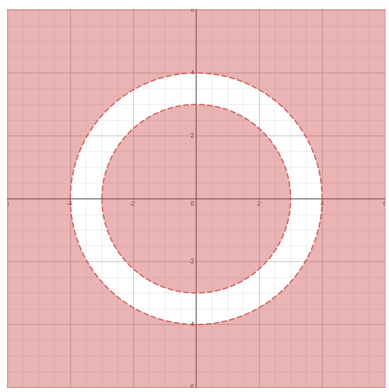
(ב) $(x^2+y^2-16) \leq 0$ **וגם** $(x^2+y^2-9) \leq 0$, **כלומר:**

$$x^2+y^2 \leq 16 \text{ וגם } x^2+y^2 \leq 9 \implies x^2+y^2 \leq 9$$

כלומר, תחום הגדרת f הוא:

$$x^2+y^2 \geq 16 \text{ או } x^2+y^2 \leq 9$$

אם נשרטט את התחום הזה נקבל:



נשים לב כי שפת התחום הינה:

$$x^2+y^2 = 16 \text{ או } x^2+y^2 = 9$$

שמוכלת בקבוצה, כלומר תחום ההגדרה הינו סגור. הנקודה $(4,0)$ איננה נקודת פנים, ולכן הקבוצה לא פתוחה וברור כי הקבוצה אינה חסומה.

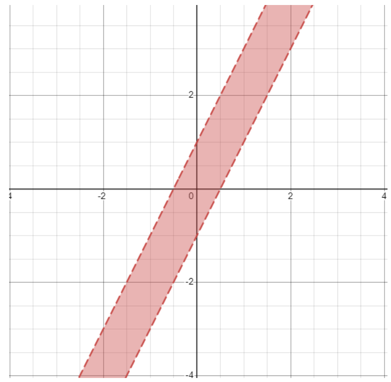
2. $\arcsin(t)$ מוגדר רק עבור $-1 \leq t \leq 1$, כלומר תחום ההגדרה שלנו הוא:

$$-1 \leq 2x-y \leq 1 \iff -1 \leq 2x-y \text{ וגם } 2x-y \leq 1$$

כלומר:

$$y \leq 2x+1 \text{ וגם } y \geq 2x-1$$

וזהו התחום הבא:



נשים לב כי שפת התחום הינה:

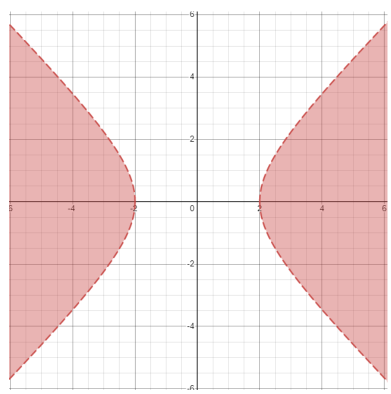
$$2x - y = 1 \text{ או } -1 = 2x - y$$

שמוכלת בקבוצה, כלומר תחום ההגדרה הוא סגור ולא פתוח, וברור שהקבוצה אינה חסומה.

3. תחום ההגדרה של $\ln(t)$ הוא $t > 0$ ולכן תחום ההגדרה הינו:

$$x^2 - y^2 - 4 > 0 \implies x^2 - y^2 > 4$$

שזהו התחום הבא:



הוא לא מכיל את השפה שלו, ולכן הוא פתוח אך לא סגור, וברור שהוא איננו חסום.

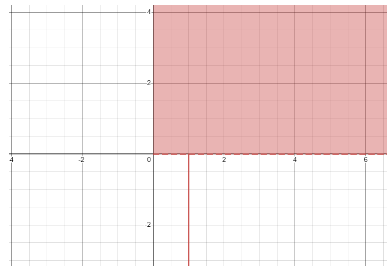
4. תחום ההגדרה של s הוא:

$$y|\ln(x)| \geq 0 \text{ וגם } x > 0$$

שהוא:

$$(x = 1 \text{ או } y \geq 0) \text{ וגם } x > 0$$

שהוא:



הוא איננו חסום, $(0,3)$ נקודת שפה שאיננה בתחום, ולכן אינו סגור, אבל גם $(3,0)$ לא נקודת פנים, ולכן הקבוצה גם לא פתוחה.

4.2 | גבולות של פונקציות במספר משתנים

תזכורת – (גבול של סדרת נקודות ב־$\mathbb{R}^n$)

לכל $m \in \mathbb{N}$ נוכל להגדיר פונקצית מרחק (אשר נקראת גם מטריקה אוקלידית) ב־$\mathbb{R}^m$ על ידי:

$$d : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \to [0,\infty)$$

$$d(\vec{x},\vec{y}) = \sqrt{\sum_{i=1}^{m}(x_i - y_i)^2}$$

תהא סדרת נקודות $\{\vec{x}_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ נומר כי $\lim_{n\to\infty}\vec{x}_n = \vec{x}$ אם:

$$\forall\epsilon > 0, \exists N_\epsilon \in \mathbb{N}, \forall n > N_\epsilon, d(\vec{x}_n,\vec{x}) < \epsilon$$

ראינו בהרצאה כי אם נסמן:

$$\vec{x}_n = (x_1^n, ..., x_m^n), \qquad \vec{x} = (x_1, ..., x_m)$$

אז:

$$\lim_{n\to\infty}\vec{x}_n = \vec{x} \iff \begin{array}{c} \lim_{n\to\infty} x_1^n = x_1 \\ \vdots \\ \lim_{n\to\infty} x_m^n = x_m \end{array}$$

תזכורת – (גבול של פונקציה ב $\mathbb{R}^n$)

תהא $f : D \to \mathbb{R}$, כאשר $D \subseteq \mathbb{R}^n$ מכילה סביבה של נקודה $\vec{x}_0$, (ולא בהכרח $\vec{x}_0 \in D$), נסמן:

$$\lim_{\vec{x}\to\vec{x}_0} f(\vec{x}) = L$$

אם:

$$\forall\varepsilon > 0, \exists\delta > 0, 0 < d(\vec{x}, \vec{x}_0) < \delta \implies |f(\vec{x}) - L| < \varepsilon$$

הערה

בפרט, אם $n = 2$, ו $\vec{x}_0 = (a, b)$, אז:

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x, y) = L$$

אם:

$$\forall\varepsilon > 0, \exists\delta > 0, 0 < \sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2} < \delta \implies |f(x, y) - L| < \varepsilon$$

אם $\vec{x}_0 \in D$, וגם $\lim_{\vec{x}\to\vec{x}_0} f(\vec{x}) = f(\vec{x}_0)$ אז נאמר כי f רציפה בנקודה $\vec{x}_0$.

תזכורת – (אריתמטיקה של גבולות)

יהיו $f, g : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ פונקציות כך ש:

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x, y) = L, \lim_{(x,y)\to(a,b)} g(x, y) = M$$

אז:

1. $$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x, y) + g(x, y) = L + M$$

2. $$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x, y) \cdot g(x, y) = L \cdot M$$

3. $$\forall c \in \mathbb{R}, \lim_{(x,y)\to(a,b)} c \cdot f(x, y) = c \cdot L$$

4. אם $M \neq 0$, אז:
$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} \frac{f(x, y)}{g(x, y)} = \frac{L}{M}$$

תזכורת – (משפט היינה)

תהא $f(x,y)$ פונקציה סקלרית המוגדרת בסביבה של (a,b), אז $\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = L$ אמ"מ לכל סדרה $\{(x_n,y_n)\}_{n=1}^{\infty}$ כך ש $(x_n,y_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} (a,b)$ מתקיים:

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n,y_n) = L$$

תזכורת

יהיו $\gamma_1,\gamma_2 : [0,1] \to \mathbb{R}^n$ מסילות רציפות כך ש $\gamma_1(0) = \gamma_2(0) = \vec{x}_0$, אם:

$$\lim_{t\to 0} f(\gamma_1(t)) \neq \lim_{t\to 0} f(\gamma_2(t))$$

אז הגבול $\lim_{\vec{x}\to\vec{x}_0} f(\vec{x})$ לא קיים.

תרגיל 4.2.

הראו כי לא קיים הגבול:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$$

פתרון:

נתבונן במסילות $\gamma_1(t) = (t,0), \gamma_2(t) = (t,2t)$. נשים לב כי המסילות רציפות, ומתקיים $\gamma_1(0) = \gamma_2(0) = (0,0)$. נחשב את הגבול לאורך המסילה γ_1:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} \stackrel{?}{=} \lim_{t\to 0} \frac{t^2-0}{t^2+0} = \lim_{t\to 0} 1 = 1$$

כעת נביט במסילה γ_2:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} \stackrel{?}{=} \lim_{t\to 0} \frac{t^2-(2t)^2}{t^2+(2t)^2} = \lim_{t\to 0} \frac{t^2-4t^2}{t^2+4t^2} = \lim_{t\to 0} \frac{-3}{5} = -\frac{3}{5}$$

משום שקיבלנו גבול שונה לאורך שתי מסילות שונות, נוכל להסיק כי הגבול לא קיים.

תרגיל 4.3.

הוכיחו כי הפונקציה:

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{y\sin x}{\sqrt{y\sin x+1}-1} & \substack{y\sin x+1\geq 0 \\ \text{וגם} \\ \sqrt{y\sin x+1}\neq 1} \\ 2 & \text{אחרת} \end{cases}$$

רציפה ב$(0,1)$.

כאשר ניתן להניח ללא בדיקה כי $\frac{y\sin x}{\sqrt{y\sin x+1}-1}$ מוגדרת בסביבה מנוקבת של $(0,1)$.

פתרון:
כדאי להוכיח רציפות, נדרש לבדוק כי:

$$\lim_{(x,y)\to(0,1)} f(x,y) = f(0,1)$$

כלומר:

$$\lim_{(x,y)\to(0,1)} \frac{y\sin x}{\sqrt{y\sin x+1}-1} = 2$$

נבצע החלפת משתנים, נשים לב כי אם נסמן $t = y\sin(x)$:

$$\frac{y\sin x}{\sqrt{y\sin x+1}-1} = \frac{t}{\sqrt{t+1}-1}$$

נשים לב כי מתקיים $\lim_{(x,y)\to(0,1)} y\sin(x) = 0$, כלומר הגבול שאנו מחפשים הינו:

$$\begin{aligned}\lim_{(x,y)\to(0,1)} \frac{y\sin x}{\sqrt{y\sin x+1}-1} &= \lim_{t\to0}\frac{t}{\sqrt{t+1}-1}\\ &= \lim_{t\to0}\frac{t\left(\sqrt{t+1}+1\right)}{\left(\sqrt{t+1}-1\right)\left(\sqrt{t+1}+1\right)}\\ &= \lim_{t\to0}\frac{t\left(\sqrt{t+1}+1\right)}{t} = 2\end{aligned}$$

ולכן f רציפה ב$(0,1)$.

הערה

פורמלית מה שקורה פה הוא שאנו יודעים כי:

$$\lim_{t\to0}\frac{t}{\sqrt{t+1}-1} = 2$$

כלומר, הפונקציה $g(t) = \begin{cases}\frac{t}{\sqrt{t+1}-1} & t\neq0\\ 2 & t=0\end{cases}$ רציפה ב $t=0$. **וכי** $\lim_{(x,y)\to(0,1)} y\sin x = 0$, **ועל כן:**

$$\lim_{(x,y)\to(0,1)} g(y\sin x) = g(0) = 2$$

תרגיל 4.4.

נתבונן בפונקציה $f:\mathbb{R}^2\setminus\{x+y=0\}\to\mathbb{R}$, המוגדרת על ידי $f(x,y)=\frac{\sin(x^2)+\sin(y^2)}{x+y}$, האם קיים לפונקציה גבול בנקודה $(x,y)=(0,0)$?

פתרון:
נשים לב כי $f(x,y)$ כלל אינה מוגדרת בישר $y=-x$ ולכן לא קיימת סביבה מנוקבת של $(0,0)$ בה הפונקציה מוגדרת. כלומר כלל אין משמעות לשאול על הגבול בנקודה זאת.

הערה

בתרגיל הקודם, נשים לב כי היה אפשר להגדיר $g(x,y)=\begin{cases}\frac{\sin(x^2)+\sin(y^2)}{x+y} & x+y\neq 0\\ \text{משהו אחר} & x+y=0\end{cases}$ ואז היה אפשר לשאול על רציפות.
תרגול עצמי, הראו שלא משנה איך נגדיר את g כאשר $\{x+y=0\}$, הגבול $\lim_{(x,y)\to(0,0)} g(x,y)$ לא קיים.
רמז, התבוננו במסילות $\gamma_1(t)=(t,t),\gamma_2(t)=(t,t^2-t)$.

תזכורת – (כלל הסנדוויץ')

יהיו $f,g,h:D\subseteq\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ פונקציות סקלריות המוגדרות בסביבה של (a,b), כך שלכל (x,y) בסביבה זו מתקיים:

$$f(x,y)\leq g(x,y)\leq h(x,y)$$

ומתקיים:

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)=\lim_{(x,y)\to(a,b)} h(x,y)=L$$

אז:

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} g(x,y)=L$$

תרגיל 4.5.

נגדיר $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ ע"י:

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{y\sin(x)+3xy}{\sin(y)x} & \mathbb{R}^2\setminus\{x=0 \text{ or } y=\pi k\}\\ \alpha & \{x=0 \text{ or } y=\pi k\}\end{cases}$$

עבור $\alpha\in\mathbb{R}$, מצאו α כך ש $f(x,y)$ תהיה רציפה ב$(0,0)$.

פתרון:

על מנת לקבל מועמד לגבול עבור α, נציב מסילה אחת, למשל (t,t), ונראה מה הגבול עליה:

$$\begin{aligned}\lim_{t\to0}\frac{t\sin(t)+3t^2}{\sin(t)t}&=\lim_{t\to0}\frac{\sin(t)+3t}{\sin(t)}\\&=\lim_{t\to0}\left(1+3\frac{t}{\sin(t)}\right)=4\end{aligned}$$

לכן ניתן לראות כי 4 הוא המועמד שלנו להיות הגבול. נעזר בכלל הסנדוויץ' על מנת להוכיח שהוא אכן הגבול של הפונקציה הדו-ממדית:

$$\begin{aligned}0\le|f(x,y)-4|&\le\left|\frac{y\sin(x)+3xy}{\sin(y)x}-4\right|=\left|\frac{y\sin(x)}{\sin(y)x}-1+\frac{3xy}{\sin(y)x}-3\right|\\&\le\left|\frac{y\sin(x)}{\sin(y)x}-1\right|+\left|\frac{3xy}{\sin(y)x}-3\right|=\left|\frac{y}{\sin(y)}\cdot\frac{\sin(x)}{x}-1\right|+3\left|\frac{y}{\sin(y)}-1\right|\longrightarrow0\end{aligned}$$

כאשר השתמשנו באריתמטיקה של גבולות, ולכן עפ"י כלל הסנדוויץ':

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)=4$$

כלומר, עבור $\alpha=4$, הפונקציה רציפה ב$(0,0)$.

תרגיל 4.6.

נגדיר $s:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ על ידי $s(x)=\begin{cases}1 & x\in\mathbb{Q}\\0 & x\notin\mathbb{Q}\end{cases}$ ונגדיר $f(x,y)=y\cdot s(x)$.

1. הוכיחו כי $\lim_{(x,y)\to(0,0)}=0$.
2. הוכיחו כי $\lim_{(x,y)\to(1,1)}$ לא קיים.

פתרון:

1. נשתמש בכלל הסנדוויץ':

$$0\le|f(x,y)|\le|y|\xrightarrow{(x,y)\to(0,0)}0$$

וסיימנו.

2. נשתמש בכלל היינה להפריך את הגבול, ניקח את הסדרה:

$$(a_n)_{n=1}^{\infty},\qquad a_n=\begin{pmatrix}1\\1-\frac{\pi}{n}\end{pmatrix},\qquad\lim_{n\to\infty}f(a_n)=\lim_{n\to\infty}1\cdot s\left(1-\frac{\pi}{n}\right)=0$$

$$(b_n)_{n=1}^{\infty},\qquad b_n=\begin{pmatrix}1\\1-\frac{1}{n}\end{pmatrix},\qquad\lim_{n\to\infty}f(b_n)=\lim_{n\to\infty}1\cdot s\left(1-\frac{1}{n}\right)=1$$

ולכן הגבול לא קיים.

תרגיל 4.7.

בדקו האם הפונקציות הבאות רציפות בתחום הגדרתן:

1. $f(x,y)=\begin{cases}\frac{x+y}{x^2-y} & x^2\neq y\\ 5 & \text{אחרת}\end{cases}$.
2. $f(x,y)=\begin{cases}(x^2+y^2)\cdot\sin\frac{1}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$.
3. $f(x,y)=\begin{cases}\frac{x}{3x+5y} & (x,y)\neq\left(x,-\frac{3}{5}x\right)\\ \frac{1}{3} & (x,y)=\left(x,-\frac{3}{5}x\right)\end{cases}$

פתרון:

1. בכל נקודה שאינה בפרבולה $y=x^2$ הפונקציה מוגדרת כאלמנטרית ולכן רציפה בתחום הגדרתה.
יהא $a\in\mathbb{R}$, נבדוק את הרציפות בנקודה (a,a^2). נתבונן במסילה $\gamma(t)=(a,a^2+t)$ עבור $t\to 0$, אז:
$$\lim_{t\to0}f(\gamma(t))=\lim_{t\to0}\frac{a+a^2+t}{a^2-(a^2+t)}=\lim_{t\to0}\frac{a+a^2+t}{-t}=-\frac{1}{t}\cdot(a+a^2)-1$$
ישר נקבל כי עבור $a\neq 0,-1$ הגבול לא קיים, בפרט שם הפונקציה לא רציפה.
במקרה בו $a=0,-1$, נשים לב כי $\lim_{t\to0}f(\gamma(t))=-1\neq5=f(0,0)=f(-1,1)$, כלומר הפונקציה גם לא רציפה בנקודות אלו.

2. בכל נקודה שאינה הראשית הפונקציה רציפה כהרכבה של אלמנטריות. נחשב את הגבול הבא $\lim_{(x,y)\to(0,0)}(x^2+y^2)\cdot\sin\frac{1}{x^2+y^2}$ מתקיים:
$$0\leq\left|(x^2+y^2)\sin\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right)\right|\leq\left|x^2+y^2\right|\xrightarrow{(x,y)\to(0,0)}0$$
אז מכלל הסנדויץ' נקבל כי הגבול קיים ושווה לאפס, בפרט הפונקציה רציפה.

3. בכל נקודה שאינה על הישר $y=-\frac{3}{5}x$ הפונקציה רציפה כהרכבה של אלמנטריות.
נבדוק עבור נקודות מהצורה $\left(a,-\frac{3}{5}a\right)$. נגדיר את המסילה $\gamma(t)=\left(a,-\frac{3}{5}a+t\right)$, כאשר $t\to0$, אז:
$$\lim_{t\to0}f(\gamma(t))=\lim_{t\to0}\frac{a}{3a+5\left(-\frac{3}{5}a+t\right)}=\lim_{t\to0}\frac{a}{3a-3a+5t}=\lim_{t\to0}\frac{a}{5t}$$
כאשר $a\neq0$ הגבול לא קיים, ולכן הפונקציה לא רציפה בנקודה $\left(a,-\frac{3}{5}a\right)$.
כאשר $a=0$, נשים לב כי $\lim_{t\to0}f(\gamma(t))=0\neq\frac{1}{3}=f(0,0)$, ולכן גם שם הפונקציה אינה רציפה.

תרגיל 4.8.

תהא $f(x,y)=\begin{cases}\frac{x^5y^{12}}{x^{10}+y^{18}} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$ הוכיחו כי f רציפה ב$(0,0)$.

פתרון:
נשתמש בזהות:

$$\forall a,b,\qquad 0\leq(a-b)^2=a^2+b^2-2ab \implies 2ab\leq a^2+b^2$$

בפרט,

$$|f(x,y)|=\left|\frac{x^5y^{12}}{x^{10}+y^{18}}\right|=\left|\frac{x^5y^{12}}{\left(x^5\right)^2+\left(y^9\right)^2}\right|\leq\left|\frac{x^5y^{12}}{2x^5y^9}\right|=\frac{1}{2}\left|y^3\right|\xrightarrow{(x,y)\to(0,0)}0$$

כאשר באי-שוויון השתמשנו גם בכך ש $x^{10}+y^{18}\geq 0$.
קיבלנו כי הפונקציה $f(x,y)$ רציפה ב$(0,0)$.

4.3 | משטחים ריבועיים - תרגול עצמי

תזכורת

נזכר במשוואות ריבועיות במישור $\mathbb{R}^2$, כלומר משוואת מהצורה:

$$ax^2 + by^2 + cxy + dx + ey = f$$

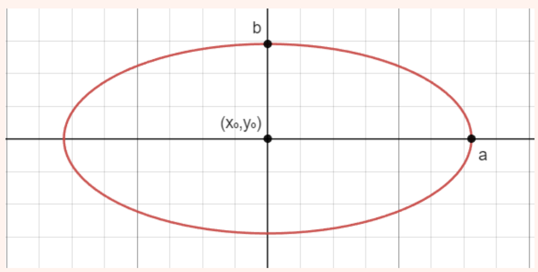
אז 4 משפחות ידועות של משוואת אילו הן:

1. מעגל סביב (x_0, y_0) ברדיוס $\mathbb{R}^2$ מתואר על ידי המשוואה:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$$

2. אליפסה סביב (x_0, y_0) עם "רדיס" a בכיוון ציר הx וb בכיוון ציר הy מתואר על ידי:

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1$$

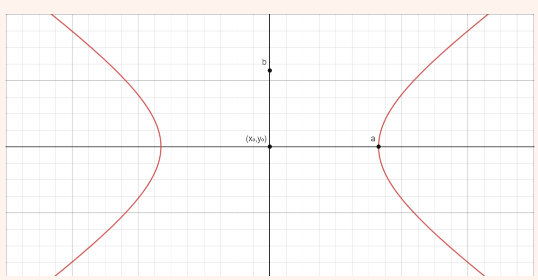


3. פרבולה עם ממורכזת ב (x_0, y_0) ומשתנה c:

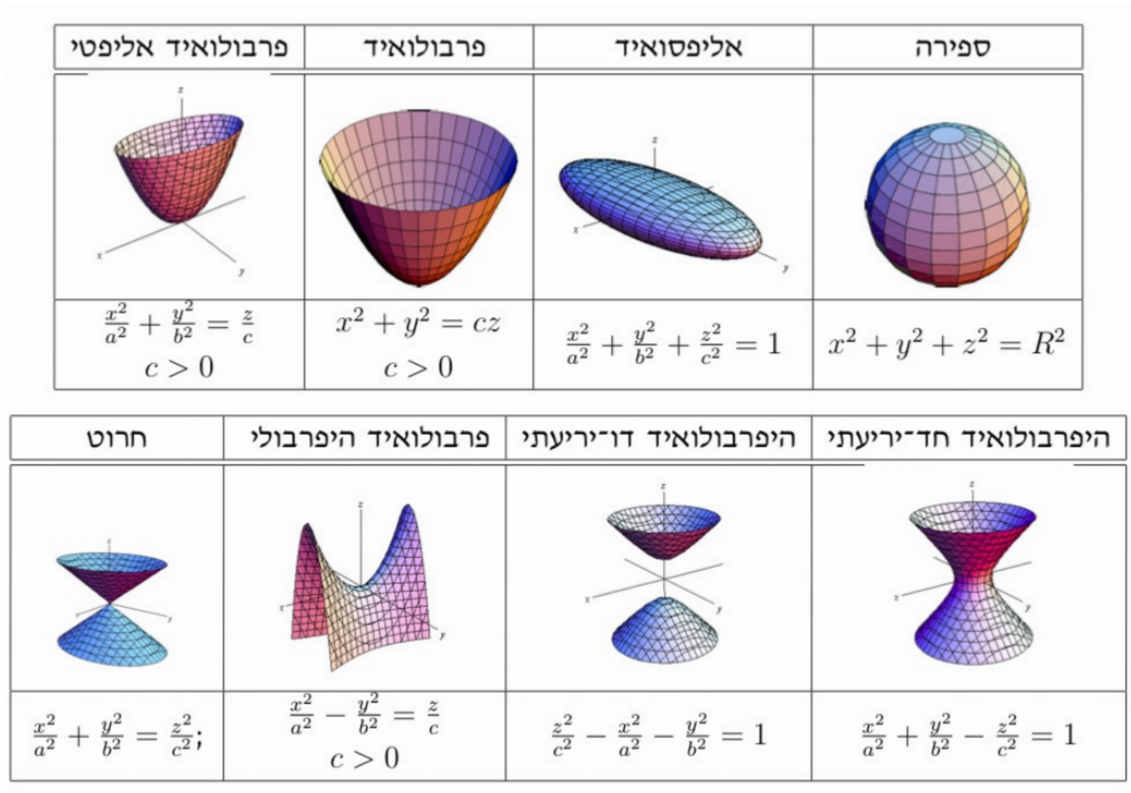
$$y - y_0 = c(x - x_0)^2$$

4. היפרבולה סביב (x_0, y_0), עם ציר a, ופה קצת קשה להסביר את התפקיד של b, אבל הוא מהווה מדד לכמה ההיפרבולה "מעוכה":

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} - \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1$$



אותו משחק נוכל לעשות ב$\mathbb{R}^3$:



תרגיל 4.9.

ציירו את קווי הגובה של "פרבולואיד הפרבולי":

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=\frac{z}{c}, c>0$$

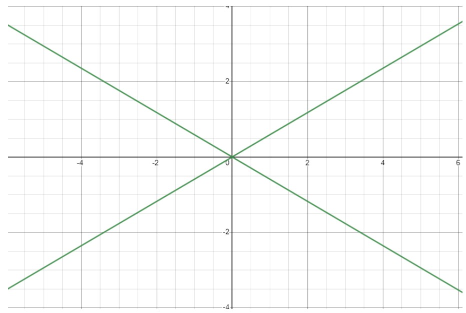
<u>פתרון:</u>

נרצה לקבוע את z, ולקבל קבוצה ב$\mathbb{R}^2$, נחלק ל3 מקרים:

1. אם $z=0$, נקבל את המשוואה:

$$\frac{x^2}{a^2}=\frac{y^2}{b^2} \implies y=\pm\sqrt{\frac{x^2b^2}{a^2}} \implies y=\pm x\left|\frac{a}{b}\right|$$

כלומר זוג ישרים:



2. עבור $z>0$, נקבל:

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=\frac{z}{c}\implies\frac{x^2}{a^2\frac{z}{c}}-\frac{y^2}{b^2\frac{z}{c}}=1\implies\frac{x^2}{\left(a\sqrt{\frac{z}{c}}\right)^2}-\frac{y^2}{\left(b\sqrt{\frac{z}{c}}\right)^2}=1$$

שזה פשוט היפרבולה עם המשתנים:

$$\tilde{a}=a\sqrt{\frac{z}{c}},\tilde{b}=b\sqrt{\frac{z}{c}},$$

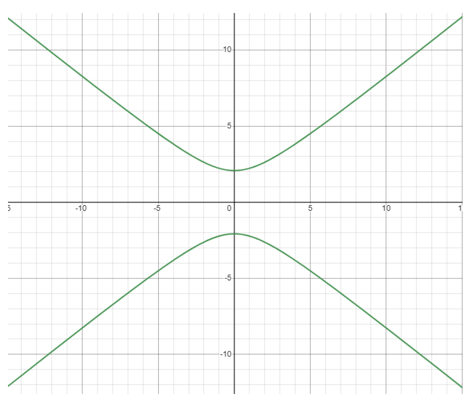
3. אם $z<0$, נוכל לעשות כמעט אותו דבר, חוץ מלהכניס את $\frac{z}{c}$ לשורש, אז נוכל לעשות את הטריק הבא:

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=\frac{z}{c}\implies\frac{x^2}{a^2\frac{(-z)}{c}}-\frac{y^2}{b^2\frac{(-z)}{c}}=-1\implies\frac{x^2}{\left(a\sqrt{\frac{(-z)}{c}}\right)^2}-\frac{y^2}{\left(b\sqrt{\frac{(-z)}{c}}\right)^2}=-1$$

כלומר:

$$\frac{y^2}{\left(b\sqrt{\frac{(-z)}{c}}\right)^2}-\frac{x^2}{\left(a\sqrt{\frac{(-z)}{c}}\right)^2}=1$$

שזאת היפרבולה "הפוכה", כלומר כאשר הפכנו את התפקידים של x,y - והיא תראה כך:



תרגול חמישי

5.1 | מעבר לקואורדינטות פולאריות בחישוב גבולות

תזכורת

אם $f(x,y)$ פונקציה, ואנו רוצים לחשב את הגבול שלה ב$(0,0)$, אז לפעמים נוכל לעבור <u>לקואורדינטות פולאריות</u>:

$$\begin{matrix} x = r\cos(\theta) \\ y = r\sin(\theta) \end{matrix} \iff \begin{matrix} r = \sqrt{x^2+y^2} \\ \theta = \arccos\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) = \arcsin\left(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) \end{matrix}$$

במקרה כזה, אם קיימות פונקציות g, h כך ש:

$$|f(x,y)| = |f(r\cos(\theta), r\sin(\theta))| \leq |g(r)||h(r,\theta)|$$

ומתקיים:

1. $\lim_{r\to 0} g(r) = 0$
2. עבור r חסומה, הפונקציה $h(r,\theta)$ חסומה.

אז $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$.

הערה

מההגדרה נראה כי מעבר לקואורדינטות פולאריות עוזר לנו רק בגבולות מהצורה $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$, אבל כמובן ש:

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} g(x,y) = L \iff \lim_{(x,y)\to(a,b)} g(x,y) - L = 0 \iff \lim_{(x,y)\to(0,0)} g(x+a, y+b) - L = 0$$

אז זאת לא באמת הגבלה לבדיקת גבולות כללים.

תרגיל 5.1.

חשבו את הגבול הבא:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{3xy^2 - 5y^4}{x^2+2y^2}$$

פתרון:
נעבור לקואורדינטות פולאריות:

$$\begin{aligned}\frac{3xy^2-5y^4}{x^2+2y^2} &= \frac{3r^3\cos(\theta)\sin^2(\theta)-5r^4\sin^4(\theta)}{r^2\cos^2(\theta)+2r^2\sin^2(\theta)} \\ &= \frac{r^3(3\cos(\theta)\sin^2(\theta)-5r\sin^4(\theta))}{r^2(1+\sin^2(\theta))} = r\frac{3\cos(\theta)\sin^2(\theta)-5r\sin^4(\theta)}{1+\sin^2\theta}\end{aligned}$$

נשים לב כי:

$$\left|\frac{3\cos(\theta)\sin^2(\theta)-5r\sin^4(\theta)}{1+\sin^2\theta}\right| \leq \left|\frac{3\cos(\theta)\sin^2(\theta)-5r\sin^4(\theta)}{1}\right| \leq |3+5r|$$

וכמובן כי $\lim_{r\to 0}|r|=0$, אז:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{3xy^2-5y^4}{x^2+2y^2}=0$$

תרגיל 5.2.

הוכיחו או הפריכו, אם לכל $\theta_0\in(0,2\pi]$ מתקיים:

$$\lim_{r\to 0} f(r\cos(\theta_0), r\sin(\theta_0))=0$$

אז מתקיים:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=0$$

פתרון:
נפריך עם הפונקציה $f(x,y)=\frac{xy^3}{x^2+y^6}$ והגבול:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{xy^3}{x^2+y^6}$$

ננסה לעבור לקואורדינטות פולאריות:

$$\frac{xy^3}{x^2+y^6}=\frac{r^4\cos(\theta_0)\sin^3(\theta_0)}{r^2\cos^2(\theta_0)+r^6\sin^6(\theta_0)}=r^2\frac{\cos(\theta_0)\sin^3(\theta_0)}{\cos^2(\theta_0)+r^4\sin^6(\theta_0)}$$

נשים לב כי עבור θ_0 כך ש $\cos(\theta_0)=0$ מתקיים:

$$r^2\frac{\cos(\theta_0)\sin^3(\theta_0)}{\cos^2(\theta_0)+r^4\sin^6(\theta_0)}=r^2\frac{0\cdot\sin^3(\theta_0)}{r^4\sin^6(\theta_0)}=0$$

ועבור θ_0 כך ש$\cos(\theta_0) \neq 0$ מתקיים:

$$\left| r^2 \frac{\cos(\theta_0)\sin^3(\theta_0)}{\cos^2(\theta_0) + r^4 \sin^6(\theta_0)} \right| \leq |r^2| \underbrace{\left| \frac{\cos(\theta_0)\sin^3(\theta_0)}{\cos^2(\theta_0)} \right|}_{M(\theta_0)} \xrightarrow{r\to 0} 0$$

משום שלכל θ_0, הביטוי $M(\theta_0)$ קבוע ממשי.
כלומר, לכל θ_0 מתקיים:

$$\lim_{r\to 0} f(r\cos(\theta_0), r\sin(\theta_0)) = 0$$

אבל, נראה שהגבול $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ לא קיים, ואכן במסלול $\gamma_1(t) = (0,t)$, עבור $t \to 0$ נקבל:

$$\lim_{t\to 0} f(\gamma_1(t)) = \lim_{t\to 0} 0 = 0$$

אבל עבור $\gamma_2(t) = (t^3, t)$ עבור $t \to 0$ נקבל:

$$\lim_{t\to 0} f(\gamma_2(t)) = \lim_{t\to 0} \frac{t^6}{t^6+t^6} = \lim_{t\to 0} \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

כלומר הגבול לא קיים.
אז מה קרה פה? הבעיה היא שאם נסמן:

$$f(r\cos(\theta), r\sin(\theta)) = \underbrace{r^2}_{g(r)} \underbrace{\frac{\cos(\theta)\sin^3(\theta)}{\cos^2(\theta) + r^4\sin^6(\theta)}}_{h(r,\theta)}$$

אז $\lim_{r\to 0} g(r) = 0$, מצד שני, $h(r,\theta)$ חסומה על ידי $M(\theta)$ לכל זווית θ, כלומר לכל זווית θ יש לפונקציה $h(r,\theta)$ חסם אחר ואין חסם משותף, כלומר, לא קיים $M \in \mathbb{R}$ כך <u>שלכל</u> זווית θ מתקיים $|h(r,\theta)| \leq M$.

5.2 | נגזרות חלקיות

תזכורת – (נגזרת חלקית)

תהא $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ פונקציה, נגדיר נגזרות חלקיות:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) = f'_x(x_0,y_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h,y_0)-f(x_0,y_0)}{h}$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) = f'_y(x_0,y_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0,y_0+h)-f(x_0,y_0)}{h}$$

הערה

לנגזרת החלקית $\frac{\partial f}{\partial x}$ יש 2 סימנים מקובלים, f_x, או f'_x.

תרגיל 5.3.

עבור הפונקציות הבאות, חשובו את הנגזרות החלקיות:

1. $f(x,y) = x^2 + xy^2$.
2. $f(x,y) = x\ln(xy)$.
3. $f(u,v) = u^2v^3$.

פתרון:

1. עבור $f(x,y) = x^2 + xy^2$ מתקיים:

$$f_x(x,y) = 2x + y^2$$

$$f_y(x,y) = 2xy$$

2. עבור $f(x,y) = x\ln(xy)$, מתקיים:

$$f_x(x,y) = \ln(xy) + x\frac{1}{xy}\cdot y = \ln(xy) + 1$$

$$f_y(x,y) = x\frac{1}{xy}\cdot x = \frac{x}{y}$$

3. עבור $f(u,v) = u^2v^3$ מתקיים:

$$f_u(u,v) = 2uv^3$$

$$f_v(u,v) = 3u^2v^2$$

תרגיל 5.4.

1. תהא $f(x,y) = \frac{xy^2 - x^2 + y}{y^2}$. יהא $y_0 > 0$, מצאו $x \in \mathbb{R}$ עבורו $f(x, y_0)$ נקודות מקסימום מקומית.
2. בדקו האם הגבול $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ קיים.

פתרון:

1. נקבע $y_0 > 0$ ונגדיר $g(x) = f(x, y_0)$, נגזור לפי x:

$$g'(x) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y_0) = \frac{y_0^2 - 2x}{y_0^2}$$

כלומר, לכל $y_0 > 0$, הנקודה:

$$\frac{y_0^2 - 2x}{y_0^2} = 0 \implies y_0^2 - 2x = 0 \implies x = \frac{y_0^2}{2}$$

היא נקודת מקסימום מקומית כי $g''(x) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y_0) = -\frac{2}{y_0^2} < 0$, נחשב את ערך הפונקציה בנקודה זאת:

$$g\left(\frac{y_0^2}{2}\right) = f\left(\frac{y_0^2}{2}, y_0\right) = \frac{\left(\frac{y_0^2}{2}\right) y_0^2 - \left(\frac{y_0^2}{2}\right)^2 + y_0}{y_0^2} = \frac{\frac{y_0^4}{2} - \frac{y_0^4}{4} + y_0}{y_0^2} = \frac{y_0^4 + 4y_0}{4y_0^2} = \frac{1}{4}y_0^2 + \frac{1}{y_0}$$

2. מפה, קל לראות כי הגבול $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ לא קיים כי אם ניקח סדרת נקודות $y_n = \frac{1}{n}$, אז $y_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, אז גם $\left\{\left(\frac{y_n^2}{2}, y_n\right)\right\}_{i\in\mathbb{N}}$ מקיימת $\left(\frac{y_n^2}{2}, y_n\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} (0,0)$ (מדוע?) אבל מתקיים:

$$\lim_{n\to\infty} f\left(\frac{y_n^2}{2}, y_n\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{4}y_n^2 + \frac{1}{y_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{4n^2} + n = \infty$$

ולכן $f(x,y)$ לא רציפה ב$(0,0)$.

תרגיל 5.5.

האם קיימת $f(x,y)$ בעלת נגזרות חלקיות רציפות כך שלכל x, y מתקיים $f_x(x,y) = 1$, $f_y(x,y) = x$?

פתרון:

נניח בשלילה כי קיימת $f(x,y)$ כזאת. יהא $y \in \mathbb{R}$, נסמן $g(x) = f(x,y)$, אז $g'(x) = 1$, ולכן:

$$f(x,y) = g(x) = \int_0^x g'(t)dt + \underbrace{g(0)}_{f(0,y)} = \int_0^x 1dt + f(0,y) = x + f(0,y)$$

נסמן $C(y) = f(0,y)$ קיבלנו כי $f(x,y) = x + f(0,y) = x + C(y)$. נגזור את 2 הצדדים לפי y ונקבל:

$$f_y(x,y) = C'(y)$$

אבל, $C'(y) = f_y(x,y) = x$, אבל C היא פונקציה של y ולא של x, אז לא יכול להיות שהנגזרת שלה פונקציה של x! קיבלנו סתירה, ולכן לא קיימת f המקיימת את תנאי השאלה

הערה

בהמשך הקורס מאוד תעניין אותנו השאלה הזאת, כלומר בהנתן פונקציות $P(x,y), Q(x,y)$ האם קיימת פונקציה $f(x,y)$ המקיימת $f_x(x,y) = P(x,y)$, $f_y(x,y) = Q(x,y)$? בהמשך נפתח כלים כללים ופחות מסורבלים כדאי לענות על השאלה הזאת.

5.3 | דיפרנציאביליות

תזכורת – (דיפרנציאביליות)

נאמר כי $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ גזירה (דיפרנציאבילית) ב(x_0, y_0) אם קיימים קבועים $A, B \in \mathbb{R}$ ופונקציות $\alpha(x,y), \beta(x,y)$ כך שלכל x, y בסביבה של (x_0, y_0) מתקיים:

$$f(x,y) = f(x_0,y_0) + A(x-x_0) + B(y-y_0) + \alpha(x,y)(x-x_0) + \beta(x,y)(y-y_0)$$

כאשר:

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \alpha(x,y) = \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \beta(x,y) = 0$$

או, באופן שקול:

$$f(x,y) = f(x_0,y_0) + A(x-x_0) + B(y-y_0) + \epsilon(x,y)\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}$$

כאשר:

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \epsilon(x,y) = 0$$

במקרה זה (ב2 הניסוחים) בהכרח יתקיים:

$$A = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$$
$$B = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$$

כלומר f דיפרנציאבילית ב(x_0, y_0) אם ורק אם:

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \underbrace{\frac{f(x,y) - \big(f(x_0,y_0) + f'_x(x_0,y_0)(x-x_0) + f'_y(x_0,y_0)(y-y_0)\big)}{\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}}}_{\epsilon(x,y)} = 0$$

ראינו בהרצאה כי:

1. אם $f(x,y)$ גזירה ב(x_0, y_0) אז היא רציפה שם.
2. אם f'_x, f'_y קיימות ורציפות בתחום $D \subset \mathbb{R}^2$, אז f גזירה שם, ונסמן $f \in C^1(D)$.
3. ייתכן כי קיימות f'_x, f'_y ב(x_0, y_0) אך f אינה גזירה, ואפילו לא רציפה ב(x_0, y_0).

תזכורת – (מישור משיק)

מישור שעובר דרך הנקודה (x_0, y_0, z_0), עם נורמל $\vec{N} = \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix}$ הוא הקבוצה:

$$\{(x, y, z) | A(x - x_0) + B(x - x_0) + C(z - z_0) = 0\}$$

בהנתן פונקציה $f(x, y)$, ניתן לשרטט את הגרף שלה, $\Gamma_f = \{(x, y, z) | z = f(x, y)\} \subset \mathbb{R}^3$, ואז אפשר להתבונן בנקודה על הגרף $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ ולהתבונן על <u>המישור המשיק בנקודה הזאת</u> שמוגדר להיות אוסף כל הישרים המשיקים לכל עקומה גזירה המוכלת בגרף הפונקציה, במקרה ומישור זה קיים משוואתו תיהיה:

$$z = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0)$$

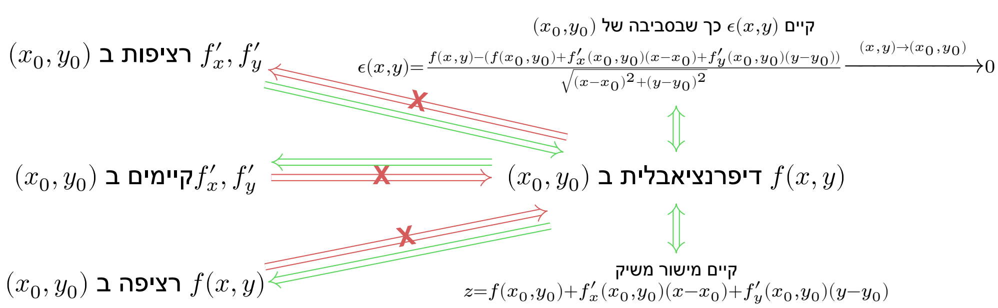
כלומר, המישור עם הנורמל:

$$\vec{N} = \begin{pmatrix} -\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \\ -\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \\ 1 \end{pmatrix}$$

העובר בנקודה $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$.

בהרצאה ראינו כי $f(x, y)$ גזירה בנקודה (x_0, y_0) אם ורק אם המישור אשר את משוואתו כתבנו מעלה משיק לגרף הפונקציה בנקודה $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$.

לסיכום:



תרגיל 5.6.

תהא $f(x,y)=x^2+y^2$.

1. הוכיחו כי f דיפרנציאבילית בכל $(x,y)\in\mathbb{R}^2$.
2. מצאו את המישור המשיק לגרף ש f בנקודה $(1,1)$.
3. יהיו המסליות $\gamma_1(t)=(t,t)$, $\gamma_2(t)=(t,1)$, כולן ב $t=1$ מקיימות $\gamma_1(1)=\gamma_2(1)=(1,1)$. לכל $i=1,2$ סמנו $\Gamma_i(t)=(\gamma_i(t),f(\gamma_i(t)))$, ובדקו כי אכן הישר המשיק לעקום Γ_i ב$t=1$ נמצא במישור המשיק שמצאתם בסעיף ב', כלומר כי לכל $s\in\mathbb{R}$,

$$\Gamma_i(1)+s\Gamma_i'(1)$$

במישור המשיק.

פתרון:

1. נשים לב כי $f_x(x,y)=2x, f_y(x,y)=2y$, שתיהן רציפות בכל $\mathbb{R}^2$, ולכן f דיפרנציאבילית.
2. אנו יודעים כי קיים מישור משיק כי f דיפרנציאבילית. משוואת הישיר המשיק הוא

$$\begin{aligned} z &= f(x_0,y_0)+\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0)+\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)(y-y_0) \\ &= f(1,1)+\frac{\partial f}{\partial x}(1,1)(x-1)+\frac{\partial f}{\partial y}(1,1)(y-1) \\ &= 2+2(x-1)+2(y-1)=2+2x-2+2y-2=2x+2y-2 \end{aligned}$$

כלומר, $2x+2y-z=2$.

3. עבור γ_1 מתקיים:

$$\Gamma_1(t)=(t,t,f(t,t))=(t,t,2t^2) \implies \Gamma_1'(t)=(1,1,4t) \implies \Gamma_1'(1)=(1,1,4)$$

ובאמת לכל $s\in\mathbb{R}$ הישר $\begin{pmatrix}1+s\\1+s\\2+4s\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}1\\1\\4\end{pmatrix}$ מקיים:

$$2x+2y-z=2(1+s)+2(1+s)-(2+4s)=2+2s+2+2s-2-4s=2$$

באותו אופן עבור Γ_2:

$$\Gamma_2(t)=(t,1,f(t,1))=(t,1,1+t^2) \implies \Gamma_2'(t)=(1,0,2t) \implies \Gamma_2'(1)=(1,0,2)$$

אז הישר שלנו הוא $\begin{pmatrix}1+s\\1\\2+2s\end{pmatrix}$, ובאמת לכל $s\in\mathbb{R}$:

$$2(1+s)+2-(2+2s)=2$$

תרגיל 5.7.

עבור המשטחים הבאים, מצאו את המישור המשיק בנקודה המצוינת:

1. $\ln(xyz) = 0, P = \left(1, 2, \frac{1}{2}\right)$.
2. $\frac{2x+y}{x+2y+z} = 1, P = (1, 0, 0)$.

פתרון:

1. נביא את המשטח לצורה $z = f(x, y)$:

$$\ln(xyz) = 0 \implies xyz = 1 \underset{x,y\neq 0}{\implies} z = \frac{1}{xy} = f(x, y)$$

נחשב את $f'_x(P), f'_y(P)$, ואכן:

$$f'_x = -\frac{1}{yx^2}, f'_y = -\frac{1}{xy^2}$$

אז המישור המשיק הוא:

$$z = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0)$$

$$z = f(1, 2) + \frac{\partial f}{\partial x}(1, 2)(x - 1) + \frac{\partial f}{\partial y}(1, 2)(y - 2)$$
$$z = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}(x - 1) - \frac{1}{4}(y - 2)$$

2. נביא את המשטח לצורה $z = f(x, y)$.

$$\frac{2x + y}{x + 2y + z} = 1 \underset{x+2y+z\neq 0}{\implies} 2x + y = x + 2y + z \implies z = x - y$$

המשטח הוא כבר מישור, כלומר המישור המשיק הוא המשטח עצמו.

תרגיל 5.8.

תהא $f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$.

1. האם $f(x, y)$ רציפה ב $(0, 0)$?
2. האם קיימות $f'_x(0, 0), f'_y(0, 0)$?

פתרון:

1. יהא $a \in \mathbb{R}$, נגדיר $\gamma_a(t) = (at, t)$, ונבדוק את:

$$\lim_{t \to 0} f(\gamma_a(t)) = \frac{at^2}{(1+a^2)t^2} = \frac{a}{1+a^2}$$

בפרט עבור $a = 0, a = 1$ נקבל גבולות שונים, כלומר $f(x,y)$ אינה רציפה ב$(0,0)$.

2. נחשב עפ"י הגדרה:

$$f'_x(0,0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = 0$$

$$f'_y(0,0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(0,h) - f(0,0)}{h} = 0$$

תרגיל 5.9.

בתרגיל זה נראה כי דיפרנציאביליות אינה גוררת רציפות של הנגזרות החלקיות:
תהא:

$$f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)\sin\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

הוכיחו כי $f(x,y)$ דיפרנציאבילית, אבל $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$ אינן רציפות ב$(0,0)$.

פתרון:
נוכיח דיפרנציאביליות:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h^2 \sin\left(\frac{1}{\sqrt{h^2}}\right)}{h} = 0$$

ובאותה צורה $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$.

כלומר, f דיפרנציאבילית ב$(0,0)$ אם $0 \xrightarrow{(x,y)\to(0,0)} \epsilon(x,y)$ עבור:

$$\epsilon(x,y) = \frac{f(x,y) - f(0,0) - \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)(x) - \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{f(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

אז:

$$|\epsilon(x,y)| \leq \left|(x^2+y^2)\sin\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right| = \left|\sqrt{x^2+y^2}\sin\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)\right| \xrightarrow{(x,y)\to(0,0)} 0$$

כלומר $f(x,y)$ דיפרנציאבילית ב$(0,0)$.

נחשב את $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ ב$(x,y)\neq(0,0)$:

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= 2x\sin\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)+(x^2+y^2)\cos\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)\frac{-\frac{2x}{2\sqrt{x^2+y^2}}}{\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^2}\\ &= 2x\sin\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)-\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\cos\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)\end{aligned}$$

נראה כי $\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ לא קיים (ובפרט לא שווה ל$0=\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$), ואכן, עבור המסילה $\gamma(t)=(t,0)$ עבור $t\in[0,1]$ (שימו לב כי $t>0$), עבור כאשר $\gamma(0)=0$ נקבל:

$$\lim_{t\to0}f(\gamma(t))=\lim_{t\to0}t\sin\left(\frac{1}{|t|}\right)-\frac{t}{|t|}\cos\left(\frac{1}{|t|}\right)=\lim_{t\to0}t\sin\left(\frac{1}{t}\right)-\cos\left(\frac{1}{t}\right)$$

והגבול הזה לא קיים.

תרגול שישי

6.1 | כלל השרשרת

תזכורת – (כלל השרשרת)

תהא $f(x,y)$ פונקציה סקלרית גזירה.

1. יהיו $\xi,\eta:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ פונקציות גזירות. נסמן $G(t)=f(\xi(t),\eta(t))$, אז:

$$G'(t)=\frac{\partial}{\partial t}f(\xi(t),\eta(t))=\frac{\partial f}{\partial \xi}(\xi(t),\eta(t))\frac{\partial \xi}{\partial t}(t)+\frac{\partial f}{\partial \eta}(\xi(t),\eta(t))\frac{\partial \eta}{\partial t}(t)$$

או בכתיב מקוצר (כלומר, כאשר אנו לא מציינים באיזו נקודות אנו גוזרים) מתקיים:

$$\frac{\partial f}{\partial t}=\frac{\partial f}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial t}+\frac{\partial f}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial t}$$

2. במקרה ש ξ,η פונקציות (דיפרנציאביליות) של 2 משתנים, $\xi(u,v),\eta(u,v)$, אם נסמן

$$G(u,v)=f(\xi(u,v),\eta(u,v))$$

אז:

$$G_u(u,v)=\frac{\partial}{\partial u}f(\xi(u,v),\eta(u,v))=\frac{\partial f}{\partial \xi}(\xi(u,v),\eta(u,v))\frac{\partial \xi}{\partial u}(u,v)+\frac{\partial f}{\partial \eta}(\xi(u,v),\eta(u,v))\frac{\partial \eta}{\partial u}(u,v)$$

$$G_v(u,v)=\frac{\partial}{\partial v}f(\xi(u,v),\eta(u,v))=\frac{\partial f}{\partial \xi}(\xi(u,v),\eta(u,v))\frac{\partial \xi}{\partial v}(u,v)+\frac{\partial f}{\partial \eta}(\xi(u,v),\eta(u,v))\frac{\partial \eta}{\partial v}(u,v)$$

או בכתיב מקוצר:

$$\frac{\partial f}{\partial u}=\frac{\partial f}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial u}+\frac{\partial f}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial u}$$

$$\frac{\partial f}{\partial v}=\frac{\partial f}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial v}+\frac{\partial f}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial v}$$

הערה

לפעמים נסמן את ξ,η על ידי x,y ואז זה קצת מבלבל, אבל הכוונה לx,y כפונקציות של t, כמו בתרגיל הבא.

הערה

העשרה:
המשוואות הללו מגיעות מכפל מטריצות, אם נתונות לנו:

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \qquad \Phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \qquad \Phi(u,v) = (\xi(u,v), \eta(u,v))$$

ונגדיר: $G(u,v) = f(\Phi(u,v))$ אז כלל השרשרת בעצם אומר כי:

$$\begin{pmatrix} G_u \\ G_v \end{pmatrix} = \nabla G = J_\Phi \cdot \nabla f = \begin{pmatrix} \xi_u & \eta_u \\ \xi_v & \eta_v \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_x \\ f_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi_u f_x + \eta_u f_y \\ \xi_v f_x + \eta_v f_y \end{pmatrix}$$

כאשר $J_\Phi = \begin{pmatrix} \xi_u & \eta_u \\ \xi_v & \eta_v \end{pmatrix}$ היא מטריצת היעקוביאן של Φ - שהיא מטריצה שנלמד עליה עוד בהמשך הקורס.

תרגיל 6.1.

1. תהא $f(x,y) = e^{2x-y}$, $x(t) = \sin(t), y(t) = t^4$, חשבו את $\frac{\partial f}{\partial t}$.
2. תהא $g(x,y) = x^2 + xy + y^2$, עבור קואורדינטות פולריות, $\begin{cases} x = r\cos(\theta) \\ y = r\sin(\theta) \end{cases}$
חשבו את $\frac{\partial g}{\partial \theta}, \frac{\partial g}{\partial r}$.

<u>פתרון:</u>

1. נפתור את התרגיל הזה בשתי דרכים שונות, עם כלל השרשרת ובעזרת חישוב ישיר. נתחיל עם כלל השרשרת:

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \underbrace{\frac{\partial f}{\partial x}}_{2e^{2x-y}} \underbrace{\frac{\partial x}{\partial t}}_{\cos(t)} + \underbrace{\frac{\partial f}{\partial y}}_{-e^{2x-y}} \underbrace{\frac{\partial y}{\partial t}}_{4t^3} = 2e^{2\sin(t)-t^4}\cos(t) - e^{2\sin(t)-t^4} 4t^3 = e^{2\sin(t)-t^4}\left(2\cos(t) - 4t^3\right)$$

מצד שני, החישוב הישיר נותן לנו:

$$f(x(t), y(t)) = e^{2\sin(t)-t^4} \implies \frac{\partial f}{\partial t} = e^{2\sin(t)-t^4}(2\cos(t) - 4t^3)$$

2. נשתמש בכלל השרשרת:

$$\begin{aligned}\frac{\partial g}{\partial r} &= \frac{\partial g}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial g}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r} = (2x+y)\big|_{\substack{x=r\cos(\theta) \\ y=r\sin(\theta)}} \cos(\theta) + (2y+x)\big|_{\substack{x=r\cos(\theta) \\ y=r\sin(\theta)}} \sin(\theta) \\ &= (2r\cos(\theta) + r\sin(\theta))\cos(\theta) + (2r\sin(\theta) + r\cos(\theta))\sin(\theta) \\ &= r(2\cos^2(\theta) + \cos(\theta)\sin(\theta) + 2\sin^2(\theta) + \cos(\theta)\sin(\theta)) = 2r(1 + \cos(\theta)\sin(\theta))\end{aligned}$$

$$\frac{\partial g}{\partial \theta}=\frac{\partial g}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \theta}+\frac{\partial g}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \theta}=(2x+y)\left.\right|_{\substack{x=r\sin(\theta)\\ y=r\sin(\theta)}}(-r\sin(\theta))+(2y+x)\left.\right|_{\substack{x=r\sin(\theta)\\ y=r\sin(\theta)}}(r\cos(\theta))$$
$$=(2r\cos(\theta)+r\sin(\theta))((-r\sin(\theta)))+(2r\sin(\theta)+r\cos(\theta))(r\cos(\theta))$$
$$=r^2(-2\cos(\theta)\sin(\theta)-\sin^2(\theta)+2\sin(\theta)\cos(\theta)+\cos^2(\theta))=r^2(\cos^2(\theta)-\sin^2(\theta))$$

תרגיל 6.2.

תהא $f(x,y)$ גזירה, נגדיר:

$$g(u,v)=f(3u-v,u^2+v)$$

בהינתן:

$$f'_x(7,3)=1, f'_y(7,3)=2$$

חשבו את:

$$\left.\frac{\partial g}{\partial u}\right|_{(u,v)=(2,-1)}, \left.\frac{\partial g}{\partial v}\right|_{(u,v)=(2,-1)}$$

פתרון:

נשים לב כי אם נסמן $x(u,v)=3u-v, y(u,v)=u^2+v$, אז x,y גזירות, ולכן ניתן להשתמש בכלל השרשרת:

$$\left.\frac{\partial g}{\partial u}\right|_{(u,v)=(2,-1)}=\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(x,y)=(x(2,-1),y(2,-1))}\left.\frac{\partial x}{\partial u}\right|_{(u,v)=(2,-1)}+\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(x,y)=(x(2,-1),y(2,-1))}\left.\frac{\partial y}{\partial u}\right|_{(u,v)=(2,-1)}$$

נחשב:

$$x(2,-1)=3(2)-(-1)=7, y(2,-1)=2^2-1=3$$
$$\left.\frac{\partial x}{\partial u}\right|_{(u,v)=(2,-1)}=3, \left.\frac{\partial y}{\partial u}\right|_{(u,v)=(2,-1)}=2u=4$$

אז:

$$\left.\frac{\partial g}{\partial u}\right|_{(u,v)=(2,-1)}=f'_x(7,3)\cdot 3+f'_y(7,3)\cdot 4=3+4\cdot 2=11$$

אותו דבר נעשה עבור $\left.\frac{\partial g}{\partial v}\right|_{(u,v)=(2,-1)}$:

$$\left.\frac{\partial g}{\partial v}\right|_{(u,v)=(2,-1)}=\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(x,y)=(x(2,-1),y(2,-1))}\left.\frac{\partial x}{\partial v}\right|_{(u,v)=(2,-1)}+\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(x,y)=(x(2,-1),y(2,-1))}\left.\frac{\partial y}{\partial v}\right|_{(u,v)=(2,-1)}$$
$$=f'_x(7,3)\cdot(-1)+f'_y(7,3)\cdot 1=-1+2=1$$

6.2 | נגזרת כיוונית וגרדיאנט

תזכורת – (נגזרת כיוונית)

תהא $f(x,y): D\subset\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, וווקטור $\hat{n}=(n_1,n_2)\in\mathbb{R}^2$, אז נגדיר:

$$\frac{\partial f}{\partial\hat{n}}(x_0,y_0)=\lim_{h\to0}\frac{f(x_0+hn_1,y_0+hn_2)-f(x_0,y_0)}{h}$$

זהו השיפוע של גרף הפונקציה f, בנקודה (x_0,y_0) בכיוון $\hat{n}$.

נשים לב כי אם $\hat{n}=(1,0)$, אז $\frac{\partial f}{\partial\hat{n}}=f_x$, ואם $\hat{w}=(0,1)$ אז $\frac{\partial f}{\partial\hat{w}}=f_y$.

אם $f(x,y)$ דיפרנציאבילית ב(x_0,y_0), אז קיימת לה נגזרת כיוונית בכל כיוון $\vec{v}$ ב(x_0,y_0).

תזכורת – (גרדיאנט)

אם $f(x,y)$ דיפרנציאבילית ב(x_0,y_0) אז לכל $\hat{n}=(n_1,n_2)\in\mathbb{R}^2$ מתקיים:

$$\frac{\partial f}{\partial\hat{n}}(x_0,y_0)=\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)n_1+\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)n_2$$

אם נגדיר את הגרדיאנט של f להיות הווקטור $\nabla f(x_0,y_0)=\begin{pmatrix}\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\\ \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\end{pmatrix}$ ונזכר במכפלה סקלרית:

$$\left\langle\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\gamma\\ \delta\end{pmatrix}\right\rangle=\alpha\gamma+\beta\delta$$

אז נוכל לכתוב:

$$\frac{\partial f}{\partial\hat{n}}(x,y)=\langle\nabla f(x,y),\hat{n}\rangle$$

נזכור גם כי $\langle\vec{v},\vec{w}\rangle$ מקסימלי כאשר $\vec{v},\vec{w}$ וקטורים מקבילים, כלומר $\frac{\partial f}{\partial\hat{n}}=\langle\nabla f,\hat{n}\rangle$ מקסימלי כאשר $\nabla f,\hat{n}$ מצביעים באותו כיוון, כלומר ∇f, כווקטור, מצביע בכיוון הגידול המקסימלי של f.

תרגיל 6.3.

תהא $f(x,y)=e^x\sin(y)$, חשבו את $\frac{\partial f}{\partial\hat{n}}(3,4)$ עבור $\hat{n}=\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

פתרון:

נוכיח קודם כל שהפונקציה- $f(x,y)$ דיפ' בנקודה-$(3,4)$ דרך רציפות נגזרות החלקיות שלה:

$$f_x(3,4)=e^x\sin(y)|_{(x,y)=(3,4)}=e^3\sin(4)$$
$$f_y(3,4)=e^x\cos(y)|_{(x,y)=(3,4)}=e^3\cos(4)$$

אז ע"י הגדרדיאנט $\nabla f(3,4)$, מקבלים:

$$\frac{\partial f}{\partial \hat{n}}(3,4)=\left\langle \begin{pmatrix} e^3\sin(4) \\ e^3\cos(4)\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix}\right\rangle=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(e^3\sin(4)+e^3\cos(4)\right)$$

תרגיל 6.4.

תהא $f(x,y)=\begin{cases}\frac{x^2y}{x^4+y^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$, לכל $\hat{n}$ וקטור יחידה, חשבו את $\frac{\partial f}{\partial \hat{n}}(0,0)$.

פתרון:

ראשית נרצה לבדוק האם f דיפרנציאבילית ב$(0,0)$, נראה שהיא אפילו לא רציפה, ובאמת 2 המסילות

$$\gamma_1(t)=(t,0),\gamma_2(t)=\left(\sqrt{t},t\right)$$

רציפות, ומקיימות $\gamma_1(0)=\gamma_2(0)=(0,0)$, אבל מתקיים:

$$\lim_{t\to0}f(\gamma_1(t))=\lim_{t\to0}0=0$$

$$\lim_{t\to0}f(\gamma_2(t))=\lim_{t\to0}\frac{t^2}{2t^2}=\frac{1}{2}\neq0$$

לכן אי אפשר להשתמש במשפט הגרדיאנט. נחשב ישירות את $\frac{\partial f}{\partial \hat{n}}(0,0)$ (ונופתע לגלות שהוא בכלל מוגדר לכל $\hat{n}$!).

כל וקטור יחידה $\hat{n}$ הוא מהצורה $\hat{n}=(\cos(\theta),\sin(\theta))$ עבור $\theta\in[0,2\pi)$ כלשהי. נחשב לפי הגדרה:

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial \hat{n}}(0,0)&=\lim_{h\to0}\frac{f(h\cos\theta,h\sin\theta)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{f(h\cos\theta,h\sin\theta)}{h}\\&=\lim_{h\to0}\frac{h^3\cos^2\theta\sin\theta}{h(h^4\cos^4\theta+h^2\sin^2\theta)}=\lim_{h\to0}\frac{\cos^2\theta\sin\theta}{h^2\cos^4\theta+\sin^2\theta}\end{aligned}$$

נפצל למקרים.

1. אם $\sin\theta=0$, כלומר $\theta=0$ או $\theta=\pi$, אז:

$$\frac{\partial f}{\partial \hat{n}}(0,0)=\lim_{h\to0}\frac{\cos^2\theta\sin\theta}{h^2\cos^4\theta+\sin^2\theta}=0$$

2. אם $\sin\theta\neq0$, אז:

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial \hat{n}}(0,0)&=\lim_{h\to0}\frac{\cos^2\theta\sin\theta}{h^2\cos^4\theta+\sin^2\theta}\\&=\lim_{h\to0}\frac{\cos^2\theta}{h^2\frac{\cos^4\theta}{\sin(\theta)}+\sin\theta}=\frac{\cos^2(\theta)}{\sin(\theta)}\end{aligned}$$

הערה

התרגיל הזה מראה לנו שזה שהנגזרת הכיוונית קיימת לכל כיוון לא גורר כי f דיפרנציאבילית (ואפילו לא רציפה!).

תרגיל 6.5.

זו שאלה ממבחן.

1. תהא $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ פונקציה זוגית וגזירה ב0 כך ש $g'(0)=0$, נגדיר $f(x,y)=g\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)$, הוכיחו כי f דיפרנציאבילית ב$(0,0)$.
2. תהא $f(x,y)=\cos\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)$, חשבו את $\frac{\partial f}{\partial \hat{n}}(0,0)$ עבור $\hat{n}=\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

פתרון:

1. נתחיל בחישוב $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0),\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$, לפי הגדרה:

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) &= \lim_{h\to 0}\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{g(\sqrt{h^2})-g(0)}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{g(|h|)-g(0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{g(h)-g(0)}{h} = g'(0)=0\end{aligned}$$

חישוב דומה יראה לנו כי $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=0$.

עפ"י הגדרה, f דיפרנציאבילית ב$(0,0)$ אם $\epsilon(x,y)\xrightarrow{(x,y)\to(0,0)}0$ עבור:

$$\epsilon(x,y)=\frac{f(x,y)-f(0,0)-\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)x-\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)y}{\sqrt{x^2+y^2}}=\frac{f(x,y)-f(0,0)}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

נעבור לקואורדינטות פולאריות:

$$\begin{aligned}\lim_{(x,y)\to(0,0)}\epsilon(x,y) &= \lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{f(x,y)-f(0,0)}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{g\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)-g(0)}{\sqrt{x^2+y^2}}\\ &= \lim_{r\to 0^+}\frac{g(r)-g(0)}{r} = g'(0)=0\end{aligned}$$

כלומר, $f(x,y)$ דיפרנציאבילית ב$(0,0)$.

2. הפונקציה $g(t)=\cos(t)$ זוגית וגזירה ומקיימת $g'(0)=-\sin(0)=0$, אז לפי החישוב שנעשה בסעיף א' מתקיים כי $\nabla f(0,0)=(0,0)$, ולכן, היות ו f דיפרנציאבילית (לפי הסעיף הקודם), מתקיים כי לכל $\hat{n}$, $\frac{\partial f}{\partial \hat{n}}=0$.

6.3 משפט הפונקציה הסתומה

רעיון

פונקציה סתומה היא פונקציה מהצורה $F(x,y)=0$. במקרים רבים יותר נוח לנו לעבוד עם פונקציה מהצורה $y=f(x)$, כלומר "לחלץ" את המשתנה y, דוגמה נהדרת לכך היא הפונקציה הסתומה:

$$x^2+y^2-1=0$$

בנקודות בהן $y>0$ אפשר לכתוב:

$$y=\sqrt{1-x^2}$$

ובנקודות בהן $y<0$:

$$y=-\sqrt{1-x^2}$$

אבל יש לנו 2 נקודות, $(1,0),(-1,0)$ המקיימות $F(1,0)=F(-1,0)=0$ סביבן לא נצליח לכתוב את $y=f(x)$.

משפט הפונקציה הסתומה נותן לנו 2 דברים:

1. מתי אפשר "לחלץ" פונקציה סתומה $F(x,y)=0$ ל $y=f(x)$.
2. אם אפשר "לחלץ" אז מה $f'(x)$?

שימו לב שהמשפט לא נותן לנו את $f(x)$!

תזכורת – (משפט הפונקציה הסתומה ל2 משתנים)

$$f(x)=y \iff F(x,y)=0$$

ננסח את המשפט עבור פונקציה ב2 משתנים:

תהא פונקציה סתומה $F(x,y)=0$. (x_0,y_0) כך ש $F(x_0,y_0)=0$. אם מתקיים כי:

1. בסביבה של (x_0,y_0), F_x,F_y רציפות.
2. $F_y(x_0,y_0)\neq 0$

אז קיימת פונקציה יחידה $y=f(x)$ המוגדרת בסביבה של (x_0,y_0) כך ש:

$$y=f(x) \iff F(x,y)=0$$

ומתקיים:

$$\frac{\partial y}{\partial x}=f'(x)=-\frac{F'_x(x,f(x))}{F'_y(x,f(x))}=-\frac{F'_x(x,y)}{F'_y(x,y)}$$

תזכורת – (משפט הפונקציה הסתומה ל3 משתנים)

תהא פונקציה סתומה:

$$F(x, y, z) = 0$$

נחפש $z = f(x, y)$ כך ש:

$$z = f(x, y) \iff F(x, y, f(x, y)) = 0$$

אז בהנתן (x_0, y_0, z_0) כך ש $F(x_0, y_0, z_0) = 0$, אם קיימת סביבה בה:

1. F_x, F_y, F_z רציפות.
2. $F_z(x_0, y_0, z_0) \neq 0$

אז קיימת פונקציה יחידה $z = f(x, y)$ המקיימת כי בסביבה של (x_0, y_0):

$$z = f(x, y) \iff F(x, y, f(x, y)) = 0$$

ומתקיים:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = -\frac{F'_x(x, y, f(x, y))}{F'_z(x, y, f(x, y))}$$
$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = -\frac{F'_y(x, y, f(x, y))}{F'_z(x, y, f(x, y))}$$

תרגיל 6.6.

הראו כי עבור המשוואה $1 + x + y = \cos(xy)$ ניתן לבודד את y כפונקציה של x בסביבה של הנקודה $(0, 0)$ ומצאו את $y'(0)$.

<u>פתרון:</u>

נעבור תחילה להצגה סתומה של הפונקציה:

$$F(x, y) = 1 + x + y - \cos(xy) = 0$$

יש לנו 3 דברים לבדוק עבור $F(x, y)$:

1. $F(0, 0) = 1 - \cos(0) = 0$.
2. $F_x = 1 + y\sin(xy), F_y = 1 + x\sin(xy)$ רציפות.
3. $F_y(0, 0) = 1 \neq 0$.

אז לפי משפט הפונקציה הסתומה, ניתן לכתוב את y כפונקציה של x סביב $(0, 0)$, ומתקיים:

$$y'(0) = -\frac{F_x(x, y)}{F_y(x, y)} = -\frac{1 + y\sin(xy)}{1 + x\sin(xy)}$$

תרגיל 6.7.

חשבו את $\frac{\partial y}{\partial x}$ בסביבה של $x=1, y=0$ עבור:

$$x^2y^4 = \sin(xy)$$

פתרון:
נשים לב כי את הפונקציה הסתומה אפשר לכתוב בצורה:

$$F(x,y) = x^2y^4 - \sin(xy) = 0$$

נבדוק שמתקיימים תנאי משפט הפונקציה הסתומה:

1. $F(1,0)=0$.
2. $F'_x = 2xy^4 - y\cos(xy), F'_y = 4x^2y^3 - x\cos(xy)$ רציפות בכל $\mathbb{R}^2$.
3. $F'_y(1,0) = 0 - \cos(0) = -1 \neq 0$.

אז לפי משפט הפונקציה הסתומה, ניתן לחלץ את x כפונקציה של y בסביבה של $(1,0)$, בה גם מתקיים:

$$\frac{\partial y}{\partial x} = -\frac{F_x}{F_y} = -\frac{2xy^4 - y\cos(xy)}{4x^2y^3 - x\cos(xy)}$$

תרגיל 6.8.

תהא $\cos(x)+\sin(y)=\tan(z)$, מצאו את $\frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial z}{\partial x}$ בסביבה של הנקודה $\left(\frac{\pi}{2},0,0\right)$.

פתרון:
נשתמש במשפט הפונקציה הסתומה עבור $F(x,y,z) = \cos(x)+\sin(y)-\tan(z)$. נבדוק את תנאי המשפט.

1. $F\left(\frac{\pi}{2},0,0\right)=0$.
2. $\frac{\partial F}{\partial x} = -\sin(x), \frac{\partial F}{\partial y} = \cos(y), \frac{\partial F}{\partial z} = \frac{1}{\cos^2(z)}$ כולן רציפות סביב $\left(\frac{\pi}{2},0,0\right)$.
3. $\frac{\partial F}{\partial z}\left(\frac{\pi}{2},0,0\right) = \frac{1}{\cos^2(z)} = \frac{1}{\cos^2(0)} = 1 \neq 0$

אז קיימת $z=f(x,y)$ בסביבה של $\left(\frac{\pi}{2},0,0\right)$, והיא מקיימת:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = f'_x(x,y) = -\frac{F_x}{F_z} = -\frac{-\sin(x)}{\frac{1}{\cos^2(z)}} = \frac{\sin(x)}{\cos^2(z)}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = f'_y(x,y) = -\frac{F_y}{F_z} = -\frac{\cos(y)}{\frac{1}{\cos^2(z)}} = -\cos(y)\cos^2(z)$$

תרגיל 6.9.

זה תרגיל ממבחן.
הראו שקיימת פונקציה $z = z(x,y)$ המקיימת את המשוואה $x^2 + y^2 + z^3 + z = 1$, והראו כי הפונקציה $G(x,y) = e^{x^2+y^2} + e^{z(x,y)}$ מקיימת $yG_x = xG_y$.

פתרון:
נגדיר $F(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^3 + z - 1 = 0$. ונראה כי סביב כל נקודה המקיימת $F(x,y,z) = 0$ מתקיימים תנאי משפט הפונקציה הסתומה.

1. F_x, F_y, F_z רציפות כפולינומים.
2. $F_z(x,y,z) = 3z^2 + 1 \neq 0$ (לכל x,y,z!).

אז אנו יודעים כי סביב כל (x,y,z) המקיימות $F(x,y,z) = 0$ קיימת $z = f(x,y)$ ומתקיים:

$$z_x = -\frac{F_x}{F_z} = -\frac{2x}{3z^2+1}, \qquad z_y = -\frac{F_y}{F_z} = -\frac{2y}{3z^2+1}$$

נציב $G(x,y,z) = e^{x^2+y^2} + e^{z(x,y)}$ ונגזור:

$$G_x = e^{x^2+y^2}(2x) + e^{z(x,y)}(z_x) = 2xe^{x^2+y^2} + \left(-\frac{2x}{3z^2+1}\right)e^{z(x,y)}$$

ובאופן דומה:

$$G_y = e^{x^2+y^2}(2y) + e^{z(x,y)}(z_y) = 2ye^{x^2+y^2} + \left(-\frac{2y}{3z^2+1}\right)e^{z(x,y)}$$

ובדיקה ישירה תראה לנו כי:

$$yG_x = xG_y = 2xye^{x^2+y^2} - e^z\frac{2yx}{3z^2+1}$$

6.4 | חישוב מישור משיק לפונקציה סתומה

תזכורת

תהא $F(x,y,z)$ פונקציה גזירה ברציפות בסביבת (x_0,y_0,z_0) כך שמתקיים:

1. $F(x_0,y_0,z_0)=0$.
2. $\nabla F(x_0,y_0,z_0)\neq\vec{0}$.

אז למשטח רמה $F(x,y,z)=0$, קיים מישור משיק ב(x_0,y_0,z_0) כך שמשוואתו:

$$\left\langle \nabla F(x_0,y_0,z_0), \begin{pmatrix} x-x_0 \\ y-y_0 \\ z-z_0 \end{pmatrix} \right\rangle = 0$$

כלומר:

$$F_x'(x_0,y_0,z_0)(x-x_0)+F_y'(x_0,y_0,z_0)(y-y_0)+F_z'(x_0,y_0,z_0)(z-z_0)=0$$

אותה תוצאה אפשר לראות גם עבור פונקציה סתומה ב2 משתנים $G(x,y)$, כלומר:
תהא $G(x,y)$ פונקציה גזירה ברציפות בסביבה של (x_0,y_0), כך שמתקיים:

1. $G(x_0,y_0)=0$.
2. $\nabla G(x_0,y_0)\neq\vec{0}$.

אז לקו גובה $G(x,y)=0$ קיים מישור משיק ב(x_0,y_0) ומשוואתו:

$$\left\langle \nabla G(x_0,y_0), \begin{pmatrix} x-x_0 \\ y-y_0 \end{pmatrix} \right\rangle = 0$$

כלומר:

$$G_x'(x_0,y_0)(x-x_0)+G_y'(x_0,y_0)(y-y_0)=0$$

רעיון

הנה הרעיון, נניח והיה אפשר לחלץ $z=f(x,y)$, אז אנו יודעים כי משוואת המשיור המשיק הינה:

$$z=f(x_0,y_0)+\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0)+\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)(y-y_0)$$

אבל $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)=-\frac{F_x}{F_z}$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)=-\frac{F_y}{F_z}$, כלומר:

$$z=z_0-\frac{F_x}{F_z}(x-x_0)-\frac{F_y}{F_z}(y-y_0)$$

או:

$$F_z(z-z_0)+F_x(x-x_0)+F_y(y-y_0)=0$$

אם אי אפשר לחלץ את $z=f(x,y)$ (אם למשל $F_z=0$) אז אם מחלצים את $y=g(x,z)$ או $x=h(y,z)$ אז נקבל את אותה משוואה, לכן אנו דורשים $\nabla F\neq\vec{0}$, ששקול לכך ש $(F_x,F_y,F_z)\neq(0,0,0)$, כלומר אחד מהשלושה F_x,F_y,F_z שונה מאפס.

תרגיל 6.10.

נתונה משוואה סתומה:

$$F\left(x,y,z\right)=z^2-e^{x^2+y^2}+\left(x+y\right)\sin z=0$$

1. הראו כי קיימת פונקציה $z\left(x,y\right)$ המקיימת את המשוואה בסביבה של הנקודה $(0,0,1)$, וחשבו את $z_x\left(0,0\right),z_y\left(0,0\right)$.
2. חשבו את משוואת המישור המשיק למשטח הנתון על ידי המשוואה הזו בנקודה $(0,0,1)$, ואת ישר הנורמל למישור המשיק בנקודה זו בצורה פרמטרית.

פתרון:

1. ראשית, נשים לב כי $F(0,0,1)=1-e^0=0$, שנית, נחשב את הנגזרות החלקיות של F:

$$F_x=-2xe^{x^2+y^2}+\sin z,\quad F_y=-2ye^{x^2+y^2}+\sin z,\quad F_z=2z+(x+y)\cos z$$

ובאמת, כל הנגזרות החלקיות רציפות ומתקיים $F_z\left(0,0,1\right)=2\neq0$ ולכן ניתן להשתמש במשפט הפונקציה הסתומה ולקבל:

$$\begin{aligned}z_x\left(0,0\right)&=\left[-\frac{F_x}{F_z}\right]_{(0,0)}&=-\frac{0+\sin(1)}{2}=-\frac{1}{2}\sin(1)\\ z_y\left(0,0\right)&=\left[-\frac{F_y}{F_z}\right]_{(0,0)}&=-\frac{0+\sin(1)}{2}=-\frac{1}{2}\sin(1)\end{aligned}$$

2. ולכן, עפ"י משפט הווקטור הנורמלי למישור המשיק בנקודה הנ"ל נתון על ידי

$$\begin{aligned}\vec{N}=\left(F_x,F_y,F_z\right)&=\left(-2xe^{x^2+y^2}+\sin z,-2ye^{x^2+y^2}+\sin z,2z+(x+y)\cos z\right)\\&=(0+\sin(1),0+\sin(1),2+0)=(\sin(1),\sin(1),2)\end{aligned}$$

ולכן המישור המשיק נתון על ידי המשוואה:

$$0=\left\langle\vec{N},(x-0,y-0,z-1)\right\rangle=\sin(1)\left(x-0\right)+\sin(1)\left(y-0\right)+2\left(z-1\right)$$

כלומר:

$$\sin(1)x+\sin(1)y+2z=2$$

ישר הנורמל נתון על ידי לקיחת הנקודה $p=(0,0,1)$ והוספת כפולה של הווקטור $\vec{N}$:

$$\begin{aligned}p+t\vec{N}&=(0,0,1)+(t\sin(1),t\sin(1),2t)\\&=(t\sin(1),t\sin(1),2t+1)\end{aligned}$$

תרגול שביעי

7.1 | נגזרות מסדר גבוה

תזכורת – (נגזרות מסדר גבוה)

תהא $f(x,y)$ פונקציה סקלרית בשני משתנים, נוכל להתבונן בנגזרות החלקיות השניות של f:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) &:= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f''_{xx} \\
\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) &:= \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = f''_{yy} \\
\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) &:= \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = f''_{yx} \\
\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) &:= \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = f''_{xy}
\end{aligned}$$

וכן הלאה עבור נגזרות חלקיות מסדר שלישי, רביעי וכו'.

הערה

שימו לב כי בסימונים השונים, סדר המשתנים שבהם אנו גוזרים שונה!

$$f_{xyz} = \left(\left(f_x\right)_y\right)_z = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\right) = \frac{\partial^3 f}{\partial z \partial y \partial x}$$

תזכורת – (סימטריה של נגזרות שניות - משפט אוילר-שוורץ-קלרו)

תהא $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, ותהא $(x_0,y_0) \in D$. אם f_{xy}, f_{yx} פונקציות רציפות בסביבה של (x_0,y_0) אז:

$$f_{xy}(x_0,y_0) = f_{yx}(x_0,y_0)$$

תרגיל 7.1.

תהא $f(x,y) = x^2y^{13}$, חשבו את f_x, f_y, f_{xy}, f_{yx}.

פתרון:

נחשב ישירות:

$$f_x(x,y) = 2xy^{13}, \qquad f_y(x,y) = x^2 \cdot 13y^{12}$$
$$f_{xy}(x,y) = \left(2xy^{13}\right)_y = 26xy^{12}, \qquad f_{yx} = 26xy^{12}$$

תרגיל 7.2.

תהא $f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy^3-yx^3}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$ חשבו את $f_x(x,y), f_y(x,y)$ עבור $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, וחשבו את $f_{xy}(0,0), f_{yx}(0,0)$.

פתרון:

נתחיל מ $f_x(x,y)$, ונפצל למקרים.

- אם $(x,y) \neq (0,0)$ נקבל:

$$f_x(x,y) = \frac{\left(y^3 - 3yx^2\right)\left(x^2+y^2\right) - 2x\left(xy^3 - yx^3\right)}{\left(x^2+y^2\right)^2} = \frac{y^5 - 4x^2y^3 - x^4y}{\left(x^2+y^2\right)^2}$$

$$f_y(x,y) = \frac{\left(3xy^2 - x^3\right)\left(x^2+y^2\right) - 2y\left(xy^3 - yx^3\right)}{\left(x^2+y^2\right)^2} = \frac{-x^5 + 4x^3y^2 + xy^4}{\left(x^2+y^2\right)^2}$$

- עבור $(x,y) = (0,0)$ נחשב לפי הגדרה,

$$f_x(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0}{h} = 0$$

$$f_y(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0,h) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0}{h} = 0$$

- נחשב את $f_{xy}(0,0)$ לפי הגדרה:

$$f_{xy}(0,0) = \left(f_x(x,y)\right)_y |_{(x,y)=(0,0)} = \lim_{h\to 0} \frac{f_x(h,0) - f_x(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f_x(0,h) - f_x(0,0)}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{\frac{h^5}{h^4}}{h} = 1$$

- נחשב את $f_{yx}(0,0)$ לפי הגדרה:

$$f_{yx}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f_y(h,0) - f_y(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{-h^5}{h}}{h} = -1$$

תרגיל 7.3.

1. תהא $g:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$, אשר נסמן $g(x,y)=\begin{pmatrix}P(x,y)\\Q(x,y)\end{pmatrix}$ הוכיחו כי אם קיימת $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ גזירה פעמיים ברציפות כך ש $g(x,y)=\nabla f(x,y)$, כלומר:

$$g(x,y)=\nabla f(x,y)=\begin{pmatrix}\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\\\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}P(x,y)\\Q(x,y)\end{pmatrix}$$

אז $P_y=Q_x$.

2. האם קיימת פונקציה $f(x,y)$ כך ש $\nabla f(x,y)=\begin{pmatrix}-y\\x\end{pmatrix}$?

פתרון:

1. היות ו f גזירה ברציפות מתקיים:

$$P_y=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 f}{\partial yx}=\frac{\partial^2 f}{\partial xy}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)=Q_x$$

2. ראינו כי $P_y=Q_x$ הוא תנאי הכרחי לקיום f כזו, נבדוק:

$$P_y=-1,\qquad Q_x=1$$

וכמובן $-1\neq 1$.

הערה

בהמשך הקורס נראה שזהו גם תנאי מספיק! כלומר שאם $P_y=Q_x$, אז קיימת f כך ש $g=\nabla f$.

תרגיל 7.4.

יהיו $a,b\in\mathbb{R}$, ותהא $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ פונקציה גזירה פעמיים ברציפות, נתון שלכל $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ מתקיים:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=3x+ay^2$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=bxy+2y$$

וכי $\frac{\partial f}{\partial y}(1,1)=3$ מצאו את a,b.

פתרון:
נתון כי f גזירה פעמיים ברציפות, ולכן מתקיים:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y).$$

כלומר:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(bxy + 2y\right) = by$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(3x + ay^2\right) = 2ay$$

כלומר $by = 2ay$, ולכן $b = 2a$. בנוסף, נתון כי $3 = \frac{\partial f}{\partial y}(1,1) = b + 2$, ולכן $b = 1, a = \frac{1}{2}$.

תרגיל 7.5.

תהא $f(x,y)$ פונקציה גזירה פעמיים ב2 משתנים, כך שלכל x,y מתקיים $f_{xx}(x,y) + f_{yy}(x,y) = 0$.
נסמן $g(x,y) = f(2xy, x^2 - y^2)$, הוכיחו כי לכל x,y מתקיים $g_{xx}(x,y) + g_{yy}(x,y) = 0$.

פתרון:
נשתמש בכלל השרשרת, נסמן $u = 2xy, v = x^2 - y^2$, אז:

$$g_x(x,y) = f_x(u(x,y), v(x,y)) \cdot u_x(x,y) + f_y(u(x,y), v(x,y)) \cdot v_x(x,y)$$

ולכן:

$$\begin{aligned} g_{xx}(x,y) &= \frac{\partial}{\partial x}\big(f_x(u(x,y),v(x,y)) \cdot u_x(x,y) + f_y(u(x,y),v(x,y)) \cdot v_x(x,y)\big) \\ &= u_x(x,y) \cdot \big(f_{xx}(u(x,y),v(x,y)) \cdot u_x(x,y) + f_{xy}(u(x,y),v(x,y)) \cdot v_x(x,y)\big) \\ &+ \cancelto{0}{u_{xx}(x,y)} \cdot f_x(u(x,y),v(x,y)) \\ &+ v_x(x,y)\left(f_{yx}(u(x,y),v(x,y))u_x(x,y) + f_{yy}(u(x,y),v(x,y))v_x(x,y)\right) \\ &+ v_{xx}(x,y) f_y(u(x,y),v(x,y)) \end{aligned}$$

נציב:

$$\begin{aligned} g_{xx}(x,y) &= (2y) \cdot \big(f_{xx}(u(x,y),v(x,y)) \cdot (2y) + f_{xy}(u(x,y),v(x,y)) \cdot (2x)\big) \\ &+ (2x)\left(f_{yx}(u(x,y),v(x,y))(2y) + f_{yy}(u(x,y),v(x,y))(2x)\right) \\ &+ 2f_y(u(x,y),v(x,y)) \end{aligned}$$

נשתמש בכך ש f גזירה פעמיים ברציפות. בכתיב מקוצר עוד יותר $f = f(u,v)$ וכדומה, בעצם:

$$g_{xx} = 4y^2 f_{xx} + 8xy f_{xy} + 4x^2 f_{yy} + 2f_y$$

באותו אופן נחשב את $g_{yy}(x,y)$ (הפעם, נכתוב בכתיב מקוצר, $u=u(x,y), v=v(x,y)$):

$$g_y(x,y) = f_x(u,v)u_y(x,y) + f_y(u,v)v_y(x,y)$$

$$\begin{aligned} g_{yy}(x,y) = &\left(f_{xx}(u,v)u_y + f_{xy}(v_y)\right)u_y + \cancelto{0}{u_{yy}} \cdot f_x(u,v) \\ &+ \left(f_{yx}(u,v)u_y + f_{yy}(u,v)v_y\right)v_y + f_y(u,v)v_{yy} \end{aligned}$$

נציב:

$$\begin{aligned} g_{yy}(x,y) = &\left(f_{xx}(u,v)(2x) + f_{xy}(-2y)\right)(2x) \\ &+ \left(f_{yx}(u,v)(2x) + f_{yy}(u,v)(-2y)\right)(-2y) - 2f_y(u,v) \end{aligned}$$

כלומר:

$$g_{yy} = 4x^2 f_{xx} - 8xyf_{xy} + 4y^2 f_{yy} - 2f_y$$

סה"כ:

$$\begin{aligned} g_{xx} + g_{yy} &= 4y^2 f_{xx} + 8xyf_{xy} + 4x^2 f_{yy} + 2f_y + 4x^2 f_{xx} - 8xyf_{xy} + 4y^2 f_{yy} - 2f_y \\ &= 4x^2(f_{xx} + f_{yy}) + 4y^2(f_{xx} + f_{yy}) \\ &= 0 \end{aligned}$$

7.2 | פולינום טיילור לפונקציה ב2 משתנים

תזכורת – (פולינום טיילור)

תהא $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ פונקציה סקלרית, ב2 משתנים, אשר גזירה $n+1$ פעמים ברציפות בסביבה של נקודה $(x_0, y_0) \in D$.

פולינום טיילור של f סביב (x_0, y_0) מסדר n הוא הפולינום:

$$T_n(x,y) = \sum_{l=0}^{n} \left(\frac{1}{l!} \sum_{k=0}^{l} \binom{l}{k} f_{x^k y^{l-k}}(x_0, y_0)(x-x_0)^k (y-y_0)^{l-k} \right)$$

אינטואיטיבית, הוא הפולינום ב2 משתנים ממעלה n המקרב את f בצורה הטובה ביותר - בדומה לפולינום טיילור במשתנה יחיד.
למשל, עבור $n=1$ מתקיים:

$$T_1(x,y) = f(x_0,y_0) + f_x(x_0,y_0)(x-x_0) + f_y(x_0,y_0)(y-y_0)$$

עבור $n=2$ מתקיים:

$$\begin{aligned} T_2(x,y) = {} & f(x_0,y_0) + f_x(x_0,y_0)(x-x_0) + f_y(x_0,y_0)(y-y_0) \\ & + \frac{1}{2}\left(f_{xx}(x_0,y_0)(x-x_0)^2 + 2f_{xy}(x_0,y_0)(x-x_0)(y-y_0) + f_{yy}(x_0,y_0)(y-y_0)^2 \right) \end{aligned}$$

אפשר לסמן את שארית טיילור $R_n(x,y) = f(x,y) - T_n(x,y)$. ראינו בהרצאה משפטי חסימת שארית, בדומה למשתנה יחיד, אך לא נתרגל אותם בתרגול.

הערה

נשים לב כי $z = T_1(x,y)$ הוא פשוט המישור המשיק!

הערה

הביטוי $\binom{n}{k}$ הוא הבינום של ניוטון:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)}{k \cdot (k-1) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1}$$

תרגיל 7.6.

תהא $f : \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x,y > 0\} \to \mathbb{R}$, המוגדרת על ידי $f(x,y) = x^y$. פתחו את f לטור טיילור מסדר שני סביב הנקודה $(1,1)$.

פתרון:
נתחיל בחישוב הנגזרות החלקיות של f:

$$f_x = yx^{y-1}, \qquad f_y = x^y \ln x$$

$$f_{xx} = y\left(y-1\right)x^{y-2}, \qquad f_{yy} = x^y\left(\ln x\right)^2$$

$$f_{xy} = x^{y-1} + yx^{y-1}\ln x, \qquad f_{yx} = yx^{y-1}\ln x + x^y \cdot \frac{1}{x} = f_{yx}$$

נחשב את ערכי הנגזרות בנקודה $(1,1)$:

$$f_x\left(1,1\right) = 1, \qquad f_y\left(1,1\right) = 0, \qquad f_{xx}\left(1,1\right) = 0$$

$$f_{yy}\left(1,1\right) = 0, \qquad f_{xy}\left(1,1\right) = 1, \qquad f_{yx}\left(1,1\right) = 1$$

כלומר:

$$\begin{aligned} T_2(x,y) &= f(x_0,y_0) + f_x(x_0,y_0)(x-x_0) + f_y(x_0,y_0)(y-y_0) \\ &+ \frac{1}{2}\left(f_{xx}(x_0,y_0)(x-x_0)^2 + 2f_{xy}(x_0,y_0)(x-x_0)(y-y_0) + f_{yy}(x_0,y_0)(y-y_0)^2\right) \\ &= 1 + 1\left(x-1\right) + \frac{1}{2}\left(2\left(x-1\right)\left(y-1\right)\right) \\ &= x + (x-1)(y-1) \end{aligned}$$

תרגיל 7.7.

תהי פונקציה $F\left(x,y\right)$ בעלת נגזרות חלקיות רציפות עד סדר 3. נתון פיתוח הטיילור שלה סביב הנקודה $(3,6)$:

$$\begin{aligned} F\left(x,y\right) &= 1 + 9\cdot\left(x-3\right) + 3\cdot\left(y-6\right) - 2\cdot\left(x-3\right)^2 + \left(x-3\right)\left(y-6\right) \\ &- 3\cdot\left(y-6\right)^2 + R_2\left(x,y\right) \end{aligned}$$

נתונה המשוואה הסתומה $F\left(x,y\right) = 1$. הראו שניתן לחלץ את y כפונקציה של x, וחשבו את $y''\left(3\right), y'\left(3\right)$.

פתרון:
ראשית, נראה איזה מידע אנו יכולים לחלץ מפולינום הטיילור הנתון. אנו יודעים כי המקדם החופשי מקיים:

$$F(3,6) = 1$$

בצורה דומה:

$$F_x(3,6)(x-3) + F_y(3,6)(y-6) = 9(x-3) + 3(y-6) \Rightarrow F_x(3,6) = 9, \quad F_y(3,6) = 3$$

וגם כי:

$$\frac{1}{2}\left(F_{xx}(3,6)(x-3)^2 + 2F_{xy}(3,6)(x-3)(y-6) + F_{yy}(3,6)(y-6)^2\right)$$

שווה ל:

$$-2\,(x-3)^2+(x-3)\,(y-6)\;-3\cdot(y-6)^2$$

סה"כ:

$$\begin{array}{ll} F(3,6)=1 & F_{xx}(3,6)=-4 \\ F_x(3,6)=9\;\;, & F_{xy}(3,6)=1 \\ F_y(3,6)=3 & F_{yy}(3,6)=-6 \end{array}$$

עכשיו נפעיל את משפט הפונקציה הסתומה. נבדוק את התנאים.

1. $F(3,6)=1$.
2. $F_y(3,6)\neq 0$.
3. נתון כי f גזירה פעמיים ברציפות.

אז משפט הפונקציה הסתומה אומר כי ניתן לחלץ את y כפונקציה של x בסביבה של $(3,6)$. בסביבה של $(3,6)$ מתקיים:

$$y'(x)=-\frac{F_x(x,y(x))}{F_y(x,y(x))}$$

בפרט,

$$y'(3)=-\frac{F_x(3,6)}{F_y(3,6)}=-\frac{9}{3}=-3$$

נחשב את הנגזרת השנייה בעזרת כלל השרשרת:

$$\begin{aligned} y''(x) &= \frac{\partial}{\partial x}y'(x)=\frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{F_x(x,y(x))}{F_y(x,y(x))}\right) \\ &= -\frac{\frac{\partial}{\partial x}F_x(x,y(x))F_y(x,y(x))-\frac{\partial}{\partial x}F_y(x,y(x))F_x(x,y(x))}{F_y(x,y(x))^2} \\ &= -\frac{(F_{xx}(x,y(x))\frac{\partial x}{\partial x}+F_{xy}(x,y(x))\frac{\partial y}{\partial x})F_y(x,y(x))}{F_y(x,y(x))^2} \\ &+\frac{\left(F_{xy}(x,y(x))\frac{\partial x}{\partial x}+F_{yy}(x,y(x))\frac{\partial y}{\partial x}\right)F_x(x,y(x))}{F_y(x,y(x))^2} \\ &= -\frac{\left(F_{xx}+y'F_{xy}\right)F_y-\left(F_{xy}+F_{yy}y'\right)F_x}{F_y^2} \end{aligned}$$

אנחנו יכולים להציב פה $(x,y)=(3,6)$, ולקבל את התשובה (כי אנו יודעים את הערך ש $(y'(3)$, אבל אם

הגענו עד פה, אז בואו נציב $y'=-\frac{F_x}{F_y}$ ונקבל נוסחא כללית:

$$\begin{aligned}
y''(x) &= -\frac{\left(F_{xx}+y'F_{xy}\right)F_y-\left(F_{xy}+F_{yy}y'\right)F_x}{F_y^2}\\
&= -\frac{\left(F_{xx}-\frac{F_x}{F_y}F_{xy}\right)F_y-\left(F_{xy}-F_{yy}\frac{F_x}{F_y}\right)F_x}{F_y^2}\\
&= -\frac{\left(F_{xx}-\frac{F_x}{F_y}F_{xy}\right)F_y^2-\left(F_{xy}-F_{yy}\frac{F_x}{F_y}\right)F_xF_y}{F_y^3}\\
&= -\frac{F_{xx}F_y^2-F_xF_yF_{xy}-F_xF_yF_{xy}+F_{yy}F_x^2}{F_y^3}\\
&= \frac{2F_xF_yF_{xy}-F_{xx}F_y^2-F_{yy}F_x^2}{F_y^3}
\end{aligned}$$

אז:

$$y''(3)=\frac{2\cdot 9\cdot 3\cdot 1-(-4)\cdot 3^2-(-6)\,9^2}{3^3}$$

הערה

נשים לב כי השוויון:

$$y''(x)=\frac{2F_xF_yF_{xy}-F_{xx}F_y^2-F_{yy}F_x^2}{F_y^3}$$

נותן לנו עוד תוצאה שעד עכשיו לא ידענו, שאם F גזירה ברציפות פעמיים, אז איפה ש $y=y(x)$ מוגדר, (שם, בין היתר $F_y(x,y(x))\neq 0$), אנו מקבלים כי $y(x)$ גם גזירה פעמיים ברציפות.

7.3 | נקודות קיצון של פונקציות בשני משתנים

תזכורת

תהי $f(x,y)$ פונקציה המוגדרת בתחום D. נאמר כי הנקודה (x_0,y_0) היא:

- **מינימום מקומי** של f, אם קיימת סביבה של הנקודה (x_0,y_0), עבורה מתקיים $f(x_0,y_0) \le f(x,y)$.
- **מקסימום מקומי** של f, אם קיימת סביבה של הנקודה (x_0,y_0), עבורה מתקיים $f(x_0,y_0) \ge f(x,y)$.

על פי משפט פרמה, אם (x_0,y_0) נקודת פנים של D, f_x, f_y מוגדרות ב(x_0,y_0), אז $\nabla f(x_0,y_0)=0$, נגדיר נקודה קריטית (או נקודה חשודה לקיצון) להיות נקודה פנים של התחום D בה $\nabla f=0$, או שלפחות אחת מהנגזרות החלקיות f_x, f_y אינה קיימת בה.

- נקרא ל (x_0,y_0) **נקודת אוכף** של f, אם $\nabla f(x_0,y_0)=0$ ובכל סביבה של הנקודה (x_0,y_0), קיימות (x,y) עבורן $f(x_0,y_0) \le f(x,y)$, וקיימות (x,y) עבורן $f(x_0,y_0) \ge f(x,y)$.

תרגיל 7.8.

מצאו את החשודות לקיצון של הפונקציה $f(x,y)=x\sqrt{y-1}-2x$ בתחום הגדרתה.

פתרון:
נחשב את הנגזרות החלקיות

$$f_x = \sqrt{y-1}-2$$
$$f_y = \frac{x}{2\sqrt{y-1}}$$

זאת אומרת שכאשר $y=1$ הנגזרת החלקית לפי y אינה מוגדרת (למרות שזה אכן בתחום ההגדרה של f).
בנוסף, נבדוק התאפסות:

$$f_x = \sqrt{y-1}-2 = 0$$
$$f_y = \frac{x}{2\sqrt{y-1}} = 0$$

מהמשוואה השנייה נקבל $x=0$ ומהראשונה נקבל $\sqrt{y-1}=2 \Leftarrow y-1=4 \Leftarrow y=5$. סך הכול קיבלנו שהחשודות לקיצון הן כל הנקודות מהצורה $(x,1)$ והנקודה הבודדת $(0,5)$.

תרגיל 7.9.

מצאו קיצון מוחלט לפונקציה:

$$f(x,y)=x^2-2xy+2y^2-4y$$

פתרון:

ראשית, נמצא את החשודות לקיצון. נגזור את הפונקציה ונקבל:

$$\begin{aligned} f_x =& 2x - 2y \\ f_y =& -2x + 4y - 4 \end{aligned}$$

הנגזרות החלקיות מוגדרות בכל המישור, אז נבדוק מתי הן מתאפסות:

$$\begin{aligned} 2x - 2y =& 0 \\ -2x + 4y - 4 =& 0 \end{aligned}$$

מהמשוואה הראשונה לקבל ש-$x = y$, אז נציב במשוואה השנייה ונקבל

$$\begin{aligned} -2x + 4x - 4 =& 0 \\ 2x =& 4 \\ x =& 2 \end{aligned}$$

ולכן הנקודה הקריטית היחידה היא $(2,2)$.

שימו לב - זה לא אומר כלום עדיין! אנחנו נוכיח ידנית שזוהי אכן נקודת קיצון (מוחלטת) של הפונקציה. כלומר, ננסה להוכיח שבה מתקבל הערך הקטן ביותר של הפונקציה, באמצעות השלמה לריבוע. נשים לב כי

$$\begin{aligned} f(x,y) =& x^2 - 2xy + 2y^2 - 4y \\ =& x^2 - 2xy + y^2 + y^2 - 4y + 4 - 4 \\ =& (x-y)^2 + (y-2)^2 - 4 \geq -4 \end{aligned}$$

ועבור $x = y = 2$ נקבל את הערך -4 $f(2,2) = (2-2)^2 + (2-2)^2 - 4 = -4$. הוכחנו שלכל נקודה, ערך הפונקציה גדול או שווה ל--4, אך בנקודה $(2,2)$ מתקבל הערך -4. כעת נותר להראות שלכל נקודה אחרת מתקבל ערך גדול מ--4. נשים לב ששוויון מתקיים אמ"ם שני הריבועים במשוואה מתאפסים, כלומר

$$x = y, \qquad y = 2$$

כלומר הנקודה היחידה שבה מתקבל הערך המינימלי היא $(2,2)$ ולכן זהו מינימום מוחלט.
התבוננות בפונקציה תראה לנו כי אין לה נקודת מקסימום מוחלטת, היות והיא לא חסומה.

הערה

בדרך כלל לא נוכל לעשות טריק כזה, ולכן נזדקק לכלים מורכבים יותר על מנת לסווג נקודות קיצון.

תרגיל 7.10.

בהינתן פונקציה $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ גזירה בכל הישר, נגדיר את הסיבוב שלה סביב ציר ה-z להיות פונקציה $g(x,y) = f\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)$. הראו שאם $f'(a) = 0$ עבור $a \in \mathbb{R}$, אז כל נקודה (x,y) המקיימת

$x^2+y^2=a^2$ היא נקודה קריטית של g.

פתרון:
נגזור באמצעות כלל השרשרת ונקבל:

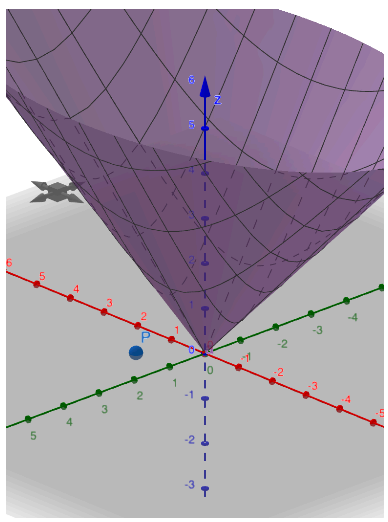
$$\nabla g=\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}f'\left(\sqrt{x^2+y^2}\right),\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}f'\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)\right)$$

כעת, אם $a\neq 0$ אז אכן מתקיים $\nabla g\left(x,y\right)=\left(\frac{x}{a}f'\left(a\right),\frac{y}{a}f'\left(a\right)\right)=\left(0,0\right)$, ואם $a=0$ אז ∇g אינה מוגדרת. בשני המקרים קיבלנו שמדובר בנקודה קריטית של g.

תרגיל 7.11.

מהי הנקודה הקרובה ביותר בין $z=\sqrt{x^2+3y^2}$ לבין $P=(1,1,0)$.

פתרון:
ראשית, נשרטט את הבעיה לראות במה מדובר:



המרחק בין נקודה בגרף ו־P הוא:

$$D(x,y)=d\left(P,\begin{pmatrix}x\\y\\\sqrt{x^2+3y^2}\end{pmatrix}\right)=\sqrt{(1-x)^2+(1-y)^2+(\sqrt{x^2+3y^2})^2}$$

נשים לב כי מינימום של D יהיה גם מינימום של $K=D^2$, ויהיה יותר נוח לעבוד בלי שורש, אז:

$$\begin{aligned}K(x,y)&:=D(x,y)^2=(1-x)^2+(1-y)^2+x^2+3y^2=1-2x+x^2+1-2y+y^2+x^2+3y^2\\&=2-2x-2y+2x^2+4y^2\end{aligned}$$

נגזור:

$$\nabla K(x,y) = \begin{pmatrix} 4x-2 \\ 8y-2 \end{pmatrix} = 0 \iff \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

מחקירת הבעיה, אנו מיד יודעים כי מדובר בנקודת מינימום, אז:

$$z = \sqrt{x^2+3y^2} = \sqrt{\frac{1}{4}+\frac{3}{16}} = \frac{\sqrt{7}}{4}$$

ולכן הנקודה הינה:

$$\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{\sqrt{7}}{4}\right)$$

תרגיל 7.12.

1. תהא $f(x,y) : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ פונקציה אי-שלילית, כלומר, לכל $(x,y) \in D, f(x,y) \geq 0$. נסמן $g(x,y) = (f(x,y))^2$. הוכיחו כי (x_0,y_0) נקודת קיצון מקומית של $f(x,y)$ אם ורק אם היא נקודת קיצון מקומית (מאותו סוג) של $g(x,y)$. בנוסף הוכיחו כי (x_0,y_0) נקודת קיצון גלובלית של $f(x,y)$ אם ורק אם היא נקודת קיצון גלובלית של $g(x,y)$.
2. האם הטענה הקודמת נכונה עבור $f(x,y)$ שאינה אי-שלילית?

<u>**פתרון:**</u>

1. **הערה**

   נוכיח רק עבור נקודת מינימום, המקרה של נקודת מקסימום זהה לחלוטין.

נניח כי (x_0,y_0) נקודת מינימום מקומית של f, נסמן $f(x_0,y_0) = c$, אז קיימת סביבה D_1 של (x_0,y_0) כך ש:

$$\forall (x,y) \in D_1 \implies 0 \leq f(x,y) \leq f(x_0,y_0)$$

ובגלל שהכל חיובי זה גורר:

$$\forall (x,y) \in D_1, 0 \leq (f(x,y))^2 \leq (f(x_0,y_0))^2$$

כלומר (x_0,y_0) נקודת מינימום מקומית של $(f(x,y))^2$.
הכיוון השני דומה מאוד, אם (x_0,y_0) מינימום מקומית של $g(x,y)$, אז קיימת סביבה D_2 בה:

$$\forall (x,y) \in D_2, 0 \leq g(x,y) \leq g(x_0,y_0)$$

אבל בגלל שהכל חיובי:

$$\forall (x,y) \in D_2, 0 \leq \underbrace{\sqrt{g(x,y)}}_{f(x,y)} \leq \underbrace{\sqrt{g(x_0,y_0)}}_{f(x_0,y_0)}$$

כלומר (x_0, y_0) מינימום מקומית של $f(x, y)$.
עבור מינימום גלובלי ההוכחה מאוד דומה, ומושארת כתרגיל.

2. הטענה לא נכונה, למשל עבור $f(x, y) = x$, אין לה נקודות קיצון ב-$\mathbb{R}^2$, אבל ל-$(f(x, y))^2 = x^2$ יש נקודת מינימום גלובלי ב-$(0, 0)$ (ולמעשה בכל $(0, y)$).

7.4 | מיון נקודות קריטיות בעזרת מטריצת הסיאן

תזכורת – (מטריצת הסיאן של פונקציה עם 2 משתנים)

תהא $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ פונקציה בעלת נ"ח רציפות מסדר שני, ותהא $(x, y) \in D$. נגדיר את מטריצת הסיאן של f בנקודה (x, y) להיות:

$$H_f(x, y) = \begin{pmatrix} f_{xx}(x, y) & f_{xy}(x, y) \\ f_{yx}(x, y) & f_{yy}(x, y) \end{pmatrix}$$

ראינו בהרצאה כי אם $(x_0, y_0) \in D$ מקיימת $\nabla f(x_0, y_0) = 0$, אז אפשר לסווג את סוג הנקודה בעזרת מטריצת הסיאן:

1. אם $\det(H_f(x_0, y_0)) > 0$, וגם $f_{xx}(x_0, y_0) > 0$, אז (x_0, y_0) מינימום מקומי.
2. אם $\det(H_f(x_0, y_0)) > 0$, וגם $f_{xx}(x_0, y_0) < 0$, אז (x_0, y_0) מקסימום מקומי.
3. אם $\det(H_f(x_0, y_0)) < 0$, אז (x_0, y_0) נקודת אוכף.
4. אם $\det(H_f(x_0, y_0)) = 0$, אז לא ניתן לקבוע את סוג הנקודה בעזרת מטריצת הסיאן.

בנסוף, ראינו טענה שקולה:
אנו ידועים כי H_f סימטרית, ולכן לכסינה, אז יש לה 2 ע"ע, שנסמן λ_1, λ_2, אז:

1. אם $\lambda_1, \lambda_2 > 0$ אז (x_0, y_0) נקודת מינימום מקומית.
2. אם $\lambda_1, \lambda_2 < 0$ אז (x_0, y_0) נקודת מקסימום מקומית.
3. אם $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 < 0$ (או להפך) אז (x_0, y_0) נקודת אוכף.
4. אם אחד הע"ע שווה לאפס, אז לא ניתן לקבוע את סוג נקודות הקיצון בעזרת מבחן ההסיאן.

הערה

נשים לב כי נראה שחסר פה המקרה בו $f_{xx} = 0$ וגם $\det(H_f) > 0$. אבל מקרה זה לא יכול להתקיים משום שהיות ו-f בעלת נ"ח רציפות מסדר שני, אז $f_{xy} = f_{yx}$, נסמן $f_{xy} = \lambda$, אז אם $f_{xx} = 0$, אז:

$$\det(H_f(x, y)) = \det \begin{pmatrix} 0 & \lambda \\ \lambda & f_{yy} \end{pmatrix} = -\lambda^2 \leq 0$$

רעיון

נזכר בקירוב טיילור מסדר שני בנקודה $(x_0, y_0) = (0,0)$:

$$\begin{aligned} T_2(x,y) &= f(x_0,y_0) + f_x(x_0,y_0)(x-x_0) + f_y(x_0,y_0)(y-y_0) \\ &+ \frac{1}{2}\left(f_{xx}(x_0,y_0)(x-x_0)^2 + 2f_{xy}(x_0,y_0)(x-x_0)(y-y_0) + f_{yy}(x_0,y_0)(y-y_0)^2\right) \\ &= f(0,0) + f_x(0,0)x + f_y(0,0)y \\ &+ \frac{1}{2}\left(f_{xx}(0,0)x^2 + 2f_{xy}(0,0)xy + f_{yy}(0,0)y^2\right) \\ &= f(0,0) + \left\langle \nabla f(0,0), \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right\rangle + \frac{1}{2}\left\langle \underbrace{\begin{pmatrix} f_{xx}(0,0) & f_{xy}(0,0) \\ f_{yx}(0,0) & f_{yy}(0,0) \end{pmatrix}}_{H_f(0,0)} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right\rangle \end{aligned}$$

נניח בה"כ כי $f(0,0) = 0$, ונניח כי $(0,0)$ נקודה קריטית, כלומר $\nabla f(0,0) = 0$, אז:

$$T_2(x,y) = \frac{1}{2}\left\langle H_f(0,0)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right\rangle$$

נשים לב כי בסביבה קטנה סביב הראשית $f(x,y) \approxeq T_2(x,y)$, אז מספיק לחקור את המשוואה. היות ו H_f סימטרית היא לכסינה, והיא בעלת 2 ע"ע λ_1, λ_2, ושני ו"ע v_1, v_2, נניח בשביל האינטאיציה ש $v_1 = e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = e_2 = v_2$, אז:

$$\begin{aligned} f(x,y) \approxeq T_2(x,y) &= \frac{1}{2}\left\langle H_f(0,0)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right\rangle = \frac{1}{2}\left\langle \begin{pmatrix} \lambda_1 x \\ \lambda_2 y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right\rangle \\ &= \frac{1}{2}\left(\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2\right) \end{aligned}$$

ומפה נוכל בבירור לראות שמתקיימים תנאי המשפט.

תרגיל 7.13.

סווגו את כל הנקודות הקריטיות של:

$$f(x,y) = 4 + x^3 + y^3 - 3xy$$

פתרון:

נתחיל בלחפש נקודות קריטיות.

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} 3x^2 - 3y \\ 3y^2 - 3x \end{pmatrix} = 0 \iff \begin{cases} 3x^2 - 3y = 0 \\ 3y^2 - 3x = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x^2 = y \\ y^2 = x \end{cases}$$

כלומר:

$$y = x^2 = \left(y^2\right)^2 = y^4 \implies y - y^4 = 0 \implies y(1-y^3) = 0 \implies y = 0 \text{ או } y = 1$$

נשים לב כי $x = 0 \implies y = 0$ וכי $x = 1 \implies y = 1$. סך הכול קיבלנו 2 נקודות קריטיות $(0,0), (1,1)$.
נחשב את ההסיאן:

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} 6x & -3 \\ -3 & 6y \end{pmatrix}, \to \det(H_f(x,y)) = 36xy - 9$$

אז מיד אנו יודעים כי ב$(0,0)$ מתקיים $\det(H_f(0,0)) = -9 < 0$, אז מדובר בנקודת אוכף.
ועבור $(1,1)$, $\det(H_f(1,1)) = 36 - 9 = 27 > 0$ וגם $f_{xx}(1,1) = 6 > 0$, אז $(1,1)$ מינימום מקומי.

7.5 | נקודות קיצון של פונקציות ב3 משתנים - תרגול עצמי

תזכורת

תהא $f : D \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ פונקציה סקלרית, בעלת נ"ח רציפות מסדר שני. תהא $P = (x_0, y_0, z_0) \in D$ נקודה המקיימת $\nabla f(x_0, y_0, z_0) = 0$. נסמן:

$$H_f(P) = \begin{pmatrix} f_{xx}(P) & f_{xy}(P) & f_{xz}(P) \\ f_{yx}(P) & f_{yy}(P) & f_{yz}(P) \\ f_{zx}(P) & f_{zy}(P) & f_{zz}(P) \end{pmatrix}$$

נשים לב כי $H_f(P)$ מטריצה סימטרית, בפרט יש לה 3 ע"ע. ניתן לסווג את סוג הנקודה P בעזרת ע"ע אלה:

1. אם קיים ע"ע אפס, אז לא ניתן לדעת, ויש להפעיל מבחן אחר.
2. אם כל הע"ע חיוביים אז P מינימום מקומי.
3. אם כל הע"ע שליליים אז P מקסימום מקומי.
4. אם קיים ע"ע חיובי, ע"ע שלילי, וגם כל הע"ע אינם אפס, P נקודות אוכף.

תרגיל 7.14.

מצאו וסווגו את נקודות הקיצון של:

$$f(x,y,z) = x^2 + 2xy - y^2 - z^3 + x + y + 3z + 4$$

פתרון:

ראשית נמצא נקודות חשודות לקיצון:

$$\nabla f(x,y,z)=\begin{pmatrix}2x+2y+1\\2x-2y+1\\-3z^2+3\end{pmatrix}=0$$

נשים לב כי:

$$\begin{cases}2x+2y+1=0\\2x-2y+1=0\end{cases}\implies x=-\frac{1}{2}\implies y=0$$

אז יש לנו 2 נקודות חשודות לקיצון:

$$P_1=\left(-\frac{1}{2},0,1\right),\qquad P_2=\left(-\frac{1}{2},0,-1\right)$$

נחשב את ההסיאן:

$$H_f(x,y,z)=\begin{pmatrix}2&2&0\\2&-2&0\\0&0&-6z\end{pmatrix}$$

מהם הע"ע (כתלות ב (x,y,z))? נחשב:

$$\det\left(H_f(x,y,z)-\lambda I\right)=\det\begin{pmatrix}2-\lambda&2&0\\2&-2-\lambda&0\\0&0&-6z-\lambda\end{pmatrix}=(-6z-\lambda)\det\begin{pmatrix}2-\lambda&2\\2&-2-\lambda\end{pmatrix}$$
$$=-(6z+\lambda)\left((2-\lambda)(-2-\lambda)-4\right)=-(6z+\lambda)\left(\lambda^2-8\right)$$

אז הע"ע הם:

$$\lambda_1=-6z,\qquad \lambda_2=\sqrt{8},\qquad \lambda_3=-\sqrt{8}$$

כלומר, גם P_1 וגם P_2 נקודות אוכף.

תרגול שמיני

8.1 | כופלי לגרנז' עם אילוץ יחיד

תרגיל 8.1.

הוכיחו או הפריחו, תהא $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ פונקציה, ותהא $A \subset D$, נגדיר $\tilde{f} : A \to \mathbb{R}$, על ידי $\tilde{f}(x) = f(x)$, (כלומר $\tilde{f}$ הצמצום של f לקבוצה A).
הוכיחו אם הפריחו, אם $p \in A$ נקודת קיצון של $\tilde{f}$, ו-$p \in D$ נקודת פנים (של D), אז $\nabla f(p) = 0$.

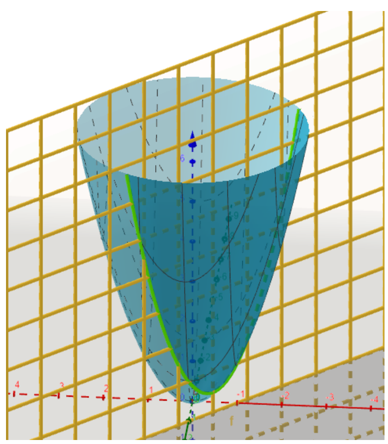
פתרון:
הטענה אינה נכונה. נתבונן ב-$f(x,y) = x^2 + y^2$ בתחום $D = \mathbb{R}^2$, יש לה נקודת קיצון יחידה ב-$(0,0)$, אבל בתחום $A = \{(x,y) | y = x+1\}$, הפונקציה מקבלת את הצורה:

$$f(x,y) = x^2 + (x+1)^2 = 2x^2 + 2x + 1$$

שזו פונקציה עם נקודת קיצון יחידה:

$$\begin{cases} \left(2x^2 + 2x + 1\right)' = 0 \implies 4x = -2 \implies x = -\frac{1}{2} \\ y = x + 1 \end{cases} \implies (x,y) = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

שזו כמובן לא נקודת קיצון של f, בפרט, $\nabla f\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \neq \vec{0}$. נוכל לראות מה קורה כאן אם נשרטט את הגרף של הפונקציה, יחד עם הקבוצה $x = y + 1$.



תרגיל 8.2.

תהא $f(x,y)=e^{2xy}$, מצאו את המקסימום של $f(x,y)$ בקבוצה $g(x,y)=x^2+y^2-1=0$.

פתרון:

נשים לב כי $g(x,y)=0$ הוא מעגל היחידה, אז ניסוח שקול לשאלה הוא למצוא את המקסימום של הפונקציה:

$$F(\theta)=f(1\cdot\cos(\theta),1\cdot\sin(\theta))=e^{2\cos(\theta)\sin(\theta)}=e^{\sin(2\theta)}$$

נגזור:

$$F'(\theta)=2\cos(2\theta)e^{\sin(2\theta)}=0\iff\theta\in\left\{\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4},\frac{5\pi}{4},\frac{7\pi}{4}\right\}$$

אפשר לבדוק את הערכים אחד-אחד ולקבל כי $F(\theta)$ מקבלת מקסימום כאשר $\theta=\frac{\pi}{4}$ (למעשה זה לא המקסימום היחיד). כלומר המקסימום הינו:

$$F\left(\frac{\pi}{4}\right)=e^{\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)}=e$$

תזכורת – (כופלי לגרנז' של פונקציה עם 2 משתנים ואילוץ יחיד)

יהיו $f,g:D\subset\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ פונקציות גזירות ברציפות. אנו רוצים למצוא את נקודות הקיצון של $f(x,y)$ כאשר אנו מגבילים את התחום ל:

$$f:\{(x,y)\in D|g(x,y)=0\}\to\mathbb{R}$$

משפט כופלי לגרנז' אומר כי: אם $P=(x_0,y_0)$ נקודה פנימית של D המקיימת $g(P)=0,\nabla g(P)\neq 0$, ו P נקודת קיצון של f תחת האילוץ $g(x,y)=0$ אז קיים $\lambda\in\mathbb{R}$ כך ש:

$$\nabla f(p)=\lambda\nabla g(p)$$

ו λ נקרא כופל לגרנז'.

הערה

עוד דרך לנסח את התנאי האחרון היא להגדיר פונקצית לגרנז':

$$L(x,y,\lambda)=f(x,y)-\lambda g(x,y)$$

ואז:

$$\nabla L(x,y,\lambda)=0\iff\begin{pmatrix}f_x(x,y)-\lambda g_x(x,y)\\ f_y(x,y)-\lambda g_y(x,y)\\ g(x,y)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\iff\begin{cases}\nabla f(x,y)=\lambda\nabla g(x,y)\\ g(x,y)=0\end{cases}$$

הערה

המשפט נותן לנו דרך לבדוק האם נקודה המקיימת $\nabla g(x_0,y_0)\neq 0$ היא נקודת קיצון תחת האילוץ. נצטרך לבדוק את הנקודות המקיימות $\nabla g(x_0,y_0)=0$ פרטנית.

הערה

לפעמים, הקבוצה $g(x,y)=0$ היא גרף של פונקציה (או עקום), אז נוכל להמנע מלהשתמש בכופלי לגרנז', למשל בדוגמאות הקודמות.
למעשה, הרעיון של כופלי לגרנגז' זה להפעיל את משפט הפונקציה הסתומה על $g(x,y)$ ולהתקדם כאילו $g(x,y)=g(x,y(x))$ היא גרף של פונקציה, במילים אחרות:
נניח כי אנו מחפשים את הקיצון של $f(x,y)$ כאשר $g(x,y)=0$, אם $\nabla g(p)\neq 0$, אז ניתן לחלץ $y=F(x)$ (או $x=G(y)$) כך ש $y=F(x)\iff g(x,y)=0$ בסביבה של p. אז נקודות הקיצון של f, בקבוצה $g(x,y)=0$ חייבות לקיים $\frac{\partial}{\partial x}f(x,F(x))=0$, אז:

$$0=\frac{\partial}{\partial x}f(x,F(x))=f_x(x,y)+f_y(x,y)y'(x)=f_x(x,y)-f_y(x,y)\frac{g_x(x,y)}{g_y(x,y)}\Rightarrow f_xg_y=f_yg_x$$

ובדיקה מהירה תראה כי:

$$f_xg_y=f_yg_x\iff\exists\lambda,\qquad\nabla f=\lambda\nabla g.$$

תרגיל 8.3.

זהו תרגיל ממבחן.
מצאו מינימום ומקסימום מוחלטים עבור הפונקציה $f(x,y)=e^{-xy}$ באליפסה $x^2+4y^2\leq 1$.

פתרון:

נשים לב כי הקבוצה $x^2+y^2\leq 1$ היא סגורה וחסומה (קבוצה כזו נקראת גם קומפקטית), אז משפט ויירשטראס מבטיח לנו נקודות קיצון מוחלטות. נחלק את התרגיל לשני חלקים, קודם נמצא את הנקודות הקיצון בפנים האליפסה, כלומר בקבוצה $x^2+4y^2<1$, ולאחר מכן נמצא את נקודות הקיצון על שפת האליפסה, כלומר בקבוצה $x^2+4y^2=1$.

1. בפנים האליפסה, נקודות הקיצון חייבות לאפס את ∇f, כלומר:

$$\nabla f(x,y)=\begin{pmatrix}-ye^{xy}\\-xe^{xy}\end{pmatrix}=0\iff(x,y)=(0,0)$$

2. כעת נחפש נקודות קיצון על שפת האליפסה, כלומר על $x^2+4y^2=1$, נשים לב שאם נגדיר $g(x,y)=x^2+4y^2-1$, אז אנו מחפשים נקודות קיצון לf, תחת האילוץ $g(x,y)=0$. f,g גזירות ברציפות. נגדיר:

$$L(x,y,\lambda)=f(x,y)-\lambda g(x,y)=e^{-xy}-\lambda(x^2+4y^2-1)$$

ואז:

$$\nabla L(x,y,\lambda)=0 \iff \begin{cases} L_x(x,y,\lambda)=-ye^{xy}-\lambda(2x)=0\\ L_y(x,y,\lambda)=-xe^{xy}-\lambda(8y)=0\\ L_\lambda(x,y,\lambda)=x^2+4y^2-1=0\end{cases}$$

נשים לב כי:

$$x=0\Rightarrow L_x(0,y,\lambda)=-y=0$$

כלומר $y=0 \Leftarrow x=0$, אבל $(x,y)=(0,0)$ לא מקיימת את האילוץ שלנו (או באופן שקול, מתקיים $L_\lambda(0,0,\lambda)\neq 0$) אז $x\neq 0$. באופן שקול אפשר לראות כי $y\neq 0$, אז אפשר לחלק בx ובy את המשוואות:

$$\begin{cases} -\frac{y}{x}e^{xy}-2\lambda=0\\ -\frac{x}{y}e^{xy}-8\lambda=0\\ x^2+4y^2-1=0\end{cases} \implies \begin{cases} -4\frac{y}{x}e^{xy}-8\lambda=0\\ -\frac{x}{y}e^{xy}-8\lambda=0\\ x^2+4y^2-1=0\end{cases} \implies \begin{cases} -4\frac{y}{x}e^{xy}=8\lambda\\ -\frac{x}{y}e^{xy}=8\lambda\\ x^2+4y^2-1=0\end{cases}$$

$$\implies 4\frac{y}{x}e^{xy}=\frac{x}{y}e^{xy}\implies x^2=4y^2$$

נציב במשוואה השלישית:

$$\begin{cases} x^2+4y^2-1=0\\ x^2=4y^2\end{cases} \implies 2x^2-1=0\implies x=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\implies y^2=\frac{1}{8}\implies y=\pm\frac{1}{2\sqrt{2}}$$

בעצם קיבלנו 4 נקודות חשודות:

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{2\sqrt{2}}\right),\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{2\sqrt{2}}\right),\left(\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{2\sqrt{2}}\right),\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)$$

נשאר לנו לבדוק את הנקודות המקיימות $g(x,y)=0,\nabla g(x,y)=0$, ואכן:

$$\nabla g(x,y)=0\implies \begin{pmatrix}2x\\8y\end{pmatrix}=0\implies (x,y)=(0,0)$$

אבל $g(x,y)=-1\neq 0$.

נחשב את $f(x,y)$ בכל הנקודות החשודות:

$$f(0,0)=1$$

$$f\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)=e^{-\frac{1}{4}}$$

$$f\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)=e^{\frac{1}{4}}$$

$$f\left(\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)=e^{\frac{1}{4}}$$

$$f\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)=e^{-\frac{1}{4}}$$

כלומר המינימום מתקבל ב $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{2\sqrt{2}}\right),\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)$, והמקסימום ב$\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{2\sqrt{2}}\right),\left(\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)$.

תרגיל 8.4.

זהו תרגיל ממבחן.
יהא $a > 1$. מהי הנקודה הקרובה ביותר ל$A = (1,2)$ על המעגל $x^2 + y^2 = 5a^2$,

פתרון:
המרחק של (x,y) מA היא הפונקציה:

$$\tilde{f}(x,y) = \sqrt{(x-1)^2 + (y-2)^2}$$

אז בעצם אנו שואלים, מהם נקודות הקיצון של $\tilde{f}(x,y)$ שמקיימות:

$$x^2 + y^2 = 5a^2 \iff g(x,y) := x^2 + y^2 - 5a^2, \qquad g(x,y) = 0$$

נבצע את הטריק הבא (שהשתמשנו בו מספר פעמים כבר לאורך הקורס), ונחפש נקודות קיצון לפונקציה $f(x,y) = \left(\tilde{f}(x,y)\right)^2 = (x-1)^2 + (y-2)^2$, תחת האילוץ $g(x,y) = 0$. וזאת שאלה שנפתור בעזרת כופלי לגרנז'. f, g גזירות ברציפות. פונקציה הלגרנז' שלנו היא:

$$L(x,y,\lambda) = f(x,y) - \lambda g(x,y) = (x-1)^2 + (y-2)^2 - \lambda\left(x^2 + y^2 - 5a^2\right)$$

כלומר:

$$\nabla L(x,y,\lambda) = 0 \iff \begin{cases} 2(x-1) - \lambda(2x) = 0 \\ 2(y-2) - \lambda(2y) = 0 \\ x^2 + y^2 - 5a^2 = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} 2(x-1) = 2\lambda x \\ 2(y-2) = 2\lambda y \\ x^2 + y^2 - 5a^2 = 0 \end{cases}$$

מהמשוואה הראשונה והשנייה אנו יודעים כי $x \neq 0$ וגם $y \neq 0$, אז קיבלנו:

$$\frac{2x-2}{x} = \lambda = \frac{2y-4}{y} \implies 2xy - 2y = 2xy - 4x \implies y = 2x$$

נציב במשוואה השלישית:

$$x^2 + (2x)^2 - 5a^2 = 0 \implies 5x^2 = 5a^2 \implies x = \pm a$$

כלומר יש לנו שתי נקודות חשודות לקיצון תחת האילוץ:

$$(a,2a), (-a,-2a)$$

נבדוק מתי $\nabla g(x,y) = 0$, ואכן:

$$\nabla g(x,y) = 0 \iff \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \end{pmatrix} = 0 \iff x = y = 0$$

אבל $g(0,0) = -5a^2 \neq 0$.
נבדוק את נקודות הקיצון שלנו:

$$f(a,2a) = (a-1)^2 + (2a-2)^2$$

$$f(-a,-2a) = (-a-1)^2 + (-2a-2)^2 = (a+1)^2 + (2a+2)^2 > f(a,2a)$$

נשים לב כי הקבוצה $g(x,y) = 0$ היא סגורה וחסומה, וכי הפונקציה $f(x,y)$ רציפה בכל $\mathbb{R}^2$, לכן לפי משפט ויירשטראס, $f(x,y)$ מקבלת את ערכי הקיצון שלה תחת האילוץ $g(x,y) = 0$. כלומר, $(-a,-2a)$ היא המקסימום הגלובלי של f - כלומר הנקודה הרחוקה ביותר מA, ו$(a,2a)$ היא המינימום הגלובלי, כלומר הנקודה הקרובה ביותר.

תרגיל 8.5.

יהא $r > 0$. מצאו את ארכי הצלעות של מלבן המקביל לצירים בעל שטח מקסימלי, התחום במעגל

$$x^2 + y^2 = r^2$$

פתרון:

נשים לב כי מלבן כנ"ל נקבע עפ"י נקודה על המעגל, כלומר, כל מלבן נחתך ב(x, y) יחיד על המעגל המקיים $x \geq 0, y \geq 0$, והשטח שלו הוא $2x \cdot 2y = 4xy$.
כלומר התרגיל שלנו הוא למקסם את $f(x,y) = 4xy$ בתחום $x, y \geq 0$, תחת האילוץ $x^2 + y^2 = r^2$.
נפתור את התרגיל בשתי דרכים:

1. עם כופלי לגראנז':

$$g(x,y) = x^2 + y^2 - r^2$$

f, g גזירות ברציפות.

$$L(x,y,z) = 4xy - \lambda(x^2 + y^2 - r^2)$$

אז:

$$\nabla L = 0 \iff \begin{pmatrix} 4y - \lambda(2x) \\ 4x - \lambda(2y) \\ x^2 + y^2 - r^2 \end{pmatrix} = 0 \iff \begin{cases} 4y = 2x\lambda \\ 4x = 2y\lambda \\ x^2 + y^2 = r^2 \end{cases}$$

אם $x = 0$ או $y = 0$, נקבל מלבן משטח אפס - אז אפשר להניח כי $x \neq 0$ ו$y \neq 0$. נחלק את המשוואות ב $2x$ וב$2y$.

$$\frac{4y}{2x} = \lambda = \frac{4x}{2y} \implies x = \pm y$$

נציב במשוואה השלישית ונקבל:

$$2x^2 = r^2 \implies x = \pm\frac{r}{\sqrt{2}}$$

קיבלנו 4 נקודות, רק $\left(\frac{r}{\sqrt{2}}, \frac{r}{\sqrt{2}}\right)$ בתחום שלנו (כל הנקודות נופלות על אותו מלבן). יחד עם הנקודות $(0,r), (r,0)$, שכבר קבענו שמדובר בנקודות מינימום.

משום ש $f(x,y)$ רציפה על הקבוצה הסגורה והחסומה $g(x,y) = 0$, היא משיגה את חסמיה, כלומר המלבן הנקבע ע"י $\left(\frac{r}{\sqrt{2}}, \frac{r}{\sqrt{2}}\right)$ הוא בעל שטח מקסימלי.

2. נשים לב כי התחום שלנו, $x^2 + y^2 = r^2$ הוא מסילה, $\gamma(t) = (r\cos(t), r\sin(t))$, שוב, בגלל שנקודה אחת קובעת את המלבן, מספיק להתבונן על התחום $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ (רבע מעגל), כלומר, אנו רוצים למצוא את המקסימום של:

$$f(\gamma(t)) = 4r^2\cos(t)\sin(t)$$

(שוב, אנו יודעים כי $t = 0$ או $t = \frac{\pi}{2}$ נקודות מינימום, כי הן קובעות מלבן בעל שטח אפס) נגזור:

$$\frac{\partial}{\partial t}f(\gamma(t)) = 4r^2(\cos(t)\cdot\cos(t) + \sin(t)(-\sin(t))) = 4r^2\left(\cos^2(t) - \sin^2(t)\right) = 4r^2\cos(2t)$$

נשווה ל-0 ונקבל $t=\frac{\pi}{4} \implies 2t=\frac{\pi}{2}$, כלומר הנקודה שלנו היא:

$$\left(r\cos\left(\frac{\pi}{4}\right), r\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)=\left(\frac{r}{\sqrt{2}},\frac{r}{\sqrt{2}}\right)$$

והיא מקסימום מקומית מאותה סיבה כמו בפתרון על כופלי הלגרנז'.

תזכורת – (כופלי לגרנז' של פונקציה עם 3 משתנים ואילוץ יחיד)

יהיו $f,g:D\subset\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ פונקציות גזירות ברציפות, אם $P=(x_0,y_0,z_0)$ נקודה פנימית של D המקיימת $g(P)=0, \nabla g(P)\neq 0$, ו P נקודת קיצון של f תחת האילוץ $g(x,y,z)=0$ אז קיים $\lambda\in\mathbb{R}$ כך ש:

$$\nabla f(p)=\lambda\nabla g(p)$$

או באופן שקול, אם נסמן $L(x,y,z,\lambda)=f(x,y,z)-\lambda g(x,y,z)$, אז $\nabla g(x,y,z,\lambda)=0$.

הערה

המקרה הזה מאוד דומה למקרה של 2 משתנים ואילוץ אחד.

תרגיל 8.6.

מצאו את המקסימום של הפונקציה $f(x,y,z)=2x^2+y+z$, בקבוצה:

$$x^2+y^2+z^2=1$$

פתרון:

ראשית, הקבוצה $x^2+y^2+z^2=1$ סגורה וחסומה, וf רציפה בה, אז היא מקבלת את חסמיה. נסמן $g(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-1$, כל הפונקציות בשאלה גזירות ברציפות. נפעיל כופלי לגנרז'

$$L(x,y,z,\lambda)=2x^2+y+z-\lambda(x^2+y^2+z^2-1)$$

אז:

$$\nabla L(x,y,z,\lambda)=\begin{pmatrix}4x-2x\lambda\\1-2y\lambda\\1-2z\lambda\\x^2+y^2+z^2-1\end{pmatrix}=\vec{0}\Rightarrow\begin{cases}4x-2x\lambda=0\\1-2y\lambda=0\\1-2z\lambda=0\\x^2+y^2+z^2+1\end{cases}$$

מהמשוואה השנייה $\lambda\neq 0$, ומהמשוואה השנייה והשלישית $z=y=\frac{1}{2\lambda}$,

$$\begin{cases}4x-2x\frac{1}{2y}=0\\x^2+2y^2=1\end{cases}$$

אם $x=0$, אז $y=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$, ונקבל שתי נקודות:

$$P_1=\left(0,\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right),\qquad P_2=\left(0,-\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

אם $x\neq 0$, אז מהמשוואה הראשונה נקבל:

$$4-\frac{1}{y}=0\Rightarrow y=\frac{1}{4}\Rightarrow x^2=1-2\frac{1}{4^2}=\frac{7}{8}\Rightarrow x=\pm\sqrt{\frac{7}{8}}$$

ולכן:

$$P_3=\left(\sqrt{\frac{7}{8}},\frac{1}{4},\frac{1}{4}\right),\qquad P_4=\left(-\sqrt{\frac{7}{8}},\frac{1}{4},\frac{1}{4}\right)$$

ולבסוף נבדוק את הנקודות בהן $\nabla g(p)=0$, ומהר נראה כי אין כאלה שמקיימות $g(p)=0$.
נחשב:

$$f(P_3)=f(P_4)=2\frac{7}{8}+2\frac{1}{4}=\frac{9}{4}$$

$$f(P_1)=\sqrt{2}<\frac{9}{4},\qquad f(P_2)=-\sqrt{2}$$

נסיק כי P_3,P_4 נקודות מקסימום ו-P_2 נקודת מינימום.

8.2 | כופלי לגרנז' עם שני אילוצים

תזכורת – (כופלי לגרנז' עם שני אילוצים)

יהיו $f,g_1,g_2:D\subset\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$, פונקציות גזירות ברציפות.
נחפש את נקודות הקיצון של f תחת האילוצים:

$$\{(x,y,z)|g_1(x,y,z)=g_2(x,y,z)=0\}=\{(x,y,z)|g_1(x,y,z)=0\}\cap\{(x,y,z)|g_2(x,y,z)=0\}$$

אז משפט כופלי לגרנז' אומר לנו כי אם $p=(x_0,y_0,z_0)$ היא נקודת קיצון של f תחת האילוצים $g_1=g_2=0$, וגם $\nabla g_1(p),\nabla g_2(p)$ וקטורים בת"ל, אז קיימים $\lambda_1,\lambda_2\in\mathbb{R}$ כך ש:

$$\nabla f(p)=\lambda_1\nabla g_1(p)+\lambda_2\nabla g_2(p)$$

או באופן שקול:

$$L(x,y,z,\lambda_1,\lambda_2)=f(x,y,z)-\lambda_1 g_1(x,y,z)-\lambda_2 g_2(x,y,z)$$

מקיימת $\nabla L(x,y,z,\lambda_1,\lambda_2)=0$.
כלומר, הנקודות החשודות שלנו הן הנקודות המקיימות $\nabla L=0$ או הנקודות המקיימות $\nabla g_1(p),\nabla g_2(p)$ ת"ל וגם $g_1(p)=g_2(p)=0$

תזכורת

שני וקטורים $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^n$ נקראים בת"ל אם למערכת המשוואות הלינארית $\alpha v_1 + \beta v_2 = 0$ קיים פתרון שאינו $\alpha = \beta = 0$.

תרגיל 8.7.

מצא מינימום ומקסימום מוחלטים עבור $f\left(x,y,z\right) = xy + z^2$, על המעגל הנוצר מחיתוך המישור $y - x = 0$ והכדור $x^2 + y^2 + z^2 = 4$.

פתרון:

נפעיל כופלי לגרנז' עבור:

$$f(x,y,z) = xy + z^2, \quad g_1(x,y,z) = y - x, \quad g_2(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - 4$$

כולן גזירות ברציפות. כלומר:

$$L(x,y,z,\lambda_1,\lambda_2) = xy + z^2 - \lambda_1(y - x) - \lambda_2(x^2 + y^2 + z^2 - 4)$$

אז:

$$\nabla L = \begin{pmatrix} y - \lambda_1 - 2x\lambda_2 \\ x + \lambda_1 - 2y\lambda_2 \\ 2z - 2z\lambda_2 \\ y - x \\ x^2 + y^2 + z^2 - 4 \end{pmatrix} = 0 \iff \begin{cases} y - \lambda_1 = 2x\lambda_2 \\ y + \lambda_1 = 2y\lambda_2 \\ 2z = 2z\lambda_2 \\ y = x \\ x^2 + y^2 + z^2 = 4 \end{cases}$$

כלומר:

$$\begin{cases} x - \lambda_1 = 2x\lambda_2 \\ x + \lambda_1 = 2x\lambda_2 \\ 2z = 2z\lambda_2 \\ 2x^2 + z^2 = 4 \end{cases}$$

מחיבור המשוואה הראשונה והשנייה נקבל:

$$2x = 4x\lambda_2$$

יש לנו פה 2 מקרים, או ש $x = 0$ או ש $\lambda_2 = 0$.
אם $\lambda_2 = 0$, אז $z = 0$, ואז $x = \pm\sqrt{2}$. אם $x = 0$, אז $z = \pm 2$. אז הנקודות החשודות שלנו הן:

$$P_1 = (0,0,2), \qquad P_2 = (0,0,-2), \qquad P_3 = \left(\sqrt{2},\sqrt{2},0\right), \qquad P_4 = \left(-\sqrt{2},-\sqrt{2},0\right)$$

נבדוק מתי $\nabla g_1, \nabla g_2$ ת"ל.

$$\nabla g_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \nabla g_2 = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ 2z \end{pmatrix}$$

הווקטורים הללו ת"ל אם אחד מהם שווה לאפס, כלומר $\nabla g_2 = 0$, אבל אז $x = y = z = 0$, אבל מתקיים $g_2(0,0,0) \neq 0$, או שקיים סקלר:

$$\exists\alpha \neq 0, \nabla g_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \alpha\nabla g_2 = \begin{pmatrix} 2x \\ 2x \\ 2z \end{pmatrix} \implies \begin{cases} 2x\alpha = -1 \\ 2x\alpha = 1 \\ 2z\alpha = 0 \end{cases} \implies -1 = 1$$

וקיבלנו סתירה. כלומר יש לנו 4 נקודות חשודות:

$$\begin{aligned} &P_1 = (0,0,2) \implies f(P_1) = 4 \\ &P_2 = (0,0,-2) \implies f(P_2) = 4 \\ &P_3 = \left(\sqrt{2}, \sqrt{2}, 0\right) \implies f(P_3) = 2 \\ &P_4 = \left(-\sqrt{2}, -\sqrt{2}, 0\right) \implies f(P_4) = 2 \end{aligned}$$

הקבוצה $g_1(x,y,z) = g_2(x,y,z) = 0$ סגורה כחיתוך של סגורות וחסומה (כי היא מוכלת בכדור $x^2 + y^2 + z^2 = 4$) ולכן, משום ש f רציפה, היא מקבלת את חסמיה בקבוצה סגורה וחסומה, כלומר P_3, P_4 נקודות מינימום גלובלי ו P_1, P_2 נקודות מקסימום גלובלי.

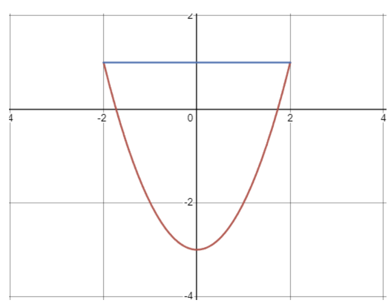
8.2.1 מציאת נקודות קיצון - תרגול נוסף

תרגיל 8.8.

מצאו את נקודות הקיצון המוחלט עבור הפונקציה $f(x,y) = xy$ בתחום החסום ע"י $y = 1, y = x^2 - 3$.

פתרון:

נשים לב כי f גזירה ברציפות בכל $\mathbb{R}^2$, וכי התחום סגור וחסום. נשרטט את התחום, ונקבל:



נחלק את הפתרון לפנים התחום ולשפת התחום.

1. בפנים התחום, הנקודות החשודות לקיצון מאפסות את ∇f, ואכן $\nabla f = \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix}$ כלומר, מדובר בנקודה אחת, $(x,y) = (0,0)$, והיא אכן בתחום שלנו. נסמן $P_1 = (0,0)$.
2. נחלק את השפה שלנו ל2 חלקים, $B_1 = \{(x,1) | x \in [-2,2]\}$, ו $B_2 = \{(x, x^2 - 3) | x \in [-2,2]\}$. על B_1 הפונקציה שלנו היא $f(x,1) = x$, שמקבלת נקודת קיצון ב $P_2 = (2,1), P_3 = (-2,1)$.

על B_2 הפונקציה שלנו היא:

$$f(x,x^2-3)=x^3-3x$$

נגזור ונשווה ל-0 ונקבל

$$3x^2-3=0 \implies x^2-1=0$$

כלומר $P_4=(1,-2), P_5=(-1,-2)$ (נקודות השפה $x=\pm 2$ הן P_2,P_3).

כלומר סה"כ יש לנו 5 נקודות חשודות, נבדוק אותן:

$$\begin{aligned}
P_1&=(0,0)\Rightarrow f(0,0)=0\\
P_2&=(2,1)\Rightarrow f(2,1)=2\\
P_3&=(-2,1)\Rightarrow f(-2,1)=-2\\
P_4&=(1,-2)\Rightarrow f(1,-2)=-2\\
P_5&=(-1,-2)\Rightarrow f(-1,-2)=2
\end{aligned}$$

f רציפה בתחום סגור וחסום D, ולכן משיגה את חסמיה, כלומר P_2,P_5 נקודות מקסימום מוחלט של f בתחום D ו P_3,P_4 נקודות מינימום מוחלט של f בתחום D.

תרגיל 8.9.

זו שאלה ממבחן.

מצא את נקודות הקיצון המוחלטות עבור הפונקציה $f(x,y)=\left(x^2+y^2\right)^2+x^2-y^2$ בתחום $x^2+y^2\leq 1$.

פתרון:

ראשית, נחפש נקודות קיצון בפנים המעגל $x^2+y^2<1$, הפונקציה גזירה ברציפות שם אז:

$$\nabla f=\begin{pmatrix}4x(x^2+y^2)+2x\\4y(x^2+y^2)-2y\end{pmatrix}=0 \implies \begin{cases}4x(x^2+y^2)+2x=4x\left(x^2+y^2+\frac{1}{2}\right)=0\\4y(x^2+y^2)-2y=4y\left(x^2+y^2-\frac{1}{2}\right)=0\end{cases}$$

מהמשוואה הראשונה נקבל $x=0$ ($x^2+y^2+\frac{1}{2}\neq 0$ לכל $(x,y)\in\mathbb{R}^2$), נציב במשוואה השנייה $x=0$ ונקבל:

$$4y\left(y^2-\frac{1}{2}\right)=0 \implies y=0 \text{ או } y=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$$

כלומר קיבלנו 3 נקודות קיצון אפשריות:

$$P_1=(0,0)\,,P_2=\left(0,\frac{1}{\sqrt{2}}\right),P_3=\left(0,-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

שלושת הנקודות מקיימות $x^2+y^2<1$, ולכן הן נקודות פנימיות של התחום. נבדוק נקודות קיצון בשפה, כלומר עבור $x^2+y^2=1$, נשים לב שלקבוצה זו קיימת פרמטריזציה, כלומר:

$$\gamma(t)=(\cos(t),\sin(t))$$

עבור $t\in[0,2\pi)$, נציב:

$$f(\gamma(t))=(\cos^2(t)+\sin^2(t))^2+\cos^2(t)-\sin^2(t)=1+\cos(2t)$$

נגזור ונשווה לאפס:

$$\frac{\partial}{\partial t}f(\gamma(t)) = -2\sin(2t) = 0$$

למשוואה $\sin(2t) = 0$ יש 4 פתרונות עבור $t \in [0, 2\pi)$:

$$\begin{matrix} t_0 = 0 \\ t_1 = \frac{\pi}{2} \\ t_2 = \pi \\ t_3 = \frac{3\pi}{2} \end{matrix} \implies \begin{matrix} \gamma(t_0) = (1,0) \\ \gamma(t_1) = (0,1) \\ \gamma(t_2) = (-1,0) \\ \gamma(t_3) = (0,-1) \end{matrix}$$

כלומר יש לנו סה"כ 7 נקודות חשודות לקיצון מוחלט:

$$\begin{matrix} P_1 = (0,0) \\ P_2 = \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \\ P_3 = \left(0, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \\ P_4 = (1,0) \\ P_5 = (0,1) \\ P_6 = (-1,0) \\ P_7 = (0,-1) \end{matrix} \implies \begin{matrix} f(P_1) = 0 \\ f(P_2) = f(P_3) = -\frac{1}{4} \\ f(P_4) = f(P_6) = 2 \\ f(P_5) = f(P_7) = 0 \end{matrix}$$

משום ש f רציפה בתחום הסגור וחסום $x^2 + y^2 \leq 1$, היא מקבלת בו את חסמיה, כלומר P_2, P_3 מינימום וP_4, P_6 מקסימום.

תרגיל 8.10.

מצאו נקודות קיצון ל $f(x,y) = \sqrt{\frac{1}{x^2+y^2+1}}$ בתחום $x^2 + y^2 \leq 1$.

פתרון:
נעבור לקואורדינטות פולריות:

$$x = r\cos(\theta), \qquad y = r\sin(\theta),$$

ואז התחום שלנו הוא $0 \leq r \leq 1$, כאשר $\theta \in [0, 2\pi)$. הפונקציה שלנו הינה:

$$F(r\cos(\theta), r\sin(\theta)) = \sqrt{\frac{1}{r^2+1}}$$

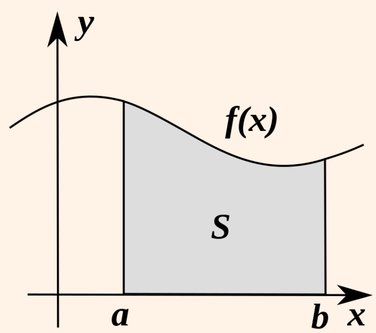
ברור שהפונקציה יורדת ככל ש r גדל (תרגיל - הוכיחו זאת!) כלומר היא מקבלת מקסימום כאשר $r = 0$, כלומר $x = y = 0$ ומינימום עבור $r = 1$, כלומר כל (x, y) שמקיימים $x^2 + y^2 = 1$.

תרגול תשיעי

9.1 | אינטגרל כפול במלבן ומשפט פוביני

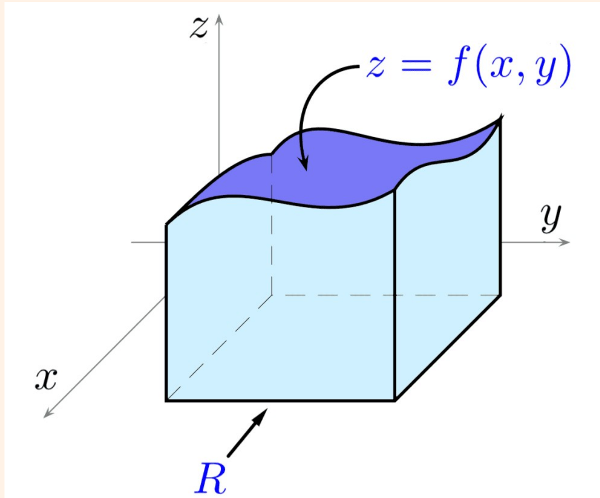
רעיון

בהנתן פונקציה $f:[a,b]\to\mathbb{R}_+$, האינטגרל החד-ממדי $\int_a^b f(x)dx$ מחשב לנו את **שטח** הבא:



אותה שאלה נוכל לשאול על **נפח** שכלוא תחת גרף של פונקציה $f:D\subset\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}_+$, כלומר, אם $D=[a,b]\times[c,d]=\{(x,y)|a\leq x\leq b$ וגם $c\leq y\leq d\}\subset\mathbb{R}^2$ מלבן, נחשב את הנפח הזה בעזרת אינטגרל כפול:

$$R=\iint_D f(x,y)\,dx\,dy$$



תזכורת – (אינטגרביליות במלבן)

פונקציה נקראת אינטגרבילית אם סכומי הרימן שלה מתכנסים (את ההגדרה המלאה ראינו בהרצאה), נזכר במספר תכונות:

1. אם $f(x,y)$ רציפה בD אז היא אינטגרבילית בD.
2. אם $f(x,y),g(x,y)$ אינטגרבילית בD, אז עבור $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$, $h(x,y)=\alpha f(x,y)+\beta g(x,y)$, אינטגרבילית ומתקיים:

$$\iint_D \alpha f(x,y)+\beta g(x,y)\,dx\,dy=\alpha\iint_D f(x,y)\,dx\,dy+\beta\iint_D g(x,y)\,dx\,dy$$

3. אם D,D' תחומים זרים - כלומר $D\cap D'=\emptyset$ (או אולי נחתכים במספר סופי של ישרים או נקודות) ו $f(x,y)$ אינטגרבילית בD,D' אז היא אינטגרבילית ב$D\cup D'$ ומתקיים:

$$\iint_{D\cup D'} f(x,y)\,dx\,dy=\iint_D f(x,y)\,dx\,dy+\iint_{D'} f(x,y)\,dx\,dy$$

תזכורת – (משפט פוביני)

אם $f(x,y)$ רציפה במלבן $D=[a,b]\times[c,d]$ אז:

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)\,dy\right)\,dx = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)\,dx\right)\,dy$$

במילים אחרות, אם נסמן:

$$F(x)=\int_c^d f(x,y)\,dy, \qquad G(y)=\int_a^b f(x,y)\,dx$$

אז מתקיים:

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b F(x)\,dx = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)\,dy\right)\,dx$$

וגם:

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \int_c^d G(y)\,dy = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)\,dx\right)\,dy$$

תרגיל 9.1.

חשבו את $\iint_D 3x^3y+xy^5\,dx\,dy$ עבור $D=[0,1]\times[0,\sqrt{2}]$.

פתרון:

$f(x,y)$ רציפה, ולכן עפ"י פוביני מתקיים:

$$\iint_D 3x^3y+xy^5\,dx\,dy = \int_0^1\left(\int_0^{\sqrt{2}} 3x^3y+xy^5\,dy\right)\,dx$$

נתחיל בחישוב האינטגרל הפנימי:

$$\int_0^{\sqrt{2}} 3x^3y+xy^5\,dy = 3x^3\left(\frac{y^2}{2}\right)+x\left(\frac{y^6}{6}\right)\Bigg|_{y=0}^{y=\sqrt{2}} = 3x^3+\frac{4x}{3}$$

אז:

$$\iint_D 3x^3y+xy^5\,dx\,dy = \int_0^1\left(\int_0^{\sqrt{2}} 3x^3y+xy^5\,dy\right)\,dx = \int_0^1\left(3x^3+\frac{4x}{3}\right)\,dx$$

$$= 3\cdot\frac{x^4}{4}+\frac{4}{3}\cdot\frac{x^2}{2}\Bigg|_{x=0}^{x=1} = \frac{3}{4}+\frac{2}{3} = \frac{17}{12}$$

תרגיל 9.2.

תהא $f(x,y)$ פונקציה רציפה כך ש $f(x,y)=A(x)B(y)$, הוכיחו כי:

$$\iint_{[a,b]\times[c,d]} f(x,y)\,dx\,dy = \left(\int_a^b A(x)\,dx\right)\cdot\left(\int_c^d B(y)\,dy\right)$$

פתרון:
נשים לב כי בעזרת פוביני:

$$\iint_{[a,b]\times[c,d]} f(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b\left(\int_c^d f(x,y)\,dy\right)\,dx = \int_a^b\left(\int_c^d A(x)B(y)\,dy\right)\,dx$$
$$=_\star \int_a^b A(x)\left(\int_c^d B(y)\,dy\right)\,dx = \left(\int_c^d B(y)\,dy\right)\cdot\left(\int_a^b A(x)\,dx\right)$$

כאשר ב $=_\star$ יש שימוש בכך ש$A(x)$ לא תלוי במשתנה y, ובלינאריות האינטגרל.

9.2 | אינטגרציה בתחום פשוט

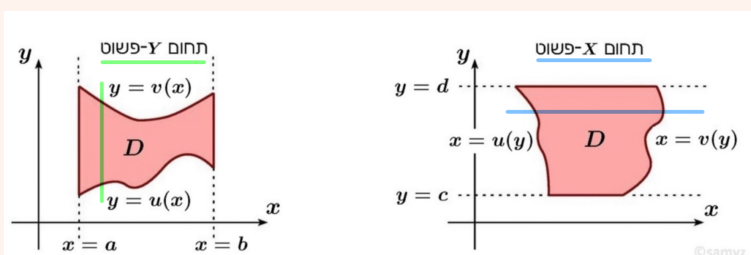
תזכורת – (תחום פשוט)

תחום חסום וסגור $D\subset\mathbb{R}^2$ נקרא <u>פשוט ביחס לציר y</u> אם הוא מהצורה:

$$D=\{(x,y)|a\le x\le b, v(x)\le y\le u(x)\}$$

עבור פונקציות $v,u:[a,b]\to\mathbb{R}$ רציפות.
ובאופן דומה D נקרא <u>פשוט ביחס לציר x</u> אם קיימות $p,q:[c,d]\to\mathbb{R}$ כך ש:

$$D=\{(x,y)|c\le y\le d, p(y)\le x\le q(y)\}$$



תזכורת

תהא $f(x,y)$ אינטגרבילית בתחום D, אם $D=\{(x,y)|a\le x\le b, v(x)\le y\le u(x)\}$ תחום פשוט ביחס לציר y, אז:

$$\iint_D f(x,y)=\int_a^b\left(\int_{v(x)}^{u(x)} f(x,y)\,dy\right)\,dx$$

ואם $D=\{(x,y)|c\le y\le d, p(y)\le x\le q(y)\}$ תחום פשוט ביחס לציר x, אז:

$$\iint_D f(x,y)=\int_c^d\left(\int_{p(y)}^{q(y)} f(x,y)\,dx\right)\,dy$$

תרגיל 9.3.

חשבו את שטח עיגול היחידה בעזרת אינטגרל כפול.

פתרון:

נשים לב כי שטח עיגול היחידה הוא $\iint_D f(x,y)\,dx\,dy$ עבור $f(x,y)=1$ ו D עיגול היחידה, ראשית נשים לב כי:

$$\begin{aligned}D&=\{(x,y)|x^2+y^2\le 1\}=\{(x,y)|y^2\le 1-x^2\}\\&=\left\{(x,y)|-\sqrt{1-x^2}\le y\le\sqrt{1-x^2},-1\le x\le 1\right\}\end{aligned}$$

אז:

$$\iint_D f(x,y)=\int_{-1}^{1}\left(\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} dy\right)\,dx=2\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}\,dx$$

נבצע החלפת משתנים $dx=\cos(u)\,du \implies x=\sin(u), \frac{dx}{du}=\cos(u)$, וגם $-\frac{\pi}{2}<u\le\frac{\pi}{2} \implies -1\le x\le 1$, אז:

$$\begin{aligned}2\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}\,dx&=2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-\sin^2(u)}\cos(u)\,du=2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}|\cos(u)|\cos(u)\,du\\&=_\star 2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2(u)\,du=2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1}{2}+\frac{\cos(2u)}{2}\right)\,du\\&=2\left[\frac{u}{2}+\frac{1}{4}\sin(2u)\right]\Bigg|_{u=-\frac{\pi}{2}}^{u=\frac{\pi}{2}}=\pi\end{aligned}$$

כאשר $=_\star$ כי $\cos(u)$ חיובית בתחום.

כלומר, השטח של עיגול היחידה הוא π.

תרגיל 9.4.

עבור האינטגרלים הבאים, זהו כי תחום האינטגרציה הוא פשוט גם ביחס לציר x וגם ביחס לציר הy והשתמשו בכך כדאי להחליף את סדר האינטגרציה.

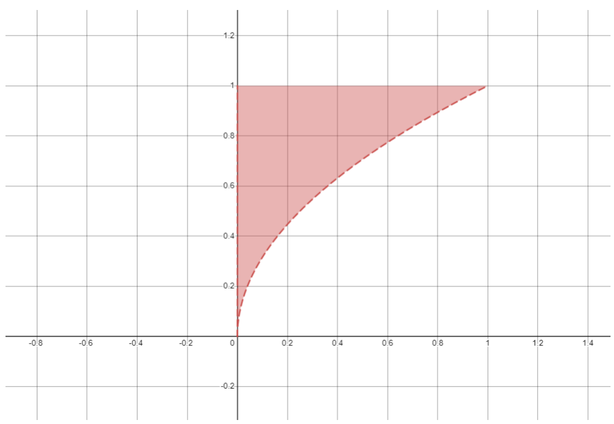
1. $\int_0^1 \int_0^{y^2} f(x,y)\,dx\,dy$.
2. $\int_0^1 \int_{-y}^{y} f(x,y)\,dx\,dy$.
3. $\int_0^4 \int_{\sqrt{x}}^{2} f(x,y)\,dy\,dx$.

פתרון:

1. התחום הוא:

$$\{(x,y)|0\le y\le 1, 0\le x\le y^2\}$$

נשרטט אותו:

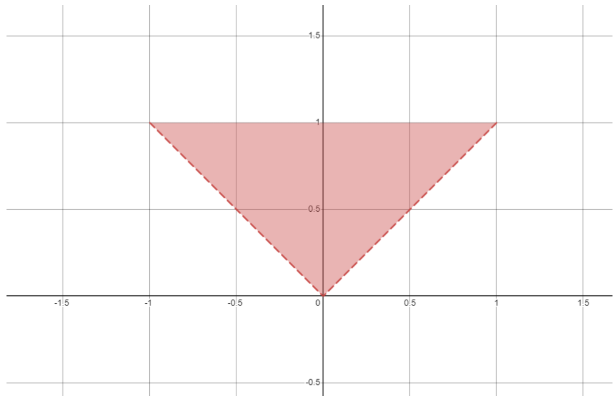


התחום של x הוא $x\in[0,1]$, ולכל $x\in[0,1]$ מתקיים $\sqrt{x}\le y\le 1$, כלומר:

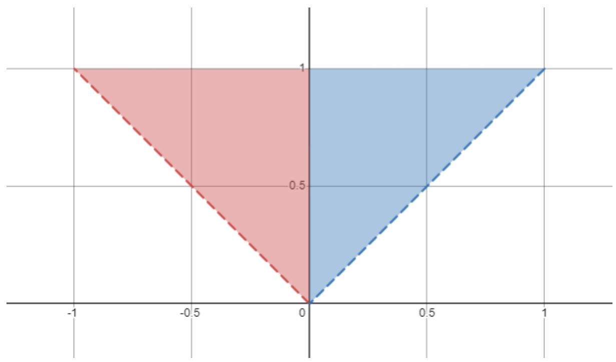
$$\int_0^1 \int_0^{y^2} f(x,y)\,dx\,dy = \int_0^1 \left(\int_{\sqrt{x}}^{1} f(x,y)\,dy\right)\,dx$$

2. נשרטט את התחום:

$$\{(x,y)|0\le y\le 1, -y\le x\le y\}$$



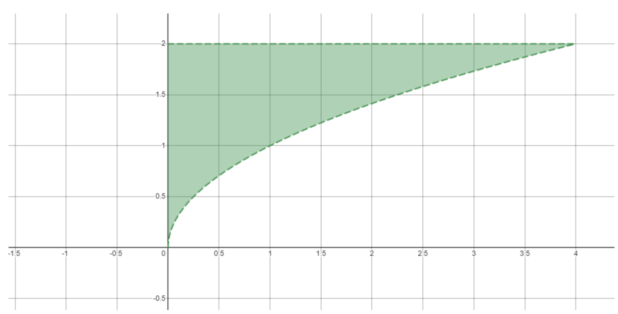
כלומר, $-1 \le x \le 1$, נחלק את התחום ל2 תחומים שונים, עבור $-1 \le x \le 0$ ועבור $0 < x \le 1$:



ונקבל כי עבור $-1 \le x \le 0$ מתקיים $-x < y < 1$ ועבור $0 < x \le 1$ מתקיים $x \le y \le 1$, כלומר:

$$\int_0^1 \int_{-y}^{y} f(x,y)\,dx\,dy = \int_{-1}^{0} \left(\int_{-x}^{1} f(x,y)\,dy \right)\,dx + \int_0^1 \left(\int_x^1 f(x,y)\,dy \right)\,dx$$

3. נשרטט את התחום:



נשים לב כי $0 \le y \le 2$, ולכל y קבוע, $0 \le x \le y^2$, אז:

$$\int_0^4 \int_{\sqrt{x}}^2 f(x,y)\,dy\,dx = \int_0^2 \int_0^{y^2} f(x,y)\,dx\,dy$$

9.3 | החלפת משתנים באינטגרל כפול

תזכורת – (החלפת משתנים)

נניח כי $f(x,y)$ פונקציה רציפה בתחום $D \subset \mathbb{R}^2$, נניח כי יש לנו תחום $\Delta \subset \mathbb{R}^2$ ופונקציה גזירה ברציפות, חח"ע ועל $\varphi : \Delta \to D$, אם נחשוב על Δ עם קואורדינטות u, v ו-D עם קואורדינטות x, y, אז אפשר לכתוב:

$$\varphi(u,v) = (x(u,v), y(u,v))$$

כלומר, $(x,y) = \varphi(u,v) = (x(u,v), y(u,v))$. נסמן את היעקוביאן של φ על ידי:

$$J(u,v) = \det\begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u}(u,v) & \frac{\partial x}{\partial v}(u,v) \\ \frac{\partial y}{\partial u}(u,v) & \frac{\partial y}{\partial v}(u,v) \end{pmatrix}$$

בנוסף, נדרוש כי $J(u,v) \neq 0$ לכל $(u,v) \in \Delta$. אז:

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \iint_\Delta f(x(u,v), y(u,v))|J(u,v)|\,du\,dv$$

הערה

זה משפט כבד, ויש לנו מספר הערות לגביו.

1. המשפט תקף גם אם φ לא חח"ע, או $J = 0$ **בקבוצה בעלת שטח אפס בלבד, כלומר מספר סופי של עקומים או נקודות.**
2. לפעמים יהיה יותר קל לחשב את היעקוביאן ההפוך, כלומר:

$$J^* = \det\begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix}$$

ואז מתקיים $J = \frac{1}{J^*}$.

3. שימו לב כי היעקוביאן מופיע בערך מוחלט!

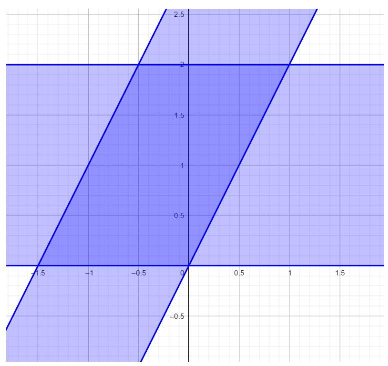
תרגיל 9.5.

חשבו את שטח המקבילית החסומה ע"י הישרים:

$$\begin{cases} y = 2x \\ y = 2x + 3 \\ y = 0 \\ y = 2 \end{cases}$$

בעזרת החלפת משתנים למלבן.

פתרון:
נשרטט את התחום D:



כלומר, אנו רוצים לחשב את $\iint_D 1\,dx\,dy$, כלומר את האינטרל של התחום D על הפונקציה $f(x,y) = 1$.
נחפש משתנים $(u,v) = (u(x,y), v(x,y))$ כך שיתארו את התחום כמלבן, נשים לב כי אם נסמן:

$$\begin{cases} u = y - 2x \\ v = y \end{cases}$$

נחפש את התחום Δ בעזרת (u,v), נעשה זאת על ידי חישוב **השפה של** D בקואורדינטות (u,v):

$$\begin{aligned} D \qquad & \qquad \triangle \\ y = 2x \quad &\longrightarrow \quad u = 0 \\ y = 2x + 3 \quad &\longrightarrow \quad u = 3 \\ y = 0 \quad &\longrightarrow \quad v = 0 \\ y = 2 \quad &\longrightarrow \quad v = 2 \end{aligned}$$

כלומר, קיבלנו את התחום הבא:

$$\Delta = \{(u,v) | 0 \le u \le 3, 0 \le v \le 2\}$$

נשים לב כי מה שחישבנו הוא ההעתקה ההפוכה, כלומר, כלומר, במקום $(x,y) = (x(u,v), y(u,v))$ מצאנו את ההעתקה $(u,v) = (u(x,y), v(x,y))$, יש לנו 2 דרכים להתקדם מפה.

1. נהפוך את ההעתקה:

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2}(v-u) \\ y = v \end{cases}$$

ונחשב:

$$J = \begin{vmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -\frac{1}{2}$$

2. נחשב את $\frac{1}{J}$ ישירות:

$$J^* = J^{-1} = \text{det}\begin{pmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{pmatrix} = \text{det}\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = -2 \Longrightarrow J = -\frac{1}{2}$$

בכל מקרה, העתקת המעבר שלנו חח"ע, על וגזירה ברציפות, אז:

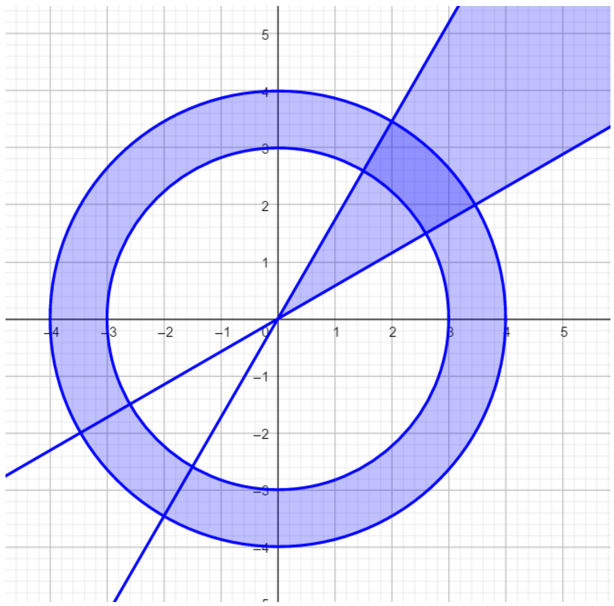
$$\iint_D 1\,dx\,dy = \iint_\Delta 1\,|J|\;du\,dv = \frac{1}{2}\int_{v=0}^{2}\int_{u=0}^{3}\;du\,dv = 3$$

תרגיל 9.6.

חשבו את $I = \iint_D \frac{y}{x}\,dx\,dy$, כאשר $D = \left\{ \begin{array}{c} 9 \le x^2+y^2 \le 16 \\ \frac{\sqrt{3}}{3}x \le y \le \sqrt{3}x \\ x>0, y>0 \end{array} \right\}$.

פתרון:

ראשית נשרטט את התחום:



נפתור את השאלה ב2 דרכים.

1. ע"י החלפת המשתנים הבאה $\begin{cases} u = x^2+y^2 \\ v = \frac{y}{x} \end{cases}$, אז יחיסת קל לחשב את הגבולות של u, v:

$$9 \le u \le 16, \qquad \sqrt{\tfrac{1}{3}} \le v \le \sqrt{3}$$

והיעקוביאן:

$$J^{-1} = \begin{vmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2x & 2y \\ -\frac{y}{x^2} & \frac{1}{x} \end{vmatrix} = 2 + 2\frac{y^2}{x^2} = 2(1+v^2) \neq 0$$

אז היות והחלפת המשתנים חח"ע ועל בתחומיה, וגזירה ברציפות, מתקיים:

$$\begin{aligned}
\iint_D \frac{y}{x}\,dx\,dy &= \iint_\Delta v\,|J|\;dv\,du \\
&= \frac{1}{2}\int_{u=9}^{16}\int_{v=\sqrt{\frac{1}{3}}}^{\sqrt{3}} \frac{v}{1+v^2}\,dv\,du = \frac{7}{2}\int_{v=\sqrt{\frac{1}{3}}}^{\sqrt{3}} \frac{v}{1+v^2}\,dv \\
&= \frac{7}{4}\int_{v=\sqrt{\frac{1}{3}}}^{\sqrt{3}} \frac{2v}{1+v^2}\,dv = \frac{7}{4}\left[\ln(1+v^2)\right]\Big|_{\sqrt{\frac{1}{3}}}^{\sqrt{3}} \\
&= \frac{7}{4}\left[\ln(1+3) - \ln\left(1+\tfrac{1}{3}\right)\right] \\
&= \frac{7}{4}\left[\ln(4) - \ln(\frac{4}{3})\right] = \frac{7}{4}\ln\left(\frac{4}{\frac{4}{3}}\right) = \frac{7}{4}\ln(3)
\end{aligned}$$

2. הפעם נעבור לקואורדינטות פולריות, $\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$.

נחשב את גבולות האינטגרציה החדשים:

$$\begin{aligned}
9 \le x^2+y^2 \le 16 \quad &\longrightarrow \quad 3 \le r \le 4 \\
\frac{\sqrt{3}}{3}x \le y \le \sqrt{3}x \quad &\longrightarrow \quad \frac{\sqrt{3}}{3} \le \frac{y}{x} \le \sqrt{3} \\
\frac{\sqrt{3}}{3} \le \tan\theta \le \sqrt{3} \quad &\longrightarrow \quad \frac{\pi}{6} \le \theta \le \frac{\pi}{3}
\end{aligned}$$

נחשב את היעקוביאן:

$$J = \begin{vmatrix} x_r & x_\theta \\ y_r & y_\theta \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} = r$$

החלפת המשתנים בהחלט גזירה ברציפות ועל, אך נשים לב כי היא לא חח"ע ב $r=0$! אבל בגלל שמדובר רק בנקודה, עדיין אפשר להפעיל את משפט החלפת המשתנים ולקבל:

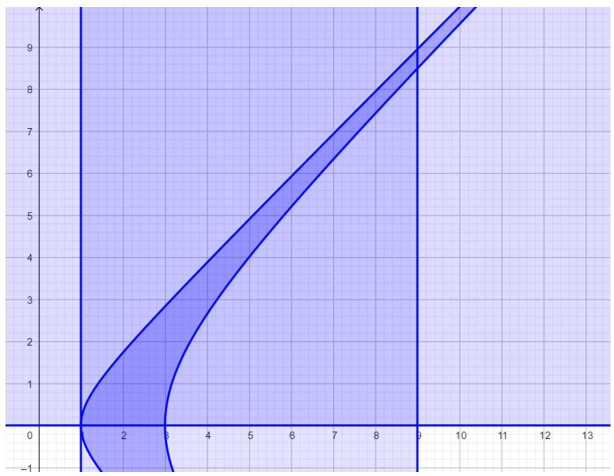
$$\begin{aligned}
\iint_D \frac{y}{x}\,dx\,dy &= \iint_\Delta \tan\theta\,|J|\;dr\,d\theta = \int_{\theta=\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\int_{r=3}^{5} \frac{\sin\theta}{\cos\theta} r\,dr\,d\theta \\
&= \int_{\theta=\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \left(\frac{16}{2} - \frac{9}{2}\right)\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\,d\theta \\
&= -\frac{7}{2}\ln|\cos\theta|\Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} = -\frac{7}{2}\ln\left(\cos\frac{\pi}{3}\right) + \frac{7}{2}\ln\left(\cos\frac{\pi}{6}\right) \\
&= \frac{7}{2}\ln\left(\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}}\right) = \frac{7}{2}\ln\sqrt{3} = \frac{7}{4}\ln(3).
\end{aligned}$$

תרגיל 9.7.

חשבו את $I=\iint_D xye^{x^2-y^2}\,dx\,dy$, כאשר $D=\begin{cases}1\le x^2-y^2\le 9\\ 1\le x\le 9\\ y\ge 0\end{cases}$.

פתרון:

נשרטט את התחום:



נבצע את החלפת המשתנים הבאה $\begin{cases}u=x^2-y^2\\ v=x^2\end{cases}$, אז נחשב את גבולות האינטגרציה החדשים:

$$\begin{array}{rcl} D & & \Delta \\ x^2-y^2=1 & \longrightarrow & u=1 \\ x^2-y^2=9 & \longrightarrow & u=9 \\ x=9 & \longrightarrow & v=81 \\ y=0 & \longrightarrow & v=u \end{array}$$

כלומר, התחום Δ הוא:

$$\Delta=\{(u,v)|1\le u\le 9, u\le v\le 81\}$$

במקרה זה יהיה קל יותר לחשב את היעקוביאן ההופכי:

$$J^{-1}=\begin{vmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 2x & -2y \\ 2x & 0 \end{vmatrix}=4xy$$

היעקוביאן שונה מאפס פרט ל $y=0$, שזו קבוצה משטח אפס, ולכן: $|J|=\frac{1}{|4xy|}=\frac{1}{4xy}$, ונקבל:

$$\begin{aligned}\iint_D xye^{x^2-y^2}\,dx\,dy &= \int_\Delta xye^u\frac{1}{4xy}\,du\,dv=\frac{1}{4}\int_\Delta e^u\,dv\,du\\ &=\frac{1}{4}\int_{u=1}^{9}\left(\int_{v=u}^{81}e^u\,dv\right)du=\frac{1}{4}\int_1^9 e^u(81-u)\,du\\ &=\frac{81}{4}\int_1^9 e^u\,du-\frac{1}{4}\int_1^9 e^u u\,du\\ &=\left\{\begin{matrix} f'=e^u & f=e^u\\ g=u & g'=1\end{matrix}\right\}=\frac{81}{4}\int_1^9 e^u\,du-\frac{1}{4}\left(ue^u|_1^9-\int_1^9 e^u\,du\right)\\ &=\frac{82}{4}\left(e^9-e\right)-\frac{1}{4}\left(9e^9-e\right)=\frac{73}{4}e^9-\frac{81}{4}e\end{aligned}$$

תרגיל 9.8.

חשבו את שטח האליפסה $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, כאשר $a,b>0$.

פתרון:

נבצע את החלפת המשתנים הבאה:

$$\begin{cases}x=ar\cos\theta\\ y=br\sin\theta\end{cases}$$

מתקיים:

$$1=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{a^2r^2\cos^2\theta}{a^2}+\frac{b^2r^2\sin^2\theta}{b^2}=r^2$$

ולכן, תחום האינטגרציה החדש הוא $\begin{cases}0\le\theta\le2\pi\\ 0\le r\le1\end{cases}$ נחשב את היעקוביאן:

$$J=\begin{vmatrix}a\cos\theta & -ar\sin\theta\\ b\sin\theta & br\cos\theta\end{vmatrix}=abr\cos^2\theta+abr\sin^2\theta=abr$$

הוא מתפאס ב$r=0$, אבל זו קבוצה משטח אפס. ההעתקת החלפת המשתנים שלנו היא חח"ע בכל מקום פרט ל $r=0$, על, וגזירה ברציפות, אז אפשר להפעיל את משפט החלפת המשתנים:

$$\begin{aligned}\text{Area} &= \iint_D dx\,dy=\iint_\Delta abr\,dr\,d\theta=ab\int_{\theta=0}^{2\pi}\int_{r=0}^{1}r\,dr\,d\theta\\ &=ab\int_{\theta=0}^{2\pi}\left.\frac{r^2}{2}\right|_{r=0}^{r=1}d\theta=\pi ab\end{aligned}$$

9.4 | תרגול נוסף

תרגיל 9.9.

חשבו את $\iint_D e^{3x+6y}\,dx\,dy$ כאשר $D=[0,1]\times[0,4]$.

פתרון:

נשים לב כי $e^{3x+6y}=e^{3x}e^{6y}$, אז אפשר להשתמש בתרגיל שעשינו מוקדם יותר ולקבל:

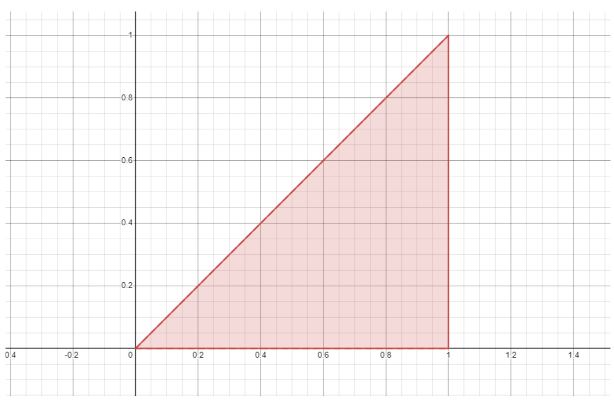
$$\iint_D e^{3x+6y}\,dx\,dy=\left(\int_0^1 e^{3x}\,dx\right)\left(\int_0^4 e^{6y}\right)=\left(\frac{e^{3x}}{3}\bigg|_{x=0}^{x=1}\right)\left(\frac{e^{6y}}{6}\bigg|_{y=0}^{y=4}\right)$$
$$=\left(\frac{1}{3}e^3-\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{6}e^{24}-\frac{1}{6}\right)$$

תרגיל 9.10.

חשבו את $\iint_D \frac{\sin x}{x}\,dx\,dy$ עבור D המשולש החסום בין $y=x$, $x=1$ וציר ה-x.

פתרון:

נתחיל בלשרטט את התחום הזה:



נשים לב כי אפשר לכתוב את התחום הזה על ידי:

$$D=\{(x,y)|0\le x\le 1,0\le y\le x\}$$

כלומר, D תחום פשוט ביחס לציר הy (האם הוא גם פשוט ביחס לציר הx?), ולכן:

$$\begin{aligned}\iint_D f(x,y) &= \int_0^1 \left(\int_0^x \frac{\sin(x)}{x}\,dy\right)\,dx = \int_0^1 \frac{\sin(x)}{x}\left(\int_0^x \,dy\right)\,dx = \int_0^1 \frac{\sin(x)}{x}\,(x)\,dx \\ &= \int_0^1 \sin(x)\,dx = [-\cos(x)]\Big|_{x=0}^{x=1} = -\cos(1)+1 = 1-\cos(1)\end{aligned}$$

תרגיל 9.11.

חשבו $I = \iint_D \frac{x+3y}{x^4} e^{\frac{y}{x^3}}\,dx\,dy$, כאשר D הוא התחום החסום ע"י המשוואות $\begin{cases} x+y=1 \\ x+y=\frac{1}{2} \\ y=x^3 \\ y=4x^3 \end{cases}$.

פתרון:

מטרתנו היא "לרבע" את התחום ולכן נבחר בהחלפת המשתנים הבאה : $\begin{cases} v=x+y \\ u=\frac{y}{x^3}\end{cases}$, נחשב את גבולות האינטגרציה החדשים :

$$\begin{array}{rcl} D & & \Delta \\ x+y=1 & \longrightarrow & v=1 \\ x+y=\dfrac{1}{2} & \longrightarrow & v=\dfrac{1}{2} \\ y=x^3 & \longrightarrow & u=1 \\ y=4x^3 & \longrightarrow & u=4 \end{array}$$

נחשב את היעקוביאן, במקרה זה יהיה קל יותר לחשב את היעקוביאן ההופכי, שכן u,v מובאים כבר כפונקציות של x,y :

$$\begin{aligned} J^{-1} &= \begin{vmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -3yx^{-4} & \frac{1}{x^3} \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -\frac{3y}{x^4} - \frac{1}{x^3} = -\frac{(3y+x)}{x^4} \\ &\Rightarrow |J| = \left|\tfrac{1}{J^{-1}}\right| = \tfrac{x^4}{3y+x}\end{aligned}$$

היעקוביאן מוגדר ושונה מאפס, פרט לקבוצה משטח אפס (מהי? מצאו אותה והסבירו מדוע היא משטח אפס).
נחשב:

$$\begin{aligned} I &= \iint_D \frac{x+3y}{x^4} e^{\frac{y}{x^3}}\,dx\,dy = \iint_\Delta \frac{x+3y}{x^4} e^{\frac{y}{x^3}}\,|J|\,du\,dv \\ &=_\star \iint_\Delta e^u\,du\,dv = \int_{v=\frac{1}{2}}^1 \int_{u=1}^4 e^u\,du\,dv = \frac{1}{2}\left(e^4-e\right)\end{aligned}$$

כאשר $=_\star$ מכיוון שלכל $(x,y)\in D$ מתקיים $\frac{3y+x}{x^4} > 0$.

תרגיל 9.12.

חשבו את השטח החסום על-ידי העקומה $(2x+y+1)^2+(x-y)^2=1$.

פתרון:

ננסה לבחור קואורדינטות חדשות כך שיתקבל מעגל: $\begin{cases} u=2x+y+1 \\ v=x-y \end{cases}$, ונקבל כי התחום החדש Δ חסום על-ידי $u^2+v^2=1$. נחשב את היעקוביאן:

$$J^{-1}=\begin{vmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}=-3\neq 0$$

כלומר, $|J|=\frac{1}{3}\neq 0$, נקבל:

$$\text{Area}=\iint_D dx\,dy=\iint_\Delta \frac{1}{3}\,du\,dv=\frac{1}{3}\iint_{u^2+v^2\leq 1} du\,dv=\frac{\pi}{3}$$

שכן, $\iint_{u^2+v^2\leq 1} du\,dv=\pi$ הוא שטח של מעגל ברדיוס 1.

תרגול עשירי

10.1 | אינטגרל משולש

רעיון

תהי $f(x, y, z)$ פונקציה רציפה בתחום D במרחב $\mathbb{R}^3$, כלומר $f : D \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$. אינטגרל משולש הינו אינטגרל מהצורה:

$$\iiint_D f(x, y, z)dV$$

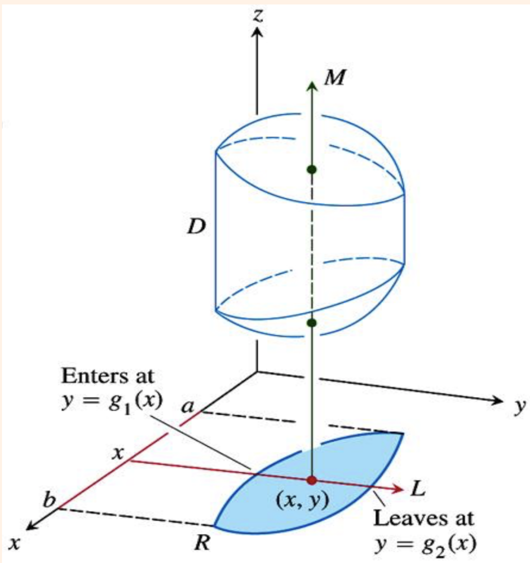
כמו באינטגרל כפול, אם התחום שלנו הוא "פשוט":

$$D = \{(x, y, z)|(x, y) \in R, f_1(x, y) \le z \le f_2(x, y)\},$$

כאשר:

$$R = \{(x, y)|a \le x \le b, g_1(x) \le y \le g_2(x)\}$$

עבור f_1, f_2, g_1, g_2 רציפות.



אז נקבל:

$$\iiint_D h(x,y,z)dV = \int_{x=a}^{b}\int_{y=g_1(x)}^{g_2(x)}\int_{z=f_1(x,y)}^{f_2(x,y)} h(x,y,z)dzdydx$$

תרגיל 10.1.

זהו תרגיל ממבחן. חשבו את $I=\iiint_E \frac{dV}{(x+y+z+1)^3}$ כאשר E הגוף החסום ע"י המישורים:

$$x=0,\qquad y=0,\qquad z=0,\qquad x+y+z=1$$

פתרון:
נתחיל מגבולות האינטגרציה, תחילה נראה כי:

$$0\le z\le 1-x-y$$

נחפש את **כל** התחומים של x,y, כלומר, נטיל את הגוף שלנו על מישור xy, ונקבל כי ההיטל חסום על ידי:

$$x=0,\qquad y=0,\qquad x+y=1$$

כלומר:

$$0\le y\le 1-x\qquad 0\le x\le 1$$

אז:

$$\begin{aligned}
\iiint_E \frac{dV}{(x+y+z+1)^3} &= \int_{x=0}^{1}\int_{y=0}^{1-x}\int_{z=0}^{1-x-y}\frac{1}{(x+y+z+1)^3}dzdydx\\
&= \int_{x=0}^{1}\int_{y=0}^{1-x}\left[-\frac{1}{2}(x+y+z+1)^{-2}\right]_{z=0}^{1-x-y}dydx\\
&= \int_{x=0}^{1}\int_{y=0}^{1-x}\left(-\frac{1}{8}+\frac{1}{2}(x+y+1)^{-2}\right)dydx\\
&= \int_{x=0}^{1}\left[-\frac{1}{8}y-\frac{1}{2}(x+y+1)^{-1}\right]_{y=0}^{1-x}dx\\
&= \int_{x=0}^{1}\left(-\frac{1}{8}(1-x)-\frac{1}{4}+\frac{1}{2}(x+1)^{-1}\right)dx\\
&= \int_{x=0}^{1}\left(-\frac{3}{8}+\frac{x}{8}+\frac{1}{2}(x+1)^{-1}\right)dx\\
&= \left[-\frac{3}{8}x+\frac{1}{16}x^2+\frac{1}{2}\ln|x+1|\right]_0^1 = -\frac{3}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{2}\ln 2\\
&= \frac{1}{2}\ln 2-\frac{5}{16}
\end{aligned}$$

תרגיל 10.2.

זהו תרגיל ממבחן.
חשבו את נפח הגוף V המוגדר על ידי:

$$x^2 + y^2 \leq 2y$$
$$0 \leq z \leq (x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}$$

פתרון:
באופן דומה לאינטגרל דו-ממדי, הנפח של גוף $V \subset \mathbb{R}^3$ מוגדר על ידי:

$$\text{Vol}(V) = \iiint_V 1dV$$

נסמן, $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 \leq 2y\}$, אז:

$$\text{Vol}\, V = \iiint_V 1dV = \iint_D \left(\int_{z=0}^{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} 1dz \right) dydx = \iint_D (x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}} dxdy$$

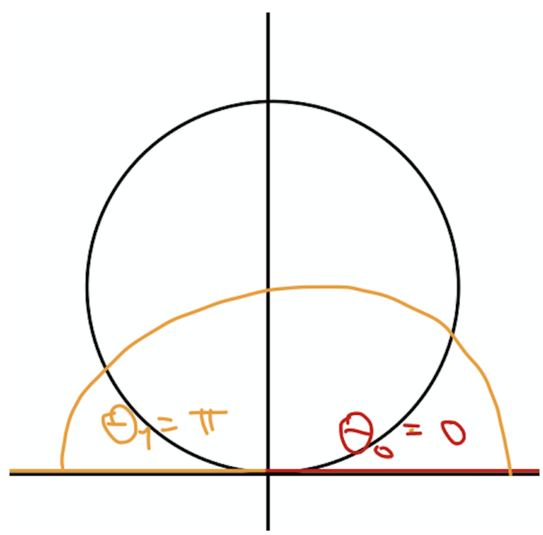
כדי לפשט את התחום D נבצע החלפה קוטבית. כעת האי-שוויון ב- D נרשם כך:

$$0 \leq x^2 + y^2 \leq 2y \Rightarrow 0 \leq r^2 \leq 2r \sin\theta \Rightarrow 0 \leq r \leq 2\sin\theta$$

לגבי הזווית, אפשר לראות מהא"ש כי $0 \leq \sin\theta$ כי $0 \leq \theta \leq \pi$, אבל מעבר לכך, נשרטט התחום:

$$x^2 + y^2 = 2y \Rightarrow x^2 + (y-1)^2 = 1$$

ואז נראה כי התחום של הזווית הוא בהחלט $0 \leq \theta \leq \pi$:



נשאר לבצע החלפת משתנים, (לא נשכח את היעקוביאן $J=r$!)

$$\begin{aligned}\text{Vol}(V) &= \iint_D (x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}dxdy = \int_0^{\pi}\int_0^{2\sin\theta}(r^2)^{3/2}rdrd\theta \\ &= \int_0^{\pi}\left[\frac{r^5}{5}\right]_0^{2\sin\theta}d\theta = \frac{32}{5}\int_0^{\pi}(1-\cos^2\theta)^2\sin\theta d\theta \\ &\overset{t=\cos\theta}{=} -\int_1^{-1}(1-t^2)^2dt = \frac{64}{5}\int_0^1(1-t^2)^2dt \\ &= \frac{64}{5}\left[t-\frac{2}{3}t^3+\frac{1}{5}t^5\right]_0^1 = \frac{512}{75}\end{aligned}$$

תזכורת – (חישוב "מסה" בעזרת "צפיפות")

נניח ויש לנו גוף במרחב Ω, עם צפיפות ρ, כאשר:

$$\rho:\Omega\to\mathbb{R}$$

נוכל לסמן את מסת הגוף Ω להיות:

$$M=\iiint_\Omega \rho\left(x,y,z\right)dV$$

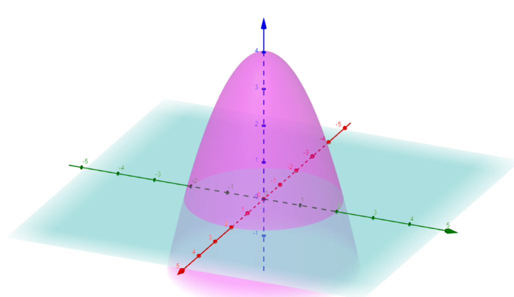
נשים לב כי אם $\rho=1$, אז $M=\text{Vol}\,\Omega$.

תרגיל 10.3.

מצאו את המסה של גוף Ω, המוגדר להיות הגוף החסום מלמטה ע"י הדיסק $x^2+y^2\leq 4$ במישור xy $(z=0)$, ומלמעלה ע"י הפרבולואיד $z=4-x^2-y^2$, עם צפיפות אחידה δ.

פתרון:

נשרטט את הגוף:



אז:

$$M=\iint_{x^2+y^2\leq 4}\int_{z=0}^{4-x^2-y^2}\delta dzdydx=\delta\iint_{x^2+y^2\leq 4}4-x^2-y^2dydx$$

נעבור לקואורדינטות פולריות:

$$M=\delta\int_0^{2\pi}\int_0^2\left(4-r^2\cos^2\theta-r^2\sin^2\theta\right)rdrd\theta=\delta\int_0^{2\pi}\int_0^2 4r-r^3drd\theta$$
$$=\delta\int_0^{2\pi}\left(2r^2-\frac{r^4}{4}\right)\Big|_0^2 d\theta=\delta\int_0^{2\pi}4d\theta=8\pi\delta$$

תזכורת – (החלפת משתנים באינטגרל משולש)

החלפת משתנים באינטגרל משולש דומה מאוד החלפת משתנים באינטגרל כפול.
נניח כי $f:\Omega\subset\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ פונקציה רציפה, ו-$\Phi:\Delta\subset\mathbb{R}^3\to\Omega$ העתקה חד-חד ערכית, על, וגזירה ברציפות כאשר נסמן:

$$(x,y,z)=\Phi(u,v,w)=(x(u,v,w),y(u,v,w),z(u,v,w))$$

נסמן את היעקוביאן של Φ על ידי:

$$J(u,v,w)=\det\begin{pmatrix}\frac{\partial x}{\partial u}(u,v,w) & \frac{\partial x}{\partial v}(u,v,w) & \frac{\partial x}{\partial w}(u,v,w)\\ \frac{\partial y}{\partial u}(u,v,w) & \frac{\partial y}{\partial v}(u,v,w) & \frac{\partial y}{\partial w}(u,v,w)\\ \frac{\partial z}{\partial u}(u,v,w) & \frac{\partial z}{\partial v}(u,v,w) & \frac{\partial z}{\partial w}(u,v,w)\end{pmatrix}$$

אם $J(u,v,w)\neq 0$ לכל $(u,v,w)\in\Delta$, אז:

$$\iiint_\Omega f(x,y,z)\,dxdydz=\iiint_\Delta f\left(x\left(u,v,w\right),y\left(u,v,w\right),z\left(u,v,w\right)\right)|J|\,dudvdw$$

תרגיל 10.4.

חשבו את האינטגרל:

$$\int_0^3\int_0^4\int_{\frac{y}{2}}^{\frac{y}{2}+1}\left(\frac{2x-y}{2}+\frac{z}{3}\right)dxdydz$$

<u>פתרון:</u>
אם נתבונן בתחום האינטגרציה, נשים לב כי $\frac{y}{2}\leq x\leq\frac{y}{2}+1$, כלומר, $0\leq x-\frac{y}{2}\leq 1$, ולכן מתבקש להגדיר $u=x-\frac{y}{2}=\frac{2x-y}{2}$, ואז גם נקבל את u בפונקציה. לגבי שאר גבולות האינטגרציה, הם בעיקרון כבר מלבניים אז לא נשנה אותם, כלומר נשתמש בהחלפת המשתנים הבאה:

$$\begin{cases}u=\frac{2x-y}{2}\\ v=y\\ w=z\end{cases}$$

נחשב יעקוביאן:

$$J^{-1} = \begin{vmatrix} u_x & u_y & u_z \\ v_x & v_y & v_z \\ w_x & w_y & w_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & \frac{-1}{2} \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \Rightarrow |J| = 1 \neq 0$$

החלפת המשתנים שלנו היא חד-חד ערכית, על, וגזירה ברציפות, ולכן אפשר להחליף משתנים באינטגרל:

$$\begin{aligned} I &= \int_0^3 \int_0^4 \int_0^1 \left(u + \frac{w}{3}\right) |J| \, dudvdw \\ &= \int_0^3 \int_0^4 \frac{1}{2} + \frac{w}{3} dvdw = 4 \int_0^3 \frac{1}{2} + \frac{w}{3} dw = 4(\frac{1}{2}w + \frac{w^2}{6})\Big|_{w=0}^{w=3} \\ &= 4(\frac{3}{2} + \frac{9}{6}) = 4 \cdot \frac{18}{6} = 12 \end{aligned}$$

תרגיל 10.5.

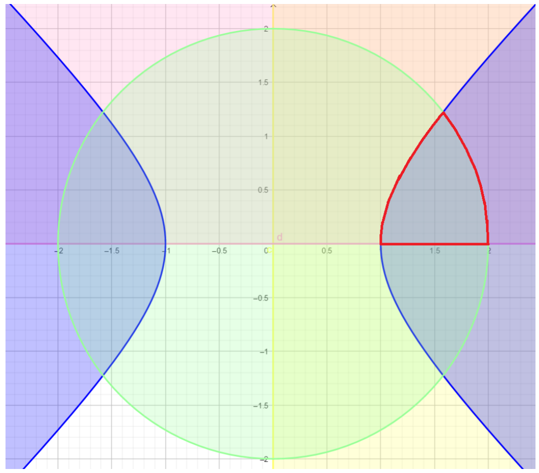
זהו תרגיל ממבחן.
יהא $V \subset \mathbb{R}^3$ התחום החסום ע"י המשטחים:

$$z = 1, \quad z = 0, \quad y = 0, \quad x = 0, \quad x^2 - y^2 \geq 1, \quad 0 \leq x^2 + y^2 \leq 4$$

כאשר $x \geq 0$, $y \geq 0$.
חשבו את האינטגרל:

$$I = \iiint_V \left(x^5yz - y^5xz\right) dxdydz$$

פתרון:
נתחיל מלשרטט את תחום האינטגרציה, נבין כי $z \in [0,1]$, ואם הנטיל את התחום על משיור xy, נקבל את הציור הבא:



נוכל לראות כי לכל y בתחום,

$$x_1(y) := \sqrt{1+y^2} \leq x \leq \sqrt{4-y^2} := x_2(y)$$

נמצא את נקודת החיתוך של העקומות:

$$\sqrt{4-y^2} = \sqrt{1+y^2} \Rightarrow y = \sqrt{\frac{3}{2}}$$

כלומר, תחום האינטגרציה במישור xy הוא:

$$R = \left\{(x,y) | \sqrt{1+y^2} \leq x \leq \sqrt{4-y^2}, 0 \leq y \leq \sqrt{\frac{3}{2}}\right\}$$

ננסה להפתר מהשורשים:

$$\begin{aligned}R &= \left\{(x,y) | \sqrt{1+y^2} \leq x \leq \sqrt{4-y^2}, 0 \leq y \leq \sqrt{\frac{3}{2}}\right\} \\ &= \left\{(x,y) | 1+y^2 \leq x^2 \leq 4-y^2, 0 \leq y \leq \sqrt{\frac{3}{2}}\right\} \\ &= \left\{(x,y) | 1 \leq x^2-y^2 \leq 4-2y^2, 0 \leq y \leq \sqrt{\frac{3}{2}}\right\}\end{aligned}$$

נבצע החלפת משתנים:

$$\begin{cases} w = z \\ v = y^2 \\ u = x^2 - y^2 \end{cases}$$

אז נקבל את התחום:

$$\Delta = \left\{ (u,v,w) \middle| 1 \le u \le 4-2v, 0 \le v \le \frac{3}{2}, 0 \le w \le 1 \right\}$$

נחשב:

$$J^{-1} = \begin{vmatrix} 2x & -2y & 0 \\ 0 & 2y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 4xy \Rightarrow J = \frac{1}{4xy} \neq 0$$

החלפת המשתנים שלנו היא חד-חד ערכית, על, וגזירה ברציפות,

$$\begin{aligned} \iiint_V \left(x^5yz - y^5xz\right) dxdydz &= \frac{1}{4} \iiint_\Delta \left(x^4 - y^4\right) zdudvdw \\ &= \frac{1}{4} \int_0^1 \int_0^{\frac{3}{2}} \int_1^{4-2v} \left(x^2-y^2\right)\left(x^2+y^2\right) zdudvdw \\ &= \frac{1}{4} \int_0^1 \int_0^{\frac{3}{2}} \int_1^{4-2v} u\left(u+2v\right) wdudvdw \\ &= \frac{1}{4} \left(\int_0^{\frac{3}{2}} \int_1^{4-2v} \left(u^2+2vu\right) dudv \right) \left(\int_0^1 wdw \right) \\ &= \frac{1}{8} \left(\int_0^{\frac{3}{2}} \left[\tfrac{u^3}{3} + vu^2\right]_1^{4-2v} dv \right) \\ &= \frac{1}{8} \left(\int_0^{\frac{3}{2}} \left(\frac{(4-2v)^3}{3} + v(4-2v)^2 - \tfrac{1}{3} - v \right) dv \right) = \frac{225}{128} \end{aligned}$$

רעיון

החלפת משתנים שימושית היא **קואורדינטות גליליות מוכללות,** כאשר על מישור xy יש לנו אליפסה:

$$\rho^2 = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$$

אז נבחר:

$$\begin{cases} x = a\rho\cos\theta \\ y = b\rho\sin\theta \\ z = z \end{cases}$$

ואז:

$$\rho \ge 0, \qquad 0 \le \theta < 2\pi, \qquad -\infty \le z \le \infty, \qquad |J| = |ab|\rho,$$

תרגיל 10.6.

יהא $V\subset\mathbb{R}^3$ התחום:

$$V=\left\{(x,y,z)\,|0\le z\le\sqrt{x^2+y^2}+1,x^2+y^2\le 1\right\}$$

חשבו את:

$$\iiint_V\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}dxdydz$$

פתרון:
נשים לב כי מדובר בגליל שחלקו העליון נחתך ע"י חרוט, לכן ניעזר בקואורדינטות גליליות.

$$\begin{cases}x=\rho\cos\theta\\ y=\rho\sin\theta\\ z=z\end{cases}$$

באופן מיידי אנו מקבלים תחום אינטגרציה נוח יותר:

$$\Delta=\left\{(\rho,\theta,z)\Big|\quad 0\le\rho\le 1,\quad 0\le\theta<2\pi,\quad 0\le z\le\rho+1\right\}$$

ולכן:

$$\iiint_V\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}dxdydz=\iiint_\Delta\frac{z}{\rho}\cdot\rho d\rho d\theta dz=\int_0^{2\pi}\int_0^1\int_0^{\rho+1}zdzd\rho d\theta=\int_0^{2\pi}\int_0^1\frac{(\rho+1)^2}{2}d\rho d\theta$$
$$=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\left(\frac{(\rho+1)^3}{3}\Bigg|_0^1\right)d\theta=\frac{1}{2}\cdot 2\pi\cdot\left(\frac{8}{3}-\frac{1}{3}\right)=\frac{7\pi}{3}$$

תרגיל 10.7.

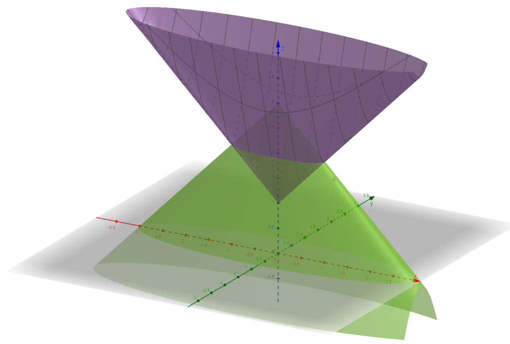
מצאו את הנפח החסום ע"י המשטחים הבאים:

$$z=1+\sqrt{x^2+16y^2},\qquad z=3-\sqrt{x^2+16y^2}$$

פתרון:
עלינו לחשב את

$$\iint_D\int_{1+\sqrt{x^2+16y^2}}^{3-\sqrt{x^2+16y^2}}1dzdA$$

נותר להבין מהו התחום D, נשרטט אותו:



נמצא את משוואת החיתוך של הצורות:

$$1+\sqrt{x^2+16y^2}=3-\sqrt{x^2+16y^2}$$
$$x^2+16y^2=1$$
$$x^2+\frac{1}{(\frac{1}{4^2})}y^2=1$$

כלומר D מוטל על מישור xy הוא האליפסה $x^2+\frac{1}{(\frac{1}{4^2})}y^2=1$.
נבצע החלפת משתנים גלילית מוכללת:

$$\begin{cases} x=\rho\cos\theta \\ y=\frac{1}{2}\rho\sin\theta \\ z=z \end{cases}$$

ואז התחום הינו:

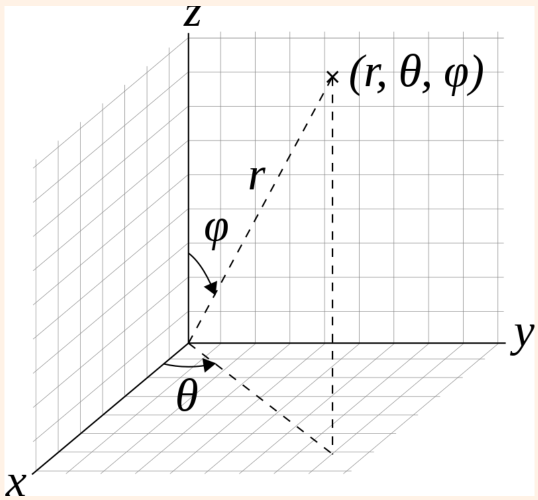
$$\Delta=\left\{(\rho,\theta,z)\middle|\quad 0\le\rho\le 1,\quad 0\le\theta<2\pi,\quad 1+\rho\le z\le 3-\rho\right\}$$

כלומר:

$$\text{Vol}(V)=\int_0^{2\pi}\int_0^1\int_{1+\rho}^{3-\rho}\frac{1}{4}\rho dzd\rho d\theta=...=\frac{\pi}{6}$$

רעיון

החלפת משתנים שימושית נוספת היא **קואורדינטות כדוריות,** נניח ויש לנו כדור יחידה ב-$\mathbb{R}^3$: $\{(x,y,z)|\ x^2+y^2+z^2\le 1\}$, אנו יכולים למצוא הצגה טריגומטרית לכל ציר:



$$\begin{cases} x = r\sin\varphi\cos\theta \\ y = r\sin\varphi\sin\theta \\ z = r\cos\varphi \end{cases}$$

ונקבל:

$$r > 0, \quad 0 \le \theta < 2\pi, \quad 0 \le \varphi \le \pi, \quad |J| = r^2 \sin\varphi,$$

תרגיל 10.8.

יהא:

$$V = \left\{ (x,y,z) \left| x^2 + y^2 + (z-1)^2 \le 1 \right. \right\}$$

חשבו את האינטגרל:

$$\iiint_V \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z-1)^2}} dxdydz$$

פתרון:

נשים לב כי V הוא כדור ברדיוס 1 סביב הנקודה $(0,0,1)$, אז נבצע החלפת משתנים כדורית, רק שנזיז את קואורדינטת ה z ב 1.

$$\begin{cases} x = r\sin\varphi\cos\theta \\ y = r\sin\varphi\sin\theta \\ z-1 = r\cos\varphi \end{cases}$$

כמו בכדוריות נקבל כי $|J| = r^2 \sin\varphi$, גבולות האינטגרציה החדשים הם $\begin{cases} 0 \le \theta \le 2\pi \\ 0 \le \varphi \le \pi \\ 0 \le r \le 1 \end{cases}$.

אז:

$$\iiint_V \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+(z-1)^2}} dxdydz = \iiint_\Delta \frac{1}{r} \cdot r^2 \sin\varphi dr d\varphi d\theta$$
$$= 2\pi \cdot \tfrac{1}{2} \cdot 2 = 2\pi$$

10.2 | עקומים

תזכורת – (עקום)

עקום הוא פונקציה רציפה:

$$\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$$

כאשר נתמקד בעיקר ב$n=2$ או $n=3$, לפעמים נסמן:

$$\gamma(t) = (x(t), y(t), z(t))$$

- אם $\gamma(a)=\gamma(b)$, אז נקרא לγ עקום סגור.
- אם γ לא חותך את עצמו באף נקודה, פרט אולי לקצוות, כלומר:

$$\forall t \neq s \in (a,b), \gamma(t) \neq \gamma(s)$$

נקרא לγ עקום פשוט.

לעקומים שונים המתארים את אותה קבוצה במרחב נקרא עקומים שונים עד כדי פרמטריזציה, לדוגמא:

$$\gamma_1(t) = (0,t),\ t\in[0,1], \qquad \gamma_2(t) = (0,1-t),\ t \in [0,1]$$

$$\gamma_3(t) = (0, \sin(t)),\ t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \qquad \gamma_4(t) = (0, 3t+1)\ ,\ t \in \left[-\frac{1}{3}, 0\right]$$

אם γ עקום גזיר, אז $\dot\gamma(t_0) = \gamma'(t_0) = (x'(t_0), y'(t_0), z'(t_0))$ הוא הוקטור המשיק לעקום γ בנקודה t_0.

אם עקום γ גזיר ברציפות, ניתן לחשב את אורך העקום γ על הקטע $[a,b]$ על ידי:

$$\ell(\gamma) = \int_a^b \|\dot\gamma(t)\|\, dt = \int_a^b \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2} dt$$

נשים לב כי אם γ_1, γ_2 פרמטריזציות שונות של אותו עקום אז $\ell(\gamma_1) = \ell(\gamma_2)$.

תרגיל 10.9.

מצאו ביטוי כללי להיקף האליפסה

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

פתרון:

נבחר את הפרמטריזציה:

$$\begin{cases} x=a\cos\theta \\ y=b\sin\theta \end{cases}$$

כאשר $\theta\in[0,2\pi]$, אז:

$$\gamma'(t)=(-a\sin\theta,b\cos\theta)$$

ולכן:

$$\|\gamma'(t)\|=\sqrt{a^2\sin^2\theta+b^2\cos^2\theta}$$

כלומר:

$$\ell=\int_0^{2\pi}\sqrt{a^2\sin^2\theta+b^2\cos^2\theta}d\theta$$

הערה

עבור $a,b=1$ נקבל:

$$\ell=\int_0^{2\pi}\sqrt{\sin^2\theta+\cos^2\theta}d\theta=\int_0^{2\pi}1d\theta=2\pi$$

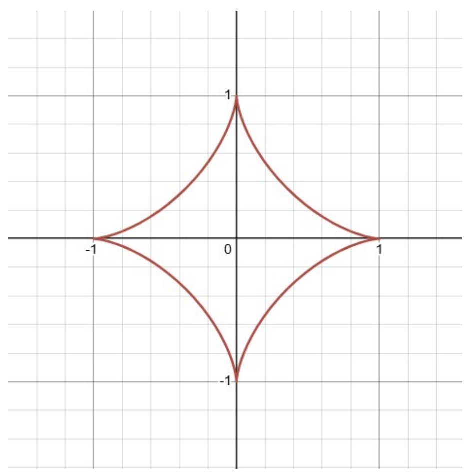
שזה באמת אורך מעגל היחידה, לעומת זאת, מסבר שעבור $a,b\neq 1$ אין לנו נוסחה פשוטה לאינטגרל הזה, ונוכל רק לקרב אותו.

תרגיל 10.10.

חשבו את אורך העקומה הנתונה ע"י הפרמטריזציה $t \in [0, 2\pi]$, $\begin{cases} x(t) = \cos^3 t \\ y(t) = \sin^3 t \end{cases}$.

פתרון:

$$\ell = \int_0^{2\pi} \|\gamma'(t)\| dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{\left(-3\cos^2 t \sin t\right)^2 + \left(3\sin^2 t \cos t\right)^2} dt$$
$$= 3\int_0^{2\pi} \sqrt{\cos^4 t \sin^2 t + \sin^4 t \cos^2 t} dt$$
$$= 3\int_0^{2\pi} \sqrt{\cos^2 t \sin^2 t \left(\cos^2 t + \sin^2 t\right)} dt$$
$$= 3\int_0^{2\pi} |\cos t \sin t|\, dt = 3 \cdot 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t \sin t dt$$
$$= 12\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t \sin t dt = 12 \cdot \frac{1}{2}\left[\sin^2 t\right]\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 12 \cdot \frac{1}{2} = 6$$



10.3 | אינטגרל קווי מסוג ראשון

תזכורת – (אינטגרל קווי מסוג ראשון)

בהנתן עקום $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^3$ גזיר ברציפות, ופונקציה רציפה $f : D \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, כאשר $\text{Im}\,\gamma \subset D$, אנו מגדירים את האינטגרל הקווי מסוג ראשון של f על גבי γ כך:

$$\int_\gamma f d\ell = \int_a^b f(\gamma(t))\|\gamma'(t)\|dt$$

אם נחשוב על γ כחוט, ועל f כצפיפות החוט (למרות ש f יכולה להיות גם שלילית), אז אפשר לחשוב על $\int_\gamma f d\ell$ כעל המסה של החוט.
במילים אחרות, אנו "זזים" על העקום $\gamma(t)$, וסוכמים את ערכי f בנקודה $\gamma(t)$, ומכפלים בארוך הקטע הקטן סביב הנקודה $\gamma(t)$, כלומר, $\|\gamma'(t)\|dt$.
ערך האינטגרל אינו תלוי בפרמטריזציה של γ.

תרגיל 10.11.

יהא $a > 0$, וC העקום הנתון ע"י הפרמטריזציה:

$$\begin{cases} x(t) = a(\cos t + t\sin t) \\ y(t) = a(\sin t - t\cos t) \end{cases}, t \in [0, 2\pi]$$

חשבו את:

$$\int_C (x^2 + y^2)\, d\ell$$

פתרון:
נחשב את $f(\gamma(t))$ ואת $\|\gamma'(t)\|$ ונציב באינטגרל הקווי:

$$\begin{aligned} f(\gamma(t)) &= f(a(\cos t + t\sin t), a(\sin t - t\cos t)) \\ &= (a(\cos t + t\sin t))^2 + (a(\sin t - t\cos t))^2 \\ &= a^2\left(\cos^2 t + 2t\cos t\sin t + t^2\sin^2 t + \sin^2 t - 2\sin t\cos t + t^2\cos^2 t\right) = a^2(1+t^2) \end{aligned}$$

$$\gamma'(t) = (a(-\sin t + \sin t + t\cos t), a(\cos t - \cos t + t\sin t)) = (at\cos t, at\sin t)$$

ולכן:

$$\|\gamma'(t)\| = \sqrt{(at\cos t)^2 + (at\sin t)^2} = |at| = at$$

סה"כ:

$$\int_C \left(x^2+y^2\right) d\ell = \int_0^{2\pi} a^2\left(1+t^2\right) atdt = a^3\left(\frac{t^2}{2}+\frac{t^4}{4}\right)\Big|_0^{2\pi}$$
$$= a^3\left(\frac{4\pi^2}{2}+\frac{16\pi^4}{4}\right)$$

תרגיל 10.12.

יהיו $a,b>0$, נסמן את העקום γ הנתון ע"י הפרמטריזציה:

$$\begin{cases} x = a\cos t \\ y = a\sin t \\ z = bt \end{cases}$$

חשבו את מסת γ עם פונקצית הצפיפות $f(x,y,z)=\frac{1}{x^2+y^2+z^2}$.

פתרון:
נחשב את $f(\gamma(t))$ ואת $\|\gamma'(t)\|$ ונציב באינטגרל הקווי:

$$f\left(\gamma\left(t\right)\right) = \frac{1}{\left(a\cos t\right)^2+\left(a\sin t\right)^2+\left(bt\right)^2} = \frac{1}{a^2+b^2t^2}$$

וכן:

$$\gamma'\left(t\right) = \left(-a\sin t, a\cos t, b\right)$$

ולכן:

$$\|\gamma'\left(t\right)\| = \sqrt{\left(-a\sin t\right)^2+\left(a\cos t\right)^2+b^2} = \sqrt{a^2+b^2}$$

סה"כ:

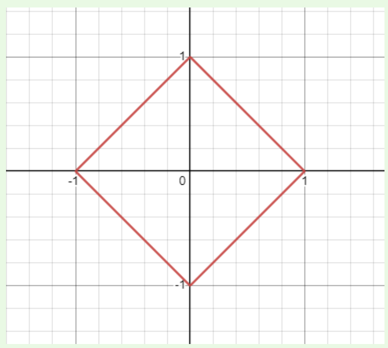
$$\int_\gamma f d\ell = \int_a^b f\left(\gamma\left(t\right)\right)\cdot\|\gamma'\left(t\right)\|dt = \int_0^{2\pi}\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a^2+b^2t^2}dt$$
$$= \sqrt{a^2+b^2}\cdot\int_0^{2\pi}\frac{1}{a^2}\cdot\frac{1}{\left(1+\left(\frac{b}{a}\right)^2t^2\right)}dt = \sqrt{a^2+b^2}\cdot\frac{1}{a^2}\int_0^{2\pi}\frac{1}{\left(1+\left(\frac{b}{a}t\right)^2\right)}dt$$

נבצע החלפת משתנים: $\begin{cases} t=0 \Rightarrow s=0 \\ t=2\pi \Rightarrow s=\frac{2b\pi}{a} \end{cases} \Rightarrow ds=\frac{b}{a}dt \Rightarrow s=\frac{b}{a}t$, אז:

$$\int_\gamma f d\ell = \sqrt{a^2+b^2}\cdot\frac{1}{a^2}\int_0^{2\pi}\frac{1}{\left(1+\left(\frac{b}{a}t\right)^2\right)}dt = \sqrt{a^2+b^2}\cdot\frac{1}{a^2}\cdot\frac{a}{b}\int_0^{\frac{2b\pi}{a}}\frac{1}{(1+s^2)}ds$$
$$= \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{ab}\left(\arctan(s)\Big|_{s=0}^{s=\frac{2b\pi}{a}}\right) = \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{ab}\left(\arctan\left(\frac{2b\pi}{a}\right)\right)$$

תרגיל 10.13.

חשבו את $\int_C f(x,y)d\ell$ כאשר $f(x,y)=xy$ ו־C המסילה $|x|+|y|=1$.



פתרון:

נחלק את המסילה ל־4 מסילות שונות, C_1,C_2,C_3,C_4 כאשר כל מסילה היא ישר, ואז מתקיים:

$$\int_C xyd\ell = \int_{C_1}xyd\ell + \int_{C_2}xyd\ell + \int_{C_3}xyd\ell + \int_{C_4}xyd\ell$$

נחשב את האינטגרלים עבור C_1,C_2:

C_1 היא המסילה $C_1(t)=(1-t,t)$ עבור $t\in[0,1]$, C_2 היא המסילה $C_2(t)=(-t,1-t)$ עבור $t\in[0,1]$,

אז:

$$C_1'(t)=(-1,1)\Rightarrow \|C_1'(t)\|=\sqrt{2}$$
$$C_2'(t)=(-1,-1)\Rightarrow \|C_2'(t)\|=\sqrt{2}$$

אז:

$$\int_{C_1}xyd\ell=\int_0^1 t(1-t)\sqrt{2}dt,\qquad \int_{C_2}xyd\ell=\int_0^1 -t(1-t)\sqrt{2}dt$$

בפרט:

$$\int_{C_1}xyd\ell+\int_{C_2}xyd\ell=0$$

תרגול עצמי

השלימו את התרגיל, והראו כי גם $\int_{C_3} xyd\ell + \int_{C_4} xyd\ell = 0$, ולכן $\int_C xyd\ell = 0$.

תרגיל 10.14.

חשבו את האינטגרל הקווי:

$$\int_C \left(x^2 + y^2\right) d\ell$$

כאשר C הוא העקום הנתון ע"י הפרמטריזציה:

$$\begin{cases} x(t) = 2\cos t \\ y(t) = 2\sin t \end{cases} \quad , t \in [0, 2\pi]$$

פתרון:

נחשב את $f(\gamma(t))$ ואת $\|\gamma'(t)\|$ ונציב באינטגרל הקווי:

$$\begin{aligned} f(\gamma(t)) &= f(2\cos t, 2\sin t) = (2\cos t)^2 + (2\sin t)^2 = 4(\cos^2 t + \sin^2 t) = 4 \\ \gamma'(t) &= (-2\sin t, 2\cos t) \\ \|\gamma'(t)\| &= \sqrt{(-2\sin t)^2 + (2\cos t)^2} = 2 \end{aligned}$$

סה"כ:

$$\int_C (x^2 + y^2) d\ell = \int_0^{2\pi} 4 \cdot 2dt = 8 \cdot 2\pi = 16\pi$$

תרגול אחד עשר

11.1 | אינטגרל קווי מסוג שני

תזכורת – (אינטגרל קווי מסוג שני)

יהא $\gamma : [a,b] \to D \subset \mathbb{R}^2$ עקום גזיר ברציפות, ויהא $\vec{F} : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ שדה וקטורי רציף על D, כך ש $\mathrm{Im}(\gamma) \subset D$. נסמן את האינטגרל הקווי מסוג שני בתור:

$$\int_\gamma \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

הוא מחשב את האינטראקציה של השדה $\vec{F}$ עם המסילה γ בצורה הבאה: בכל נקודה t, נתבונן ב $\left\langle \vec{F}(\gamma(t)), \gamma'(t) \right\rangle$ ונבצע אינטגרציה לפי t. בשפה פיזיקלית, אם נחשוב על γ כחלקיק שנע במרחב ועל $\vec{F}$ ככוח שפועל על החלקיק, אז $\int_\gamma \vec{F} \cdot d\vec{r}$ שווה לעבודה שמפעיל $\vec{F}$ על γ.

אם נסמן $\vec{F}(x,y) = (P(x,y), Q(x,y))$ כאשר $P, Q : D \to \mathbb{R}$, ו $\gamma(t) = (x(t), y(t))$, אז:

$$\int_\gamma \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_a^b \left\langle \vec{F}(\gamma(t)), \gamma'(t) \right\rangle dt = \int_a^b \left\langle \begin{pmatrix} P(x(t),y(t)) \\ Q(x(t),y(t)) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} \right\rangle dt$$
$$= \int_a^b P(x(t),y(t))x'(t) + Q(x(t),y(t))y'(t)dt$$

לעיתים נסמן $dx = x'(t)dt, dy = y'(t)dt$, ואז:

$$\int_\gamma \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_\gamma Pdx + Qdy$$

שימו לב שזה סימון בלבד! אבל הוא עוזר לנו לזכור את ההגדרה.
אם γ היא מסילה סגורה, כלומר $\gamma(a) = \gamma(b)$, נסמן:

$$\int_\gamma Pdx + Qdy = \oint_\gamma Pdx + Qdy$$

הערה

באופן דומה, אם אנו ב־$\mathbb{R}^3$:

$$\vec{F}(x,y,z) = (P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z)), \qquad \gamma(t) = (x(t), y(t), z(t))$$

אז:

$$\int_\gamma Pdx + Qdy + Rdz = \int_a^b \left\langle \vec{F}(\gamma(t)), \gamma'(t) \right\rangle dt$$

$$= \int_a^b P(x(t),y(t),z(t))x'(t) + Q(x(t),y(t),z(t))y'(t) + R(x(t),y(t),z(t))z'(t)dt$$

הערה

אינטגרל זה תלוי בפרמטריזציה של γ, בצורה הבאה:

1. אם γ_1, γ_2 פרמטריזציות של אותה מסילה, <u>וגם</u> $\gamma_1(a) = \gamma_2(a) = A, \gamma_1(b) = \gamma_2(b) = B$, אז אכן:

$$\int_{\gamma_1} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{\gamma_2} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

2. אם γ_1, γ_2 פרמטריזציות של אותה מסילה, אבל נקודות הקצה הפוכות, כלומר: $\gamma_1(a) = A = \gamma_2(b)$, $\gamma_1(b) = B = \gamma_2(a)$ אז עלינו להפוך את סימן האינטגרל

$$\int_{\gamma_1} \vec{F} \cdot d\vec{r} = -\int_{\gamma_2} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

כלומר, האינטגרל תלוי רק בכיוון הפרמטריזציה.

תרגיל 11.1.

חשבו את:

$$\int_\gamma ydx + xdy$$

כאשר γ המסילה העוברת על $y = x^2$ בין $x = 0$ ל־$x = 1$.

<u>פתרון:</u>

נתחיל בלהבין מהו $\vec{F}$, ולמצוא פרמטריזציה ל־γ.

$$\vec{F}(x,y) = (P(x,y), Q(x,y)) = (y, x)$$

כלומר, $P(x,y) = y, Q(x,y) = x$. עבור המסילה, מתקיים:

$$\gamma(t) = (x(t), y(t)) = (t, t^2), \qquad t \in [0,1]$$

אז לפי הגדרה:

$$\int_\gamma ydx + xdy = \int_0^1 y(t)x'(t) + x(t)y'(t) = \int_0^1 t^2 + t \cdot 2t = \int_0^1 3t^2 = 1$$

תרגיל 11.2.

חשבו את העבודה של השדה הוקטורי $\vec{F} = (x^2, 2y, z^2)$ לאורך הישר העובר בין $(1,2,0)$ ל$(3,-1,1)$.

<u>**פתרון:**</u>
נתחיל בלמצוא פרמטריזציה לעקום שלנו:

$$\gamma(t) = (1-t)(1,2,0) + t(3,-1,1) = (1+2t, 2-3t, t), \qquad t \in [0,1]$$

כלומר:

$$x(t) = 1+2t \Rightarrow dx = 2dt, \qquad y(t) = 2-3t \Rightarrow dy = -3dt, \qquad z(t) = t \Rightarrow dz = dt$$

אז:

$$\begin{aligned}
\int_\gamma \vec{F} \cdot d\vec{r} &= \int_L \left(x^2dx + 2ydy + z^2dz\right) \\
&= \int_0^1 \left((1+2t)^2 2 + 2(2-3t)(-3) + t^2\right) dt \\
&= \int_0^1 \left(2\left(1+4t+4t^2\right) - 6(2-3t) + t^2\right) dt \\
&= \int_0^1 \left(9t^2 + 26t - 10\right) dt = \left[3t^3 + 13t^2 - 10t\right]\Big|_0^1 = 6
\end{aligned}$$

11.2 | שדה משמר

תזכורת – (שדה משמר)

שדה וקטורי רציף $\vec{F}(x,y)=(P(x,y),Q(x,y))$ נקרא <u>שדה משמר בתחום D</u> אם עבור כל זוג עקומים, $\gamma_1,\gamma_2\subset D$ עם אותן נקודות קצה $\gamma_1(a)=\gamma_2(a)$, $\gamma_1(b)=\gamma_2(b)$ מתקיים:

$$\int_{\gamma_1}\vec{F}\cdot d\vec{r}=\int_{\gamma_2}\vec{F}\cdot d\vec{r}$$

במקרה זה, האינטגרל על גבי כל מסילה סגורה γ חייב להתאפס:

$$\oint_{\gamma}\vec{F}\cdot d\vec{r}=0$$

למעשה - ראינו בהרצאה כי זה תנאי שקול, כלומר אם $\oint_\gamma \vec{F}\cdot d\vec{r}=0$ לכל מסילה סגורה γ בD, אז $\vec{F}$ שדה משמר בD.

תרגיל 11.3.

יהא $\vec{F}(x,y)=(y,2x)$, האם $\vec{F}$ שדה משמר ב $\mathbb{R}^2$?

<u>**פתרון:**</u>

נראה כי השדה לא משמר: נסמן $p_1=(-1,0),p_2=(1,0)$, נחפש 2 מסילות, γ_1,γ_2 מ p_1 ל p_2 כך ש:

$$\int_{\gamma_1}Pdx+Qdy\neq\int_{\gamma_2}Pdx+Qdy$$

תהא המסילה $\gamma_1(t)=(t,0)$, כאשר $t\in[-1,1]$, אז:

$$\int_{\gamma_1}Pdx+Qdy=\int_{-1}^{1}0\cdot 1+2t\cdot 0dt=0$$

תהא המסילה $\gamma_2(t)=(\cos(t),\sin(t))$, כאשר $t\in[\pi,2\pi]$, אז:

$$\int_{\gamma_2}Pdx+Qdy=\int_{\pi}^{2\pi}\sin(t)(-\sin(t))+2\cos(t)\cos(t)dt=\int_{\pi}^{2\pi}-\sin^2(t)+2\cos^2(t)dt$$
$$=\int_{\pi}^{2\pi}-1+3\cos^2(t)dt=-\pi+3\int_{\pi}^{2\pi}\cos^2(t)dt=...=\frac{\pi}{2}$$

כלומר השדה לא משמר.

תזכורת – (פונקציית פוטנציאל)

יהא D תחום פתוח וקשיר. ראינו בהרצאה את 2 המשפטים הבאים:

1. אם קיימת $U : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ פונקציה גזירה ברציפות, המקיימת $\vec{F} = \nabla U$, כלומר:

$$\forall (x,y) \in D, \qquad U_x(x,y) = P(x,y), \qquad U_y = Q(x,y)$$

אז $\vec{F}$ שדה משמר בD.

2. אם $\vec{F}$ שדה משמר, אז נבחר $A \in D$, ונגדיר את הפונקציה הבאה, לכל $(x,y) \in D$, נסמן $\gamma_{(x,y)}$: $[a,b] \to D$ מסילה כלשהי מA ל(x,y), כלומר $\gamma_{(x,y)}(b) = (x,y)$, $\gamma_{(x,y)}(a) = A$, אז:

$$U(x,y) = \int_{\gamma_{(x,y)}} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

היא פונקציה גזירה ברציפות המקיימת $\nabla U = \vec{F}$.

כלומר, $\vec{F}$ שדה משמר אמ"מ $\vec{F} = \nabla U$ עבור U גזירה ברציפות כלשהי.
נקרא ל U **<u>פונקציית פוטנציאל של</u>** $\vec{F}$, במקרה זה, נשים לב כי:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}U(\gamma(t)) &= \frac{\partial}{\partial t}\left(U(x(t),y(t))\right) = U_x(x(t),y(t))x'(t) + U_y(x(t),y(t))y'(t) \\ &= P(x(t),y(t))x'(t) + Q(x(t),y(t))y'(t) = \left\langle \vec{F}(\gamma(t)), \gamma'(t) \right\rangle\end{aligned}$$

כאשר סימנו $\gamma(t) = (x(t), y(t))$. אז:

$$\int_\gamma \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_a^b \left\langle \vec{F}(\gamma(t)), \gamma'(t) \right\rangle dt = \int_a^b \frac{\partial}{\partial t}U(\gamma(t))dt = U(\gamma(b)) - U(\gamma(a)) = U(B) - U(A)$$

תזכורת

נזכור כי ראינו כי אם $\vec{F} = (P,Q) = \nabla U$, אז:

$$Q_x(x,y) = P_y(x,y)$$

כלומר, אם $\vec{F}$ משמר ב D, אז בהכרח $P_x(x,y) = Q_y(x,y)$ לכל $(x,y) \in D$.

תרגיל 11.4.

מצאו את הפוטנציאל של הפונקציות הבאות:

.1

$$\vec{F} = (2xy + 3y, x^2 + 3x - 5)$$

.2

$$\vec{F} = \left(\frac{y(3x^3-1)}{x}, x^3 + \cos(y) - \ln(x)\right)$$

פתרון:

1. נזכיר כי אנו מחפשים $U(x,y)$ כך ש $\nabla U = \vec{F}$, כלומר:

$$U_x = P(x,y) = 2xy + 3y, \qquad U_y = Q(x,y) = x^2 + 3x - 5$$

בפרט,

$$U(x,y) = \int P(x,y)dx = \int (2xy+3y)dx = 2y \cdot \frac{x^2}{2} + 3xy + C_1(y) = yx^2 + 3xy + C_1(y)$$

וגם:

$$U(x,y) = \int Q(x,y)dy = \int (x^2+3x-5)dy = yx^2 + 3xy - 5y + C_2(x)$$

כלומר:

$$yx^2 + 3xy + C_1(y) = yx^2 + 3xy - 5y + C_2(x) \Rightarrow C_1(y) + 5y = C_2(x)$$

נבחר למשל $C_1(y) = -5y, C_2(x) = 0$, אז:

$$U(x,y) = yx^2 + 3xy - 5y$$

הערה

נשים לב כי היה אפשר לבחור גם $C_1(y) = -5y+2025, C_2(x) = -2025$, אז היינו מקבלים:

$$U(x,y) = yx^2 + 3xy - 5y + 2025$$

וזה מתאים לעובדה הבאה:
אם $U(x,y)$ פונקציית פוטנציאל של $\vec{F}$, אז גם $V(x,y) = U(x,y) + c$ היא פונקציית פוטנציאל של $\vec{F}$ לכל $c \in \mathbb{R}$.

2. נבצע אותו טריק:

$$U(x,y) = \int \frac{y(3x^3-1)}{x}dx = \int \left(3yx^2 - \frac{y}{x}\right)dx = yx^3 - y\ln(x) + C_1(y)$$

$$U(x,y) = \int \left(x^3 + \cos(y) - \ln(x)\right)dy = yx^3 + \sin(y) - y\ln(x) + C_2(x)$$

לאחר השוואת הפתרונות נראה כי $C_1(y) = \sin(y), C_2(x) = 0$, ולכן:

$$U(x,y) = yx^3 + \sin(y) - y\ln(x) + c$$

הפוטנציאל של $\vec{F}$ לכל $c \in \mathbb{R}$.

תרגיל 11.5.

חשבו את האינטגרל:

$$\int_\gamma \left(\frac{1}{x^2}\sin y\cdot e^{\frac{1}{x}}+y^3\right)dx+\left(3y^2x+\sin y-\cos y\cdot e^{\frac{1}{x}}\right)dy$$

כאשר γ היא מסילה המונחת על חלק מהמעגל $(x-2)^2+y^2=1$, המתחילה בנקודה $(2,1)$ ונגמרת בנקודה $(2,-1)$, עם כיוון השעון.

פתרון:

קצת מפחיד לחשב את האינטגרל הזה ישירות, אז נבדוק האם השדה משמר ב$\mathbb{R}^2$, נשים לב שמתקיים:

$$P_y=\frac{d}{dy}\left(\frac{1}{x^2}\sin y\cdot e^{\frac{1}{x}}+y^3\right)=\frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}\cos y+3y^2$$
$$Q_x=\frac{d}{dx}\left(3y^2x+\sin y-\cos y\cdot e^{\frac{1}{x}}\right)=3y^2-\frac{-1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}\cos y$$

כלומר מתקיים $P_y=Q_x$ לכל $(x,y)\in\mathbb{R}^2$.

הערה

בהמשך התרגול נראה כי זה אומר לנו כי השדה משמר, אבל כרגע אנו עדיין לא יודעים זאת, אבל, אם היינו מקבלים $P_y\neq Q_x$ היינו יודעים כי השדה לא משמר, ולכן לא היינו צריכים לחשב את האינטגרל הזה.

נחפש פונקציית פוטנציאל $U(x,y)$:

$$U(x,y)=\int P(x,y)dx=\int\left(\frac{1}{x^2}\sin y\cdot e^{\frac{1}{x}}+y^3\right)dx=-\sin y\cdot e^{\frac{1}{x}}+y^3x+C_1(y)$$

וגם:

$$U(x,y)=\int Q(x,y)dy=\int\left(3y^2x+\sin y-\cos y\cdot e^{\frac{1}{x}}\right)dy=y^3x-\cos y-\sin y\cdot e^{\frac{1}{x}}+C_2(x)$$

כלומר:

$$-\sin y\cdot e^{\frac{1}{x}}+y^3x+C_1(y)=y^3x-\cos y-\sin y\cdot e^{\frac{1}{x}}+C_2(x)\Rightarrow C_1(y)+\cos y=C_2(x)$$

כלומר, $C_2(x)=0$, $C_1(y)=-\cos y$, ולכן:

$$U(x,y)=y^3x-\cos y-\sin y\cdot e^{\frac{1}{x}}$$

ולכן:

$$\begin{aligned}\int_\gamma Pdx+Qdy&=U(2,-1)-U(2,1)\\&=\left(-\sin(-1)\cdot e^{\frac{1}{2}}-2-\cos(-1)\right)-\left(-\sin(1)\cdot e^{\frac{1}{2}}+2-\cos(1)\right)\\&=2\sin(1)\cdot e^{\frac{1}{2}}-4\end{aligned}$$

11.3 | משפט גרין

תזכורת – (משפט גרין)

יהא D תחום פשוט קשר ב $\mathbb{R}^2$, (כלומר, תחום בלי חורים). תהא $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ מסילה סגורה, פשוטה וגזירה למקוטעין, **שתחומת את התחום D** כלומר $\partial D = \gamma([0,1])$, **במגמה חיובית כלפי D**, כלומר כאשר אנו מתקדמים לאורך γ, אז D נמצא תמיד **משמאלנו**. אז כל שדה וקטורי $\vec{F} = (P(x,y), Q(x,y))$ עם נגזרות חלקיות רציפות על D מקיים:

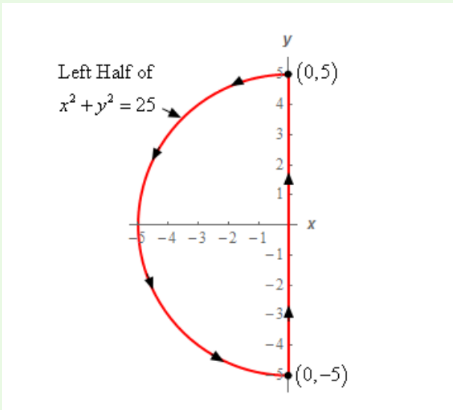
$$\oint_\gamma P dx + Q dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy$$

הערה

מסקנה מיידית מכך - אם D תחום פשוט קשר, אז כל שדה וקטורי $\vec{F} = (P(x,y), Q(x,y))$ המקיים $P_y = Q_x$ מקיים כי לכל מסילה סגורה γ מתקיים $\oint_\gamma Pdx + Qdy = 0$, ולכן השדה הוקטורי משמר בD.

תרגיל 11.6.

חשבו את $\oint_\gamma y^3 dx - x^3 dy$, כאשר γ המסילה הבאה:



פתרון:

נשתמש במשפט גרין, נשים לב כי γ חוסמת את התחום D שהוא פשוט קשר, במגמה חיובית כלפי D, בפרט:

$$\oint_\gamma y^3 dx - x^3 dy = \iint_D \frac{\partial}{\partial x}(-x^3) - \frac{\partial}{\partial y}(y^3) dxdy = \iint_D -3y^2 - 3x^2 dxdy$$

נשתמש בהחלפת משתנים מעגלית $x = r\cos(\theta), y = r\sin(\theta)$, עם התחום $0 \le r \le 5, \frac{\pi}{2} \le \theta \le \frac{3\pi}{2}$:

$$\iint_D -3y^2 - 3x^2 dxdy = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \int_0^5 -3r^3 dr d\theta = -\pi \int_0^5 3r^3 dr = -\frac{3 \cdot 5^4}{4}\pi$$

תרגיל 11.7.

חשבו את $\oint_\gamma \vec{F} \cdot d\vec{r}$, כאשר $\vec{F}(x,y) = (e^y, -\sin(\pi x))$, ו-$\gamma$ המשולש העובר בין הקודקודים

$$(1,0), (0,1), (-1,0)$$

נגד כיוון השעון.

פתרון:
נשתמש במשפט גרין. אם $\gamma = \partial T$, אז:

$$\oint_\gamma \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_T \frac{\partial}{\partial x}(-\sin(\pi x)) - \frac{\partial}{\partial y} e^y dxdy = \iint_T -\pi\cos(\pi x) - e^y dxdy$$

T הוא התחום הפשוט הבא:

$$T = \{(x,y) | y \in [0,1], y-1 \le x \le 1-y\}$$

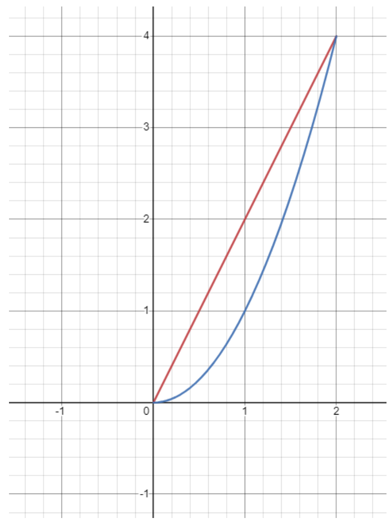
אז:

$$\begin{aligned}
\oint_\gamma \vec{F} \cdot d\vec{r} &= \int_0^1 \int_{y-1}^{1-y} -\pi\cos(\pi x) - e^y dxdy \\
&= \int_0^1 \left[-\sin(\pi x) - xe^y\right]\Big|_{x=y-1}^{x=1-y} dy \\
&= \int_0^1 \left[-\sin(\pi(1-y)) + \sin(\pi(y-1)) - (1-y)e^y + (y-1)e^y\right] dy \\
&= \int_0^1 \left[-2\sin(\pi(1-y)) - 2(1-y)e^y\right] dy \\
&= \dots = 4 - 2e - \frac{4}{\pi}
\end{aligned}$$

תרגיל 11.8.

חשבו את העבודה שחלקיק עושה כאשר נע בקו ישר בין $(0,0)$ ל $(2,4)$, ואז חוזר לאורך $y = x^2$ לראשית, דרך שדה הכוח $\vec{F}(x,y) = (e^{x^{45}\sin x}, e^x)$.

פתרון:
נשרטט את המסילה.



נשים לב כי המסילה היא באוריינטציה שלילית, אז נסמן את המסילה עם אוריינטציה חיובית ב-γ, ונחשב את $-\oint_\gamma \vec{F} \cdot d\vec{r}$.
עפ"י משפט גרין:

$$-W = \oint_\gamma \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_D \frac{\partial}{\partial x} e^x - \frac{\partial}{\partial y}(e^{x^{45} \sin x}) = \iint_D e^x$$

כאשר D התחום:

$$D = \{(x,y) | x \in [0,2] | x^2 < y < 2x\}$$

אז:

$$-W = \iint_D e^x dx dy = \int_0^2 \int_{x^2}^{2x} e^x dy dx = \int_0^2 e^x \int_{x^2}^{2x} dy dx = \int_0^2 e^x (x^2 - 2x) dx = ... = 4$$

כלומר $W = -4$.

תרגיל 11.9.

זהו תרגיל ממבחן.
חשבו את השטח החסום בעקום $\left[-\frac{\pi}{4},\frac{7\pi}{4}\right]$ $t\in$, $C\left(t\right)=\left(\cos^{2}t-\sin^{2}t,\sin t+\cos t\right)$.

פתרון:
נתחיל בלחקור את העקום $C(t)$.
ראשית נבדוק מתי המסילה חותכת את עצמה

$$\begin{cases}\cos^{2}t-\sin^{2}t=\cos^{2}s-\sin^{2}s\\ \sin t+\cos t=\sin s+\cos s\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\cos 2t=\cos 2s\\ \sin t+\cos t=\sin s+\cos s\end{cases}$$

מהמשוואה הראשונה נקבל:

$$\cos 2t=\cos 2s\Rightarrow 2t=2s+2\pi k\Rightarrow t=\pm s+\pi k$$

כאשר $k\in\{0,1\}$.
מהמשוואה השנייה נקבל:

$$\cos\left(\frac{t+s}{2}\right)=\sin\left(\frac{t+s}{2}\right)\Rightarrow\frac{t+s}{2}=\frac{\pi}{4}+\pi k\Rightarrow t=\frac{\pi}{2}+2\pi k-s$$

ביחד:

$$\pm s+\pi k_{1}=\frac{\pi}{2}+2\pi k_{2}-s\Rightarrow s\left(1\pm1\right)=\frac{\pi}{2}+\pi\left(2k_{2}-k_{1}\right)\Rightarrow s=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}k_{3}$$

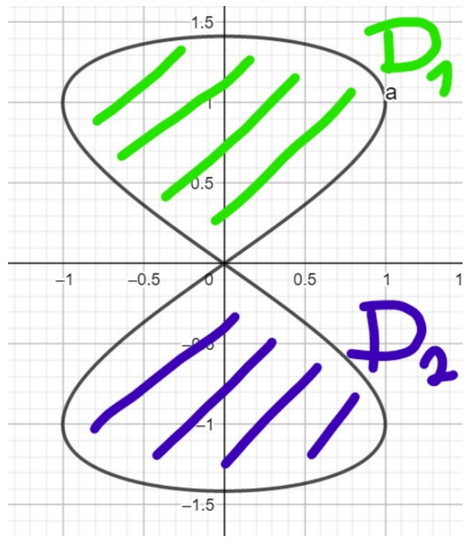
ולכן:

$$s=-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4},\frac{3}{4}\pi,\frac{7}{4}\pi$$

אלה הן הנקודות החשודות כחיתוך עצמי, נשים לב כי:

- עבור $s=\frac{\pi}{4}$, אז מהמשוואה השנייה $t=\frac{\pi}{4}$ גם כן, ואז זהו אינו חיתוך עצמי.
- עבור $s=-\frac{\pi}{4},\frac{3}{4}\pi,\frac{7}{4}\pi$ נקבל כי $C(s)=(0,0)$, כלומר המסילה שלנו עוברת בראשית בנקודת ההתחלה שלה, נקודת הסוף שלה, ונקודה נוספת, $\frac{3}{4}\pi$.

נפצל את העקום שלנו ל2 עקומים פשוטים וסגורים, $C_1(s)$ עבור $s\in\left[-\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4}\right]$, ו$C_2(s)$ עבור $s\in\left[\frac{3\pi}{4},\frac{7\pi}{4}\right]$.
נסמן את השטחים החסומים בעקומים אלה בD_1,D_2 בהתאמה.



עבור C_1 למשל, אנו רוצים לחשב את:

$$\text{Area}\,(D_1) = \iint_D 1dxdy$$

אם היה לנו שדה וקטורי $F = (P, Q)$ כך ש $Q_x - P_y = 1$, אז עפ"י משפט גרין:

$$\text{Area}\,(D_1) = \iint_D 1dxdy = \oint_{C_1} Pdx + Qdy$$

נבחר למשל $F(x, y) = (-y, 0)$, אז:

$$\text{Area}(D_1) = \oint_{C_1} -ydx = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} -(\sin t + \cos t)\, 2\sin(2t)dt = ... = \frac{8}{3\sqrt{2}}.$$

חישוב זהה יראה כי $\frac{8}{3\sqrt{2}} = \text{Area}(D_2) = \text{Area}(D_1)$, ולכן:

$$\text{Area}(D) = \text{Area}(D_1) + \text{Area}(D_2) = 2 \cdot \frac{8}{3\sqrt{2}} = \frac{16}{3\sqrt{2}}$$

תרגיל 11.10.

זהו תרגיל ממבחן.
יהא השדה הוקטורי:

$$\vec{F}=\left(\frac{4x-y}{4\left(x^2+y^2\right)},\frac{x+4y}{4\left(x^2+y^2\right)}\right)$$

חשבו את $\int_E \vec{F}d\vec{r}$ כאשר:

$$E=\left\{(x,y)\middle|\frac{x^2}{100}+\frac{y}{81}^2=1\right\}$$

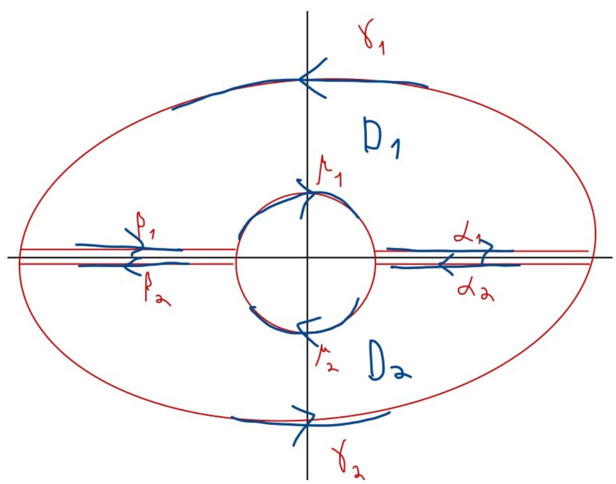
והמסילה מכוונת כנגד כיוון השעון.

פתרון:
ראשית, נשים לב כי מתקיים:

$$P_y=\frac{-4\left(x^2+y^2\right)-(4x-y)\cdot 8y}{\left(4\left(x^2+y^2\right)\right)^2}=\frac{y^2-x^2-8xy}{4\left(x^2+y^2\right)^2}$$

$$Q_x=\frac{4\left(x^2+y^2\right)-(x+4y)\cdot 8x}{\left(4\left(x^2+y^2\right)\right)^2}=\frac{y^2-x^2-8xy}{4\left(x^2+y^2\right)^2}$$

כלומר, השדה שלנו משמר בקבוצה $D=\{(x,y)|(x,y)\neq(0,0)\}=\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$. נוכל לעשות את הטריק הבא, נתבונן בשדה שלנו, ונשים לב שיהיה קל יותר לחשב את האינטגרל עליו אם העקום היה עיגול. נשרטט את האליפסה ומעגל יחידה, ונגדיר את התחומים D_1,D_2, יחד עם העקומים $\alpha_1,\alpha_2,\beta_1,\beta_2,\gamma_1,\gamma_2,\mu_1,\mu_2$ יחד עם האוריינטציות שבציור:



נשים לב כי:

$$\oint_{\partial D_1}\vec{F}\cdot d\vec{r}=\oint_{\alpha_1}\vec{F}\cdot d\vec{r}+\oint_{\beta_1}\vec{F}\cdot d\vec{r}+\oint_{\gamma_1}\vec{F}\cdot d\vec{r}+\oint_{\mu_1}\vec{F}\cdot d\vec{r}$$

אבל:

$$\oint_{\partial D_1} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_{D_1} \left(Q_x - P_y\right) dxdy = 0$$

כלומר:

$$\oint_{\alpha_1} \vec{F} \cdot d\vec{r} + \oint_{\beta_1} \vec{F} \cdot d\vec{r} + \oint_{\gamma_1} \vec{F} \cdot d\vec{r} + \oint_{\mu_1} \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$$

באופן דומה:

$$\oint_{\partial D_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \oint_{\alpha_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} + \oint_{\beta_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} + \oint_{\gamma_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} + \oint_{\mu_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$$

נשים לב כי β_1 וβ_2 הם מסילות זהות פרט לאוריינטציות הפוכות, ולכן $\oint_{\beta_1} \vec{F} \cdot d\vec{r} = -\oint_{\beta_2} \vec{F} \cdot d\vec{r}$, כנ"ל גם לגבי α_1 וα_2, ולכן:

$$0 = \int_{\gamma_1} \vec{F} \cdot d\vec{r} + \int_{\gamma_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} + \oint_{\mu_1} \vec{F} \cdot d\vec{r} + \oint_{\mu_2} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

נסמן בE את האליפסה המקורית שלנו (נגד כיוון השעון) ובC את מעגל היחידה (עם כיוון השעון). אז נקבל כי:

$$\oint_{E} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{\gamma_1} \vec{F} \cdot d\vec{r} + \int_{\gamma_2} \vec{F} \cdot d\vec{r}, \qquad \oint_{C} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \oint_{\mu_1} \vec{F} \cdot d\vec{r} \oint_{\mu_2} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

כלומר, $\oint_{E} \vec{F} \cdot d\vec{r} = -\oint_{C} \vec{F} \cdot d\vec{r}$. נהפוך את הכיוון של C כדי לקבל את C', מעגל היחידה נגד כיוון השעון, נקבל:

$$\oint_{E} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \oint_{C'} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

עכשיו נחשב את $\oint_{C'} \vec{F} \cdot d\vec{r}$. נבחר בפרמטריזציה $C'(t) = (\cos(t), \sin(t)), t \in [0, 2\pi]$. אז:

$$\begin{aligned}
\oint_{E} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \oint_{C'} \vec{F} \cdot d\vec{r} &= \int_0^{2\pi} \vec{F}(\cos(t), \sin(t)) \cdot (-\sin(t), \cos(t))\, dt \\
&= \int_0^{2\pi} \left(\frac{4\cos(t) - \sin(t)}{4(\cos^2(t) + \sin^2(t))} \cdot (-\sin(t)) + \frac{\cos(t) + 4\sin(t)}{4(\cos^2(t) + \sin^2(t))} \cdot \cos(t) \right) dt \\
&= \int_0^{2\pi} \left(\frac{4\cos(t) - \sin(t)}{4} \cdot (-\sin(t)) + \frac{\cos(t) + 4\sin(t)}{4} \cdot \cos(t) \right) dt \\
&= \frac{1}{4} \int_0^{2\pi} \left(-4\cos(t)\sin(t) + \sin^2(t) + \cos^2(t) + 4\sin(t)\cos(t) \right) dt \\
&= \frac{1}{4} \int_0^{2\pi} \left(\sin^2(t) + \cos^2(t) \right) dt \\
&= \frac{1}{4} \int_0^{2\pi} dt = \frac{1}{4} \cdot 2\pi = \frac{\pi}{2}
\end{aligned}$$

תרגול שניים עשר

12.1 | פרמטריזציה של משטח

תזכורת – (הצגה פרמטרית של משטח ב $\mathbb{R}^3$)

הצגה פרמטרית של משטח ב $\mathbb{R}^3$ היא העתקה רציפה:

$$\vec{S} : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3.$$

כלומר:

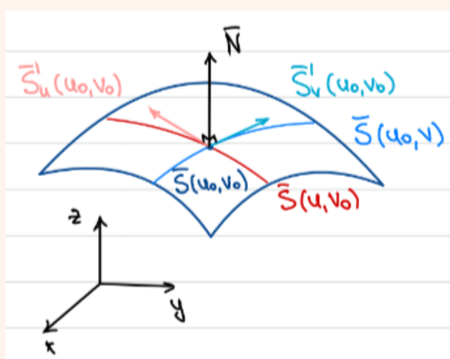
$$\vec{S}(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$$

תהא נקודה על המשטח $\vec{S}(u_0, v_0) = (x(u_0, v_0), y(u_0, v_0), z(u_0, v_0))$, הנורמל למשטח בנקודה זו מוגדר על ידי:

$$\vec{N}(u_0, v_0) = \frac{\partial \vec{S}}{\partial u}(u_0, v_0) \times \frac{\partial \vec{S}}{\partial v}(u_0, v_0) = \text{det} \begin{pmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{pmatrix}$$

כאשר

$$\hat{i} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \hat{j} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \hat{k} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$



הערה

נשים לב כי $S_u(u_0, v_0), S_v(u_0, v_0)$ הם כיוונים משיקים למשטח בנקודה $\vec{S}(u_0, v_0)$, ו$\vec{N}(u_0, v_0)$ מאונך להם.

תזכורת – (שטח פנים של משטח)

תהא $\vec{S}:D\subset\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$ פרמטריזציה גזירה ברציפות כך ש $\vec{N}(u,v)\neq\vec{0}$ לכל $(u,v)\in D$.
נגדיר את **שטח הפנים** של המשטח S כ:

$$A=\iint_D\left\|\vec{N}(u,v)\right\|dudv=\iint_D\left\|\frac{\partial\vec{S}}{\partial u}(u,v)\times\frac{\partial\vec{S}}{\partial v}(u,v)\right\|dudv$$

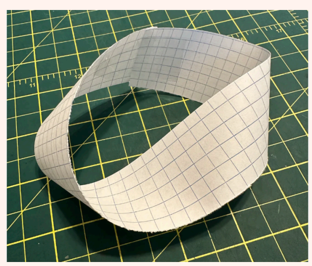
הערה

אם S הוא גרף של פונקציה גזירה ברציפות $f(x,y) = z$, כלומר, קיימת פרמטריזציה $\vec{S}(u,v) = (u,v,f(u,v))$, אז:

$$\|N\|=\left\|\det\begin{pmatrix}\hat{i}&\hat{j}&\hat{k}\\1&0&f_u\\0&1&f_v\end{pmatrix}\right\|=\left\|\begin{pmatrix}-f_u\\-f_v\\1\end{pmatrix}\right\|=\sqrt{1+f_u^2+f_v^2}$$

תזכורת – (משטח דו-צדדי)

משטח דו-צדדי הוא משטח שבו קיימת בחירה רציפה של נורמל שאינו מתאפס $\vec{N}$, במהלך הקורס נעבוד **רק** עם משטחים דו-צדדיים. דוגמה למשטח לא דו-צדדי היא טבעת מוביוס, לה "צד" אחד בלבד:



דוגמאות למשטח דו-צדדי הן כדור, גליל, חרוט, פרבולואיד, גרף של פונקציה גזירה ברציפות וכו'.

תרגיל 12.1.

חשבו את שטח הפנים של גליל בעל רדיוס r ואורך h:

$$S=\{(x,y,z)|\ 0\leq z\leq h,\ x^2+y^2=r^2\}$$

שימו לב כי מדובר בגליל ללא הכיסוי העליון והתחתון.

פתרון:
נבחר פרמטריזציה:

$$S(u,v)=(r\cos u, r\sin u, v),\qquad D=\{(u,v)|0\le u<2\pi, 0\le v\le h\}$$

נחשב את הנורמל:

$$\vec{N}(u,v)=\underbrace{\begin{pmatrix}-r\sin u\\ r\cos u\\ 0\end{pmatrix}}_{S_u(u,v)}\times\underbrace{\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}}_{S_v(u,v)}=\det\begin{pmatrix}\hat{i}&\hat{j}&\hat{k}\\ -r\sin u& r\cos u&0\\ 0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}r\cos u\\ r\sin u\\ 0\end{pmatrix}$$

בפרט $\left\|\vec{N}(u,v)\right\|=r\neq 0$, לכן:

$$A=\iint_D\left\|\vec{N}(u,v)\right\|dudv=\int_0^{2\pi}\int_0^h rdvdu=2\pi rh$$

12.2 | אינטגרל משטחי מסוג ראשון

תזכורת – (אינטגרל משטחי מסוג ראשון)

תהא $S:D\subset\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$ פרמטריזציה גזירה ברציפות של משטח דו-צדדי בעל נורמל שאינו מתאפס. תהא $f:R\subset\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ פונקציה רציפה, כאשר R מכיל את המשטח S, כלומר $\text{Im}(S)\subset R$, נגדיר את האינטגרל המשטחי מסוג ראשון:

$$\int_S fdS=\iint_D f(S(u,v))\left\|\vec{N}(u,v)\right\|dudv=\iint_D f(S(u,v))\|S_u(u,v)\times S_v(u,v)\|dudv$$

רעיון

בדומה לאינטגרל קווי מסוג ראשון, אם נחשוב על f בתור הצפיפות של משטח S, אז האינטגרל המשטחי מסוג ראשון מחשב את המסה של המשטח S. בפרט, אם $f(x,y,z)=1$, אז:

$$\int_S fdS=\iint_S 1dS=\text{Area}(S)$$

תרגיל 12.2.

חשבו את שטח הפנים של החרוט $z=\sqrt{x^2+y^2}$, הכלוא בגליל $x^2+y^2=2x$, ב-$z\ge 0$.

פתרון:

נחפש פרמטריזציה לחרוט שלנו, נשים לב כי מדובר בגרף של הפונקציה $z=\sqrt{x^2+y^2}$, אבל התחום הוא תחום במעגל $x^2+y^2=2x \Rightarrow (x-1)^2+y^2=1$.

כלומר:

$$S=\left\{(x,y,z)\,|z=\sqrt{x^2+y^2},(x-1)^2+y^2\le 1\right\}$$

נשתמש בפרמטריזציה:

$$\vec{S}(x,y)=\left(x,y,\sqrt{x^2+y^2}\right),\qquad D=\left\{(x,y)\,|\,(x-1)^2+y^2\le 1\right\}$$

נחשב את הנורמל בעזרת הנוסחה שחישבנו עבור גרף של פונקציה:

$$\left\|\vec{N}(x,y)\right\|=\left\|S_x(x,y)\times S_y(x,y)\right\|=\sqrt{1+f_x(x,y)^2+f_y(x,y)^2}$$

כלומר:

$$\begin{aligned}
\text{Area}(S)&=\iint_S 1ds=\iint_D\left\|\vec{N}(x,y)\right\|dxdy\\
&=\iint_D\sqrt{\left((-f_x(x,y))^2+(-f_y(x,y))^2+1\right)}dxdy\\
&=\iint_D\sqrt{\left(\left(-\frac{2x}{2\sqrt{x^2+y^2}}\right)^2+\left(-\frac{2y}{2\sqrt{x^2+y^2}}\right)^2+1\right)}dxdy\\
&=\iint_D\sqrt{\left(\frac{x^2}{x^2+y^2}+\frac{y^2}{x^2+y^2}+1\right)}dxdy\\
&=\iint_D\sqrt{2}dxdy=\sqrt{2}\underbrace{\iint_D dxdy}_{=\text{Area}(D)}=\sqrt{2}\cdot\pi
\end{aligned}$$

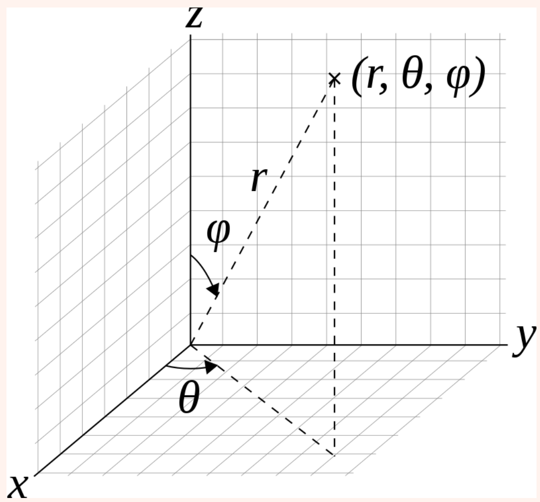
תזכורת – (קואורדינטות כדוריות)

עבור ספרה ברדיוס $r > 0$ יש לנו פרמטריזציה סטנדרטית כדורית לקבוצה:

$$\{(x,y,z)|x^2+y^2+z^2=r^2\}$$

שהיא:

$$\begin{cases} x = r\sin\varphi\cos\theta \\ y = r\sin\varphi\sin\theta \\ z = r\cos\varphi \end{cases}, \qquad 0 \le \theta < 2\pi, \quad 0 \le \varphi \le \pi$$



תרגיל 12.3.

יהיו $0 \le a < b \le 1$, חשבו את שטח הפנים של:

$$S = \{(x,y,z) \mid x^2+y^2=1, z \in [a,b]\}$$

פתרון:

נזכר בפרמטריזציה כדורית (של כדור יחידה):

$$\vec{r}(\theta,\varphi) = (\sin\varphi\cos\theta, \sin\varphi\sin\theta, \cos\varphi), \qquad 0 \le \theta \le 2\pi, \qquad 0 \le \varphi \le \pi$$

במקרה שלנו, S הוא לא כל כדור היחידה, אלא רק החלק שבו $z \in [a,b]$, כלומר:

$$z = \cos\varphi \le b \Rightarrow \varphi \ge \arccos b$$

וגם:

$$z = \cos\varphi \ge a \Rightarrow \varphi \le \arccos a$$

(שימו לב כי $\cos(x)$ פונקציה יורדת ב $[0,\pi]$, ולכן האי-שוויון מתהפך!) סך הכל:

$$\varphi \in [\arccos b, \arccos a]$$

כלומר:
$$D = \{(\theta,\varphi)\,|0 \le \theta \le 2\pi, \arccos b \le \varphi \le \arccos a\}$$
ומתקיים:
$$\text{Area}(S) = \iint_S 1dS = \iint_D \left\|\vec{N}(\theta,\varphi)\right\| d\theta d\varphi$$
נחשב את $\left\|\vec{N}(\theta,\varphi)\right\| = \|r_\theta(\theta,\varphi)\times r_\varphi(\theta,\varphi)\|$.
$$\vec{N}(\theta,\varphi) = r_\theta(\theta,\varphi)\times r_\varphi(\theta,\varphi) = \det\begin{pmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ x_\theta & y_\theta & z_\theta \\ x_\varphi & y_\varphi & z_\varphi \end{pmatrix}$$
$$= \det\begin{pmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ -\sin\varphi\sin\theta & \sin\varphi\cos\theta & 0 \\ \cos\varphi\cos\theta & \cos\varphi\sin\theta & -\sin\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin^2\varphi\cos\theta \\ -\sin^2\varphi\sin\theta \\ -\sin\varphi\cos\varphi \end{pmatrix}$$
בפרט:
$$\left\|\vec{N}(\theta,\varphi)\right\| = \sqrt{\left(-\sin^2\varphi\cos\theta\right)^2 + \left(-\sin^2\varphi\sin\theta\right)^2 + (-\sin\varphi\cos\varphi)^2}$$
$$= \sqrt{\sin^4\varphi\cos^2\theta + \sin^4\varphi\sin^2\theta + \sin^2\varphi\cos^2\varphi}$$
$$= \sqrt{\sin^4\varphi + \sin^2\varphi\cos^2\varphi} = |\sin\varphi| = \sin\varphi$$
כאשר בשוויון האחרונה השתמשנו בעובדה ש- $0 \le \varphi \le \pi$, נשים לב כי $\sin\varphi$ מתאפס רק בקטבים - שזו קבוצה משטח אפס. בפרט:
$$\text{Area}(S) = \int_S 1dS = \iint_D \left\|\vec{N}(\theta,\varphi)\right\| d\theta d\varphi = \int_0^{2\pi}\int_{\arccos b}^{\arccos a} \sin\varphi d\varphi d\theta$$
$$= 2\pi\left(-\cos\varphi\Big|_{\arccos b}^{\arccos a}\right) = 2\pi\left(-\cos(\arccos a) + \cos(\arccos b)\right) = 2\pi(b-a)$$

הערה

שימו לב לתוצאה המפתיעה שקיבלנו! $2\pi(b-a)$ תלוי רק בהפרש הגבהים $b-a$, ולא במיקום שלהם!

תרגיל 12.4.

חשבו את $\iint_S x^2 dS$, כאשר $S = \{(x,y,z)\,|x^2+y^2=a^2, 0\le z\le 1\}$ עבור $a>0$.

פתרון:
נשים לב כי S הוא גליל עם בסיס ברדיוס a ואורכו 1 בלי המכסה העליון והמכסה התחתון.
נשתמש בפרמטריזציה הבאה:

$$S(\theta, z) = (a\cos\theta, a\sin\theta, z), \qquad 0 \le \theta \le 2\pi, \qquad 0 \le z \le 1$$

בפרט:

$$\begin{aligned}\vec{N}(\theta,z) = S_\theta(\theta,z) \times S_z(\theta,z) &= \det\begin{pmatrix}\hat{i} & \hat{j} & \hat{k}\\ x_\theta & y_\theta & z_\theta\\ x_z & y_z & z_z\end{pmatrix}\\ &= \det\begin{pmatrix}\hat{i} & \hat{j} & \hat{k}\\ -a\sin\theta & a\cos\theta & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a\cos\theta\\ a\sin\theta\\ 0\end{pmatrix}\end{aligned}$$

ולכן:

$$\left\|\vec{N}(\theta,z)\right\| = \sqrt{(a\cos\theta)^2 + (a\sin\theta)^2 + 0^2} = a \neq 0$$

נחשב את האינטגרל:

$$\begin{aligned}\iint_S x^2 dS = \iint_D (a\cos(\theta))^2 \cdot a\, d\theta dz &= a^3 \int_0^{2\pi} \cos^2\theta \cdot 1 d\theta\\ &= a^3 \int_0^{2\pi} \frac{(1+\cos 2\theta)}{2} d\theta = \frac{a^3}{2}\left(2\pi + \left(\frac{\sin 2\theta}{2}\Big|_0^{2\pi}\right)\right)\\ &= \frac{a^3}{2}(2\pi) = a^3\pi\end{aligned}$$

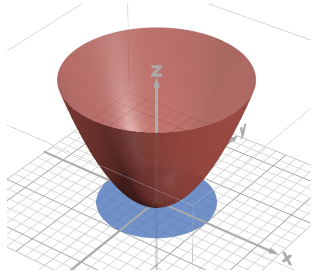
תרגיל 12.5.

חשבו את שטח המשטח $z = x^2 + y^2$ הנמצא מעל מעגל ברדיוס 1 סביב ראשית הצירים במישור xy.

פתרון:
נשים לב כי מדובר בגרף של פונקציה גזירה ברציפות, כלומר ניתן להציג את המשטח בפרמטריזציה:

$$S(x, y, z) = (x, y, x^2 + y^2)$$

כאשר $x^2 + y^2 \le 1$.



בפרט:

$$\left\|\vec{N}\right\| = \sqrt{\left(f_x\right)^2 + \left(f_y\right)^2 + 1} = \sqrt{\left(-2x\right)^2 + \left(-2y\right)^2 + 1} = \sqrt{4\left(x^2+y^2\right)+1}$$

כלומר:

$$\text{Area}(S) = \int_S 1dS = \iint_D \left\|\vec{N}\right\| dxdy = \iint_{x^2+y^2\leq 1} \sqrt{4\left(x^2+y^2\right)+1}dxdy$$

נחשב את האינטגרל בעזרת החלפה פולרית:

$$x = r\cos\theta, \qquad y = r\sin\theta, \qquad J = r, \qquad \theta \in [0,2\pi], \qquad r \in [0,1]$$

כלומר:

$$\text{Area}(S) = \iint_{x^2+y^2\leq 1} \sqrt{4\left(x^2+y^2\right)+1}dxdy = \int_0^{2\pi}\int_0^1 \sqrt{4r^2+1}rdrd\theta = 2\pi\int_0^1 \sqrt{4r^2+1}rdr$$

נבצע החלפת משתנים $t = 4r^2+1$, $dt = 8rdr$, נשים לב כי $r = 0 \Rightarrow t = 1$, $r = 1 \Rightarrow t = 5$, אז:

$$\text{Area}(S) = \frac{2\pi}{8}\int_1^5 \sqrt{t}dt = .. = \frac{\pi}{6}\left(5^{\frac{3}{2}} - 1\right)$$

תרגיל 12.6.

חשבו את שטח הפנים של חלק המישור $x + 2y + 3z = 6$ החסום בין המישורים $x = 0, y = 0, z = 0$.

פתרון:

נשים לב כי המשטח שלנו הוא פשוט מישור, בפרט הוא גרף של פונקציה, אז נשתמש בפרמטריזציה גרפית:

$$3z = 6 - x - 2y \implies z = f(x,y) = 2 - \frac{x}{3} - \frac{2y}{3}$$

התחום שלנו, שנסמן אותו $\Delta \subset \mathbb{R}^2$, הוא ההטלה של המישור על המישור xy, בפרט, הוא משולש ישר זווית וקודקודיו $(0,0), (0,3), (6,0)$. נחשב את האינטגרל שלנו:

$$\text{Area}(S) = \int_S 1dS = \iint_\Delta \sqrt{\left(f_x\right)^2 + \left(f_y\right)^2 + 1}dxdy = \sqrt{\frac{14}{9}}\iint_\Delta dxdy$$

אבל, $\iint_\Delta dxdy = \text{Area}(\Delta) = \frac{3\cdot 6}{2} = 9$, לכן:

$$\text{Area}(S) = \sqrt{\frac{14}{9}} \cdot 9 = 3\sqrt{14}$$

12.3 | אינטגרל משטחי מסוג שני

תזכורת – (אינטגרל משטחי מסוג שני)

יהא $S: D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ משטח פרמטרי דו-צדדי, גזיר ברציפות בעל נורמל שאינו מתאפס.
יהא $\vec{F}: R \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ שדה וקטורי רציף, כאשר R מכיל את המשטח S, כלומר $\text{Im}(S) \subset R$. נגדיר את האינטגרל המשטחי מסוג שני:

$$\iint_S \vec{F} \cdot d\vec{s} = \iint_D \left\langle \vec{F}(S(u,v)), \vec{N}(u,v) \right\rangle dudv = \iint_D \left\langle \vec{F}(S(u,v)), S_u(u,v) \times S_v(u,v) \right\rangle dudv$$

אפשר לחשוב על האינטגרל הזה בצורה הבאה: נגיד ויש לנו נוזל שזורם בכיוון השדה $\vec{F}$, אז כמה נוזל עובר דרך המשטח S, בכיוון הנורמל $\vec{N}$?
בשפה הפיזיקלית, נחשוב על האינטגרל בתור השטף של השדה $\vec{F}$ דרך המשטח S.

הערה

אם יש לנו משטח פרמטרי $S: D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ אז עד עכשיו סימנו את הנורמל שלו ב $\vec{N}(u,v) = S_u(u,v) \times S_v(u,v)$. אבל גם $\vec{N}'(u,v) = -\vec{N}(u,v)$ הוא נורמל לגיטימי, וייתן:

$$\iint_D \left\langle \vec{F}(S(u,v)), \vec{N}(u,v) \right\rangle dudv = -\iint_D \left\langle \vec{F}(S(u,v)), \vec{N}'(u,v) \right\rangle dudv$$

כלומר, האינטגרל המשטחי מסוג שני **תלוי בבחירת כיוון הנורמל.** אבל מסתבר כי זו התלות היחידה, כלומר אם יש לנו 2 פרמטריזציות של אותו משטח עם כיוון נורמל זהה, אז האינטגרל המשטחי יהיה זהה - בדומה לאינטגרל מסילתי מסוג שני.

תרגיל 12.7.

חשבו את השטף של השדה הווקטורי $\vec{F} = (x,y,z)$, כלפי חוץ, על ספרת היחידה $x^2+y^2+z^2=1$.

פתרון:

נעבור לפרמטריזציה כדורית:

$$\vec{L}(\theta,\varphi) = (\sin\varphi\cos\theta, \sin\varphi\sin\theta, \cos\varphi) \ , \ 0 \le \theta \le 2\pi, 0 \le \varphi \le \pi$$

ולכן:

$$\begin{aligned}\vec{N}=\vec{L}_\theta\times\vec{L}_\varphi&=\begin{vmatrix}\hat{i} & \hat{j} & \hat{k}\\ -\sin\varphi\sin\theta & \sin\varphi\cos\theta & 0\\ \cos\varphi\cos\theta & \cos\varphi\sin\theta & -\sin\varphi\end{vmatrix}\\ &=\left(-\sin^2\varphi\cos\theta,-\sin^2\varphi\sin\theta,-\sin\varphi\cos\varphi\right).\end{aligned}$$

עלינו לבחור את הכיוון של הנורמל, נבחר למשל את $\theta=0$, $\varphi=\frac{\pi}{2}$, ונקבל:

$$\vec{N}\left(0,\frac{\pi}{2}\right)=(-1,0,0)$$

עכשיו עלינו לחשוב אם אנו רוצים לבחור את $\vec{N}$ או את $-\vec{N}$, בשאלה ביקשו את הנורמל כלפי חוץ, אז אנו צריכים לשאול את השאלה הבאה:
בנקודה $L(0,\frac{\pi}{2})=(1,0,0)$, ב$S$ (שהוא ספרת היחידה), האם הכיוון של $\vec{N}=(-1,0,0)$ הוא לכיוון חוץ או פנימה? כמובן שהוא כלפי פנים, אז נבחר את $-\vec{N}$. הפרמטריזציה שלנו היא:

$$\vec{L}\left(\theta,\varphi\right)=\left(\sin\varphi\cos\theta,\sin\varphi\sin\theta,\cos\varphi\right),\qquad \vec{N}(\theta,\varphi)=\left(\sin^2\varphi\cos\theta,\sin^2\varphi\sin\theta,\sin\varphi\cos\varphi\right)$$

כאשר $\Delta=\{(\varphi,\theta)|\ 0\le\theta\le2\pi,\ 0\le\varphi\le\pi\}$. השטף הוא:

$$\begin{aligned}\iint_S F\cdot d\vec{s}&=\iint_\Delta\left(\vec{F}\left(x\left(\varphi,\theta\right),y\left(\varphi,\theta\right),z\left(\varphi,\theta\right)\right)\cdot\vec{N}\left(x\left(\varphi,\theta\right),y\left(\varphi,\theta\right),z\left(\varphi,\theta\right)\right)\right)d\varphi d\theta\\ &=\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\left(\sin\varphi\cos\theta,\sin\varphi\sin\theta,\cos\varphi\right)\cdot\left(\sin^2\varphi\cos\theta,\sin^2\varphi\sin\theta,\sin\varphi\cos\varphi\right)d\varphi d\theta\\ &=\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\left(\sin^3\varphi\cos^2\theta+\sin^3\varphi\sin^2\theta+\sin\varphi\cos^2\varphi\right)d\varphi d\theta\\ &=\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\sin\varphi\left(\sin^2\varphi\cos^2\theta+\sin^2\varphi\sin^2\theta+\cos^2\varphi\right)d\varphi d\theta\\ &=\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\sin\varphi\left(\sin^2\varphi\left(\cos^2\theta+\sin^2\theta\right)+\cos^2\varphi\right)d\varphi d\theta\\ &=\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\sin\varphi d\varphi d\theta\\ &=2\pi\left(-\cos\varphi\Big|_0^{\pi}\right)=4\pi\end{aligned}$$

הערה

נשים לב כי במקום $\vec{N}\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$, לבדיקת הכיוון היה אולי יותר מתבקש לבחור את $\vec{N}(0,0)$, אבל כמובן ש$\vec{N}(0,0)=(0,0,0)$, כלומר, שם יש בעיה בפרמטריזציה. חישוב של $\left\|\vec{N}\right\|$ (שעשינו בתרגיל הקודם) בנקודה כללית יראה כי הוא מתאפס רק בקטבים - ולכן עדיין אפשר לבצע את האינטגרציה.

תרגיל 12.8.

חשבו את השטף של השדה הווקטורי $\vec{F}=(-x,-y,z^2)$ כלפי חוץ, על המשטח הסגור החסום ע"י:

$$z=\sqrt{x^2+y^2}, \qquad z=1, \qquad z=2$$

פתרון:
נשים לב כי מדובר במעטפת של חרוט, עם מכסה עליון ומכסה תחתון, לא נצליח למצוא פרמטריזציה אחת לכל המשטח, ולכן נצטרך לחשב את השטף על כל חלק בנפרד ונסכום. נסמן את "המכסים":

$$S_1=\{(x,y,z)|z=1,x^2+y^2\leq 1\}$$

$$S_2=\{(x,y,z)|z=2,x^2+y^2\leq 4\}$$

ואת מעטפת החרוט:

$$S_3=\{(x,y,z)|z=\sqrt{x^2+y^2},1\leq z\leq 2\}$$

1. על S_1, נבחר בפרמטריזציה הבאה:

$$\vec{r}_1(r,\theta)=(r\cos(\theta),r\sin(\theta),1), \qquad \Delta_1=\{(r,\theta)|0\leq r\leq 1,0\leq\theta<2\pi\}$$

אז:

$$\iint_{S_1}\vec{F}\cdot d\vec{s}=\iint_{\Delta_1}\vec{F}(r\cos(\theta),r\sin(\theta),1)\cdot\vec{N}_1(r,\theta)drd\theta$$

כאשר $\vec{N}_1(r,\theta)$ הוא:

$$(\vec{r}_1)_r\times(\vec{r}_1)_\theta=\det\begin{pmatrix}\hat{i} & \hat{j} & \hat{k}\\ \cos\theta & \sin\theta & 0\\ -r\sin\theta & r\cos\theta & 0\end{pmatrix}=(0,0,r)$$

כמובן שנבחר בכיוון הנורמל החיצוני, כלומר $\vec{N}_1(r,\theta)=(0,0,-r)$. ולכן:

$$\begin{aligned}\Phi_1&=\iint_{\Delta_1}\left\langle\vec{F}(r\cos(\theta),r\sin(\theta),1),\vec{N}_1(r,\theta)\right\rangle drd\theta\\&=\iint_{\Delta_1}\langle(-r\cos\theta,-r\sin\theta,1),(0,0,-r)\rangle drd\theta=\iint_{\Delta_1}-rdrd\theta\\&=\int_0^{2\pi}\int_0^1-rdrd\theta=-2\pi\int_0^1 rdr=-2\pi\cdot\frac{1}{2}=-\pi\end{aligned}$$

2. על S_2, חישוב כמעט זהה ייתן את השטף $\Phi_2=16\pi$.

תרגול עצמי

השלימו את החישוב.

3. על S_3, נבחר בפרמטריזציה הבאה:

$$\vec{r}_3(r,\theta) = (r\cos(\theta), r\sin(\theta), r), \qquad \Delta_3 = \{(r,\theta) | 1 \le r \le 2, 0 \le \theta < 2\pi\}$$

ונקבל:

$$(\vec{r}_3)_r \times (\vec{r}_3)_\theta = \det\begin{pmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \cos\theta & \sin\theta & 1 \\ -r\sin\theta & r\cos\theta & 0 \end{pmatrix} = (-r\cos\theta, -r\sin\theta, r)$$

בדיוק למשל ב $(r,\theta) = (1.5, 0)$ **תיתן** $\vec{r}_3(1.5,0) = (1.5, 0, 1.5)$, **וגם** $\vec{N}_3(1.5,0) = (-1.5, 0, 1.5)$, כלומר הכיוון של הנורמל הוא כלפי פנים ונבחר:

$$\vec{N}_3(r,\theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta, -r)$$

נקבל:

$$\begin{aligned}
\Phi_3 &= \iint_{\Delta_3} \left\langle \vec{F}(r\cos(\theta), r\sin(\theta), r), \vec{N}_3(r,\theta) \right\rangle drd\theta \\
&= \iint_{\Delta_3} \langle (-r\cos\theta, -r\sin\theta, r^2), (r\cos\theta, r\sin\theta, -r) \rangle \, drd\theta \\
&= \iint_{\Delta_3} -r^2 - r^3 drd\theta = \int_0^{2\pi}\int_1^2 -r^2 - r^3 drd\theta \\
&= -2\pi\left(\frac{r^3}{3} + \frac{r^4}{4}\right)\Big|_1^2 = -2\pi\left(\frac{8}{3} + 4 - \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right)\right) = -\frac{73\pi}{6}
\end{aligned}$$

סה"כ, השטף הוא:

$$\Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_3 = -\pi + 16\pi - \frac{73\pi}{6}$$

תרגיל 12.9.

יהא $\vec{F}(\vec{r}) = \frac{1}{\|\vec{r}\|^3}\vec{r}$, ותהא ספרה ברדיוס $R > 0$ סביב ראשית הצירים, הוכיחו כי השטף של השדה $\vec{F}$ דרך הספרה, כלפי חוץ לא תלוי ברדיוס R.

פתרון:

ראשית, נבין מהו שדה $\vec{F}$, אם $\vec{r} = (x, y, z)$ אז:

$$\vec{F}((x,y,z)) = (x,y,z)\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}^3} = \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}^3}, \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}^3}, \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}^3}\right)$$

נשתמש בפרמטריזציה כדורית של הספרה:

$$\vec{L}(\theta,\varphi) = (R\sin\varphi\cos\theta, R\sin\varphi\sin\theta, R\cos\varphi), \qquad 0 \le \theta < 2\pi, \qquad 0 \le \varphi \le \pi$$

הנורמל הוא:

$$\vec{L}_\theta(\theta,\varphi) \times \vec{L}_\varphi(\theta,\varphi) = \det\begin{pmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ -R\sin\varphi\sin\theta & R\sin\varphi\cos\theta & 0 \\ R\cos\varphi\cos\theta & R\cos\varphi\sin\theta & -R\sin\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -R^2\sin^2\varphi\cos\theta \\ -R^2\sin^2\varphi\sin\theta \\ -R^2\sin\varphi\cos\varphi \end{pmatrix}$$

הצבה של $\theta = 0, \varphi = \frac{\pi}{2}$ תראה לנו כי הנורל כלפי חוץ הינו:

$$\vec{N}(\theta,\varphi) = \begin{pmatrix} R^2\sin^2\varphi\cos\theta \\ R^2\sin^2\varphi\sin\theta \\ R^2\sin\varphi\cos\varphi \end{pmatrix}$$

אז השטף של השדה $\vec{F}$ דרך הספרה הוא:

$$\begin{aligned}
\Phi &= \iint_S \vec{F}\cdot d\vec{s} = \iint_D \left\langle \vec{F}(\vec{L}(\theta,\varphi)), \vec{N}(\theta,\varphi)\right\rangle d\theta d\varphi \\
&= \iint_D \left\langle \begin{pmatrix} \frac{R\sin\varphi\sin\theta}{R^3} \\ \frac{R\sin\varphi\cos\theta}{R^3} \\ \frac{R\cos\varphi}{R^3} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} R^2\sin^2\varphi\cos\theta \\ R^2\sin^2\varphi\sin\theta \\ R^2\sin\varphi\cos\varphi \end{pmatrix} \right\rangle d\theta d\varphi \\
&= \iint_D \left\langle \begin{pmatrix} \sin\varphi\sin\theta \\ \sin\varphi\cos\theta \\ \cos\varphi \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \sin^2\varphi\cos\theta \\ \sin^2\varphi\sin\theta \\ \sin\varphi\cos\varphi \end{pmatrix} \right\rangle d\theta d\varphi
\end{aligned}$$

שכמובן לא תלוי ב R (נשים לב כי $D = [0, 2\pi) \times [0, \pi]$ גם לא תלוי ב R).

תרגול שלושה עשר

13.1 | משפט גאוס (משפט הדיברגנץ)

תזכורת – (דיבירגנץ)

יהא $\vec{F}(x,y,z) = (P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z))$ שדה וקטורי גזיר ברציפות, נסמן:

$$\text{div}(\vec{F})(x,y,z) = P_x(x,y,z) + Q_y(x,y,z) + R_z(x,y,z)$$

נקרא ל-$\text{div}(\vec{F})$ **הדיברגנץ** של השדה הוקטורי $\vec{F}$.
נשים לב כי $\text{div}(\vec{F})$ היא פונקציה סקלרית, כלומר $\text{div}(\vec{F}) : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$.

הערה

סימון נפוץ הוא $\text{div}(\vec{F}) = \nabla \cdot \vec{F}$, כאשר אנו מסמנים $\nabla = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix}$ ואז:

$$\nabla \cdot \vec{F} = \frac{\partial}{\partial x}P(x,y,z) + \frac{\partial}{\partial y}Q(x,y,z) + \frac{\partial}{\partial z}R(x,y,z) = \text{div}(\vec{F})(x,y,z)$$

אבל כמובן שזה רק סימון.

תזכורת – (משפט גאוס (לפעמים נקרא גם משפט הדיברגנץ))

יהא $V \subset \mathbb{R}^3$ גוף סגור, חסום, עם נורמל כלפי חוץ, $\vec{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ שדה וקטורי גזיר ברציפות, אז:

$$\oiint_{\partial V} \vec{F} \cdot d\vec{s} = \iiint_V \text{div}(\vec{F}) dxdydz$$

כאשר ∂V מעטפת הגוף V.

הערה

הסימון $\oiint_S \vec{F} \cdot d\vec{s}$ הוא לאינטגרל המשטחי $\iint_S \vec{F} \cdot d\vec{s}$, כאשר אנו מדגישים ש$S$ משטח סגור. בדומה לסימון $\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$ עבור אינטגרל מסילתי מסוג שני.

תרגיל 13.1.

חשבו את השטף של השדה הוקטורי $\vec{F} = (x, y, z)$, כלפי חוץ, על ספירת היחידה

$$S = \{(x, y, z)|x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$$

פתרון:

נפתור את התרגיל בעזרת משפט הדיברגנץ. נסמן את כדור היחידה:

$$V = \{(x, y, z)|x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$$

אז ∂V הוא הספירה S.

$\vec{F}$ גזיר ברציפות בכל $\mathbb{R}^3$, וS משטח סגור, אז עבור השטף כלפי חוץ מתקיים:

$$\oiint_S \vec{F} \cdot d\vec{s} = \iiint_V \text{div}\, \vec{F} dV$$

מקיים כי $\text{div}\, \vec{F} = 3$ בכל V, ולכן:

$$\oiint_S \vec{F} \cdot d\vec{s} = \iiint_V 3dV = 3 \iiint_V dxdydz = 3\,\text{Vol}(V) = 3 \cdot \frac{4\pi}{3} = 4\pi$$

תרגיל 13.2.

חשבו את:

$$I = \iint_S \vec{F} \cdot d\vec{s}$$

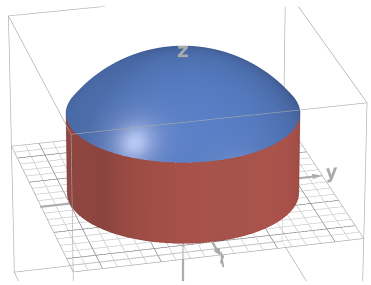
כאשר $F(x,y,z)=(y^2,x^5,5z)$, ו:

$$S=\left\{(x,y,z)|z=\sqrt{25-x^2-y^2},x^2+y^2\leq 16,3\leq z\leq 5\right\}\cup\{(x,y,z)|0\leq z\leq 3,x^2+y^2=16\}$$

וכיוון הנורמל הוא כך שבנקודה $(0,0,5)$, רכיב z של הנורמל הוא חיובי.

פתרון:

נשים לב כי הגוף שלנו הוא גליל ברדיוס 4, אשר סגור מלמעלה על ידי ספירה ברדיוס 5:



בנוסף נשים לב כי $\text{div}(\vec{F})=5$ בכל $\mathbb{R}^3$, אז נרצה להשתמש במשפט גאוס, **אבל** הגוף לא סגור.

אם נסמן:

$$S_1=\{(x,y,0)|x^2+y^2\leq 16\}$$

אז $S\cup S_1$ הוא משטח סגור, החוסם את הגוף V, ויותר מזה, הנורמל הוא כלפי חוץ, אז:

$$\iint_S\vec{F}\cdot d\vec{s}+\iint_{S_1}\vec{F}\cdot d\vec{s}=\oiint_{S\cup S_1}\vec{F}\cdot d\vec{s}=\iiint_V \text{div}(\vec{F})dV=\iiint_V 5dV$$

בפרט:

$$\iint_S\vec{F}\cdot d\vec{s}=\iiint_V 5dV-\iint_{S_1}\vec{F}\cdot d\vec{s}$$

יש לנו 2 חישובים לעשות:

1. נחשב את האינטגרל הנפחי $\iiint_V 5dV$. נעבור לקואורדינטות גליליות:

$$x=r\cos\theta,\ y=r\sin\theta,\ z=\rho$$

אז:

$$\Delta=\left\{(r,\theta,z)\,|\,0<r\leq 4,\ \ 0\leq\rho\leq\sqrt{25-r^2},\ \ 0\leq\theta\leq 2\pi\right\}$$

כלומר:

$$\iiint_V 5dxdydz=5\iiint_\Delta rdrd\theta d\rho=5\int_0^{2\pi}\int_0^4\int_0^{\sqrt{25-r^2}}rd\rho drd\theta=10\pi\int_0^4 r\sqrt{25-r^2}dr$$
$$=10\pi\left[(25-r^2)^{\frac{3}{2}}\cdot\frac{2}{3}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\right]\Bigg|_0^4=\cdots=\frac{980\pi}{3}$$

2. נחשב את האינטגרל המשטחי $\iint_{S_1} \vec{F} \cdot d\vec{s}$, נשים לב כי הנורמל שלנו יהיה מהצורה:

$$\vec{N} = (0, 0, \alpha)$$

עבור α כלשהו, אבל אז:

$$\left\langle F, \vec{N} \right\rangle = \left\langle (y^2, x^5, 5z), (0, 0, \alpha) \right\rangle = 5\alpha z$$

אבל בכל S_1, $z = 0$, אז:

$$\iint_{S_1} \vec{F} \cdot d\vec{s} = 0$$

סה"כ:

$$\iint_S \vec{F} \cdot d\vec{s} = \iiint_V 5dV - \iint_{S_1} \vec{F} \cdot d\vec{s} = \frac{980\pi}{3} - 0 = \frac{980\pi}{3}$$

תרגיל 13.3.

יהא $\alpha > 0$, ו-S הקבוצה שמרכזה בראשית עם הקודקודים:

$$(\alpha, \alpha, \alpha), (-\alpha, \alpha, \alpha), (-\alpha, -\alpha, \alpha), (\alpha, -\alpha, \alpha), (\alpha, \alpha, -\alpha), (-\alpha, \alpha, -\alpha), (-\alpha, -\alpha, -\alpha), (\alpha, -\alpha, -\alpha)$$

כלומר, קובייה שמרכזה בראשית, ואורך הצלעות שלה הוא 2α.
נסמן:

$$\vec{F}(x, y, z) = (3xz \cos(3zy) e^{\sin(3zy)}, -e^{\sin(3zy)}, 100z)$$

חשבו את $I = \oiint_S \vec{F} \cdot d\vec{s}$, כאשר כיוון הנורמל הוא כלפי חוץ.

פתרון:
נשים לב כי:

$$\text{div}(\vec{F}) = \frac{\partial}{\partial x}(3xz \cos(3zy) e^{\sin(3zy)}) + \frac{\partial}{\partial y}(-e^{\sin(3zy)}) + \frac{\partial}{\partial z}(100z) = 100$$

וגם, ממש לא בא לנו למצוא פרטמטריזציה של כל הקוביה, כי זה ידרוש מאיתנו לפצל את המשטח ל-6 חלקים.
נשתמש במשפט גאוס, כאשר נשים לב כי המשטח כבר סגור, וכי הנורמל הוא כלפי חוץ:

$$\oiint_S \vec{F} \cdot d\vec{s} = \iiint_V \text{div}(\vec{F}) dxdydz = 100\, \text{Vol}(V) = 100 \cdot (2\alpha)^3 = 800\alpha^3$$

תרגיל 13.4.

חשבו את:

$$I = \iint_S \vec{F} \cdot d\vec{s}$$

כאשר:

$$\vec{F} = \left(x^3 - \cos y, y^3 + \sqrt{x^3 + z^2}, z + 5xy\right)$$

ו:

$$S = \left\{(x, y, z) \,|z = 4 - x^2 - y^2, z \geq 0\right\}$$

כאשר כיוון הנורמל הוא כך שבנקודה $(0,0,4)$ רכיב z של הנורמל הוא חיובי.

פתרון:

נשים לב כי S הוא פרבולואיד, והוא לא גוף סגור, מצד שני:

$$\operatorname{div} \vec{F} = P_x + Q_y + R_z = 3x^2 + 3y^2 + 1$$

נשתמש במשפט גאוס, אבל קודם נסגור את המשטח (בדומה לתרגיל הקודם).

נסמן:

$$S_1 = \left\{(x, y, z) \,|x^2 + y^2 \leq 4, z = 0\right\}$$

אז:

$$\int_S \vec{F} \cdot d\vec{s} + \int_{S_1} \vec{F} \cdot d\vec{s} = \oiint_{S \cup S_1} \vec{F} \cdot d\vec{s} = \iiint_V \operatorname{div} \vec{F} dxdydz$$

כאשר V הוא גוף סגור, וכיוון הנורמל הוא כלפי חוץ.

1. נתחיל עם האינטגרל המשטחי, ונבחר פרמטריזציה גרפית למשטח S_1:

$$S_1 = \left\{(x, y, z) \,|x^2 + y^2 \leq 4, z = 0\right\}$$

כלומר, הגרף של $f(x,y) = 0$, אז:

$$\vec{N} = (-f_x, -f_y, 1) = (0, 0, 1)$$

על מנת לקבל נורמל כלפי חוץ נבחר $\vec{N} = (0, 0, -1)$, אז:

$$\Delta = \left\{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 4\right\}$$

ומתקיים:

$$\iint_{S_1} \vec{F} \cdot d\vec{s} = \iint_\Delta \vec{F} \cdot \vec{N} dxdy = \iint_\Delta (\star, \star, 5xy) \cdot (0, 0, -1) dxdy = -5 \iint_\Delta xydxdy$$

כאשר סימנו ב-$\star$ ביטוי כלשהו שמתאפס ולכן אין סיבה לחשבו. נעבור לקואורדינטות פולריות:

$$\iint_{S_1} \vec{F} \cdot d\vec{s} = -5 \int_0^{2\pi} \int_0^2 r^3 \cos\theta \sin\theta dr d\theta = -\frac{5 \cdot 16}{4 \cdot 2} \int_0^{2\pi} \sin 2t dt = 0$$

2. כעת נחשב את האינטגרל הנפחי:

$$\iiint_V \text{div}\,\vec{F} = \iiint_V \left(3x^2+3y^2+1\right) dxdydz$$

כאשר:

$$V = \left\{(x,y,z)|\ x^2+y^2 \le 4,\ 0 \le z \le 4-x^2-y^2\right\}$$

נעבור לקואורדינטות גליליות:

$$x = r\cos\theta, \qquad y = r\sin\theta, \qquad z = \rho$$

אז:

$$\Delta = \left\{(r,\theta,\rho)|\ 0 \le r \le 2,\ 0 \le \theta \le 2\pi,\ 0 \le \rho \le 4-r^2\right\}$$

כלומר:

$$\begin{aligned}
\iint_V 3x^2+3y^2+1dxdydz &= \int_0^{2\pi}\int_0^2\int_0^{4-r^2}\left(3r^2+1\right) rd\rho drd\theta \\
&= \int_0^{2\pi}\int_0^2 \left(3r^2+1\right) r\left(\rho\Big|_0^{4-r^2}\right) drd\theta \\
&= \int_0^{2\pi}\int_0^2 \left(3r^2+1\right) r\left(4-r^2\right) drd\theta \\
&= \int_0^{2\pi}\int_0^2 \left(12r^3+4r-3r^5-r^3\right) drd\theta \\
&= \int_0^{2\pi}\left(\frac{12r^4}{4}+\frac{4r^2}{2}-\frac{3r^6}{6}-\frac{r^4}{4}\right)|_0^2 d\theta \\
&= \int_0^{2\pi}\left(\frac{12\cdot 16}{4}+\frac{4\cdot 4}{2}-\frac{3\cdot 64}{6}-\frac{16}{4}\right) d\theta \\
&= 2\pi\left(48+8-\frac{64}{2}-4\right) = 2\pi\left(52-\frac{64}{2}\right) \\
&= \pi\left(104-64\right) = 40\pi
\end{aligned}$$

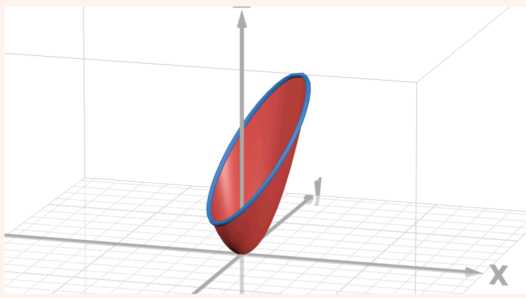
סה"כ מתקבל כי:

$$\iint_S \vec{F}\cdot d\vec{s} = \iint_{S\cup S_1}\vec{F}\cdot d\vec{s} - \iint_{S_1}\vec{F}\cdot d\vec{s} = \iiint_V \text{div}\,\vec{F} - \iint_{S_1}\vec{F}\cdot d\vec{s} = 40\pi - 0 = 40\pi$$

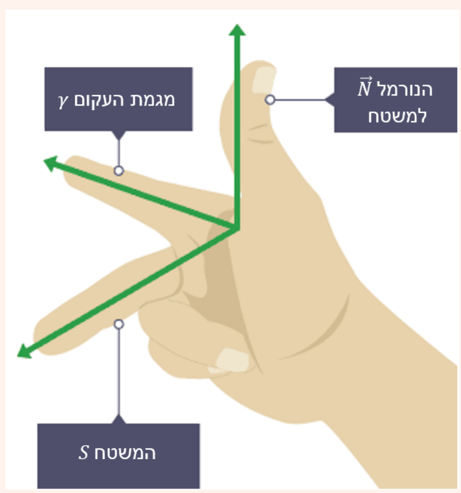
13.2 | משפט סטוקס

תזכורת – (משפט סטוקס)

יהא $S \subset \mathbb{R}^3$, נסמן ב∂S את השפה שלו כעקום סגור וחלק למקוטעין.
שימו לב! ∂S הוא סימון, הכוונה **לא** לשפה הטופולוגית, אלא לעקום שתוחם את השפה של S.



בהנתן נורמל $\vec{N}$, נוכל למצוא לשפה ∂S פרמטריזציה γ בעלת **מגמה חיובי** בצורה הבאה:
נשתמש **בכלל יד ימין**, כלומר בעזרת יד ימין שלנו, אם האצבע מצביעה לכיוון המסילה, האמה בכייון המשטח, והאגודל בכיוון הנורמל.



דרך לזכור זאת היא שהמעגל:

$$\gamma(t) = (\cos(t), \sin(t), 0)$$

עם הנורמל $\vec{N} = (0, 0, 1)$ בעלת מגמה חיובית.

תזכורת

יהא $\vec{F} = (P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z))$ שדה וקטורי גזיר ברציפות. נסמן:

$$\text{curl}(\vec{F})(x,y,z) = \begin{pmatrix} R_y(x,y,z) - Q_z(x,y,z) \\ P_z(x,y,z) - R_x(x,y,z) \\ Q_x(x,y,z) - P_y(x,y,z) \end{pmatrix}$$

ניתן לזכור זאת בעזרת הסימון הלא פורמלי:

$$\text{curl}(\vec{F})(x,y,z) = \det \begin{pmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P(x,y,z) & Q(x,y,z) & R(x,y,z) \end{pmatrix}$$

לפעמים נסמן $\text{curl}(\vec{F}) = \text{rot}(\vec{F})$. אפשר לסמן גם $\text{curl}(\vec{F}) = \nabla \times \vec{F}$, כאשר $\nabla = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix}$ הוא אופרטור דיפרנציאלי, אבל זה רק סימון.

תרגיל 13.5.

יהא $\vec{F} = (y^2 + x, x^5 + y, 5z + x)$ שדה וקטורי גזיר ברציפות.
חשבו את $\text{curl}(\vec{F})$.

פתרון:
נחשב ישירות:

$$\text{curl}(\vec{F})(x,y,z) = \begin{pmatrix} R_y(x,y,z) - Q_z(x,y,z) \\ P_z(x,y,z) - R_x(x,y,z) \\ Q_x(x,y,z) - P_y(x,y,z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 - 0 \\ 0 - 1 \\ 5x^4 - 2y \end{pmatrix}$$

תזכורת – (משפט סטוקס)

יהא S משטח פרמטרי, דו-צדדי, גזיר ברציפות, עם נורמה $\vec{N}$ שלא מתאפסת, כך ששפת המשטח ∂S עקום סגור ופשוט גזיר ברציפות γ בעלת מגמה חיובית ביחס ל $\vec{N}$.
יהא $\vec{F} = (P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z))$ שדה וקטורי גזיר ברציפות, אז:

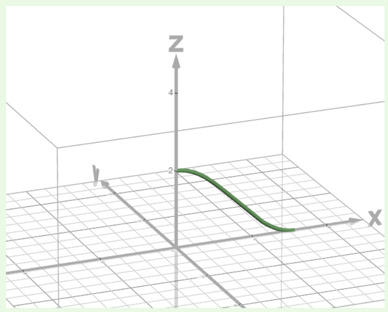
$$\oint_\gamma \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_S \text{curl}(\vec{F}) \cdot d\vec{s}$$

הערה

שימו לב, $\oint_\gamma \vec{F}\cdot d\vec{r}$ הוא אינטגרל מסילתי מסוג שני על $\gamma=\partial S$, ו$\iint_S \text{curl}(\vec{F})\cdot d\vec{s}$ הוא אינטגרל משטחי מסוג שני על S.

תרגיל 13.6.

1. יהא $F_1(x,y,z)=(x^2+y^2+z^2,x^2,yz)$, $F_2(x,y,z)=(z,2z,2x-2y)$.
הוכיחו כי $\text{curl}(F_1)=F_2$.
2. יהא העקום $\eta(t)=(t,0,\cos t+1)$ כאשר $t\in[0,\pi]$.



סובבו את העקום סביב ציר הz כך שיתקבל משטח S.
חשבו את:
$$I=\iint_S F_2(x,y,z)\cdot d\vec{s}$$
כאשר הנורמל הוא כך ש $\vec{N}(0,0,2)$ בעל רכיב z חיובי.

פתרון:

1. נחשב את $\text{curl}(F_1)$:

$$\text{curl}(F_1)(x,y,z)=\begin{pmatrix}\frac{\partial}{\partial y}(yz)-\frac{\partial}{\partial z}(x^2)\\ \frac{\partial}{\partial z}(x^2+y^2+z^2)-\frac{\partial}{\partial x}(yz)\\ \frac{\partial}{\partial x}(x^2)-\frac{\partial}{\partial y}(x^2+y^2+z^2)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}z-0\\2z-0\\2x-2y\end{pmatrix}=F_2(x,y,z)$$

2. ראשית, ניתן לחשב את האינטגרל ישירות, רק צריך למצוא פרמטריזציה של S.

תרגול עצמי

עשו זאת!

אבל, בעזרת בסעיף הקודם, יחד עם זאת שהשפה של S היא פשוט מעגל נפעיל את משפט סטוקס.

נשים לב כי השפה של S תהיה הנקודה $(\pi,0,0)$ מסובבת סביב ציר הz, כלומר המעגל:

$$C=\{(x,y,z)|x^2+y^2=\pi^2, z=0\}$$

על מנת להשתמש במשפט סטוקס, נרצה כיוון חיובי לC (ביחס לנורמל הנתון), כלומר נגד כיוון השעון, אז נבחר ב:

$$\gamma(t)=(\pi\cos t,\pi\sin t,0),\qquad t\in[0,2\pi]$$

אז:

$$I=\iint_S F_2(x,y,z)\cdot d\vec{s}=\iint_S \text{curl}(F_1)\cdot d\vec{s}=\oint_\gamma F_1\cdot d\vec{r}$$

וכמובן:

$$\begin{aligned}\oint_\gamma F_1\cdot d\vec{r}&=\int_0^{2\pi}F_1(\gamma(t))\cdot\gamma'(t)dt\\&=\int_0^{2\pi}\begin{pmatrix}\pi^2\\ \pi^2\cos^2 t\\ 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-\pi\sin t\\ \pi\cos t\\ 0\end{pmatrix}dt=\pi^3\int_0^{2\pi}-\sin t+\cos^3 t dt=...=0\end{aligned}$$

תרגיל 13.7.

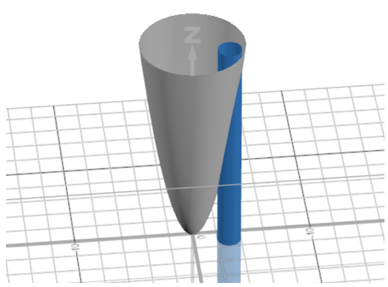
יהא $F(x,y,z)=(-z\sin(x),ye^{y^2},\cos(x))$.
יהא γ העקום הסגור, עם כיוון השעון שמתקבל כחתוך של הפרבולואיד וגליל הבא:

$$S_1(x,y,z)=\{(x,y,z)|z=x^2+y^2\},\qquad S_2(x,y,z)=\{(x,y,z)|(x+1)^2+(y+3)^2=1,z\in\mathbb{R}\}$$

חשבו את $I=\oint_\gamma F\cdot d\vec{r}$.

פתרון:

ראשית, נשרטט את γ ונראה כי אכן מדובר בעקום סגור ופשוט:



תרגול עצמי

הוכיחו זאת פורמלית על ידי מציאת פרמטריזציה של γ.

γ תוחם משטח כלשהו, S, ובעזרת התאמה של כיוון הנורמל, מתאים:

$$I = \oint_\gamma \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_S \text{curl}(\vec{F}) \cdot d\vec{s}$$

אבל:

$$\text{curl}(\vec{F}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial y}(\cos(x)) - \frac{\partial}{\partial z}(ye^{y^2}) \\ \frac{\partial}{\partial z}(-z\sin(x)) - \frac{\partial}{\partial x}(\cos(x)) \\ \frac{\partial}{\partial x}(ye^{y^2}) - \frac{\partial}{\partial y}(-z\sin(x)) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0-0 \\ -\sin(x)+\sin(x) \\ 0-0 \end{pmatrix} = \vec{0}$$

בפרט, $\text{curl}(\vec{F})$ מתאפס בכל $\mathbb{R}^3$, אז:

$$I = \oint_\gamma \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_S \text{curl}(\vec{F}) \cdot d\vec{s} = \iint_S \vec{0} \cdot d\vec{s} = 0$$

תרגיל 13.8.

יהא $\vec{F} = (xy, x^2, z^2)$, חשבו את $I = \oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$ כאשר C היא המסילה המתקבלת מחיתוך הפרבולואיד $z = x^2 + y^2$ עם המישור $z = y$, וכיוונה נגד כיוון השעון אם מסתכלים מהחלק החיובי של ציר z מטה.

פתרון:

נפעיל את משפט סטוקס, נתחיל בלמצוא את $\text{curl}(\vec{F})$:

$$\text{curl}(F) = \det\begin{pmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ xy & x^2 & z^2 \end{pmatrix} = (0, 0, 2x - x) = (0, 0, x)$$

כעת, נחפש משטח S כלשהו, כך ש $\partial S = C$, נשים לב כי C מוכל במשטח $z = y$, כלומר, בגרף של הפונקציה $z = f(x, y) = y$, כאשר $(x, y) \in D$ הם בדיוק ההיטל של החיתוך של הפרבולואיד עם המישור $z = y$ על המישור xy, כלומר ההיטל של:

$$y = z = x^2 + y^2 \Rightarrow y = x^2 + y^2 \Rightarrow x^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2$$

כלומר:

$$D = \left\{ (x, y) \middle| x^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 \leq \left(\frac{1}{2}\right)^2 \right\}$$

היות ומדובר בגרף של פונקציה, הנורמל הינו:

$$\vec{N} = \pm(-f_x, -f_y, 1) = \pm(0, -1, 1)$$

המסילה היא נגד כיוון השעון, אז על מנת לקבל התאמה במגמות, נבחר $\vec{N}=(0,-1,1)$, אז קיבלנו:

$$\oint_C \vec{F}\cdot d\vec{r} = \iint_S \text{curl}(\vec{F})\cdot d\vec{s} = \iint_D (0,0,x)\cdot(0,-1,1)\,dxdy = \iint_D xdxdy$$

נבחר את הקואורדינטות הפולריות המוזזות:

$$x = r\cos\theta, y = \frac{1}{2}+r\sin\theta, \qquad \Delta = \left\{(r,\theta)\middle|\, 0\le r\le\frac{1}{2}, 0\le\theta\le 2\pi\right\}$$

אז:

$$\begin{aligned}\iint_D xdxdy &= \iint_\Delta r\cos\theta\cdot rdrd\theta = \int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{1}{2}} r^2\cos\theta drd\theta \\ &= \int_0^{2\pi}\cos\theta d\theta\int_0^{\frac{1}{2}} r^2dr = 0\end{aligned}$$

כלומר, $I=0$.

תזכורת – (שדה מרחבי משמר)

יהא $\vec{F}:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ שדה וקטורי גזיר ברציפות. אם $\text{curl}(\vec{F})=\vec{0}$ בכל $\mathbb{R}^3$, אז $\vec{F}$ נקרא **שדה משמר מרחבי**. ואז, לכל עקום סגור ופשוט η, מתקיים:

$$\oint_\eta \vec{F}\cdot d\vec{r} = 0$$

בפרט, אם γ_1,γ_2 עקומים פשוטים המתחילים ומסתיימים באותה נקודה, אז מתקיים:

$$\oint_{\gamma_1}\vec{F}\cdot d\vec{r} = \oint_{\gamma_2}\vec{F}\cdot d\vec{r}$$

תרגיל 13.9.

יהא $\vec{F}=(e^x\sin y, e^x\cos y, z^2)$, והעקום:

$$C(t) = \left(\sqrt{t}, t^3, e^{\sqrt{t}}\right), \qquad 0\le t\le 1$$

חשבו את $\int_C \vec{F}\cdot d\vec{r}$.

פתרון:

ראשית, נבדוק אם $\vec{F}$ הוא שדה מרחבי משמר, ואכן:

$$\text{curl}(\vec{F}) = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ e^x \sin y & e^x \cos y & z^2 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ e^x \cos(y) - e^x \cos(y) \end{pmatrix} = \vec{0}$$

ולכן, השדה משמר בכל $\mathbb{R}^3$. כלומר, כל מסילה γ המתחילה ב $C(0) = (0,0,1)$ ומסתיימת ב $C(1) = (1,1,e)$, תיתן את אותו ערך לאינטגרל. נפצל את γ ל-3 מסילות ישרות ומקבילות לצירים באופן הבא:

$$C_1(t) = (t,0,1), \qquad 0 \le t \le 1$$

$$C_2(t) = (1,t,1), \qquad 0 \le t \le 1$$

$$C_3(t) = (1,1,t), \qquad 1 \le t \le e$$

נגדיר את γ כשרשור של המסילות C_1, C_2, C_3 אז:

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_\gamma \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{C_1} \vec{F} \cdot d\vec{r} + \int_{C_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} + \int_{C_3} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

נחשב את האינטגרלים:

.1

$$\int_{C_1} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_0^1 \vec{F}(C_1(t)) \cdot C_1'(t) dt = \int_0^1 \vec{F}(t,0,1) \cdot (1,0,0)\, dt$$
$$= \int_0^1 (e^t \sin 0, e^t \cos 0, 1) \cdot (1,0,0)\, dt = \int_0^1 0 dt = 0$$

.2

$$\int_{C_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_0^1 \vec{F}(1,t,1) \cdot (0,1,0)\, dt$$
$$= \int_0^1 (e^1 \sin t, e^1 \cos t, 1) \cdot (0,1,0)\, dt = \int_0^1 e \cos t dt = e \sin 1$$

.3

$$\int_{C_3} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_1^e \vec{F}(1,1,t) \cdot (0,0,1)\, dt$$
$$= \int_1^e (e^1 \sin 1, e^1 \cos 1, t^2) \cdot (0,0,1)\, dt = \int_1^e t^2 dt = \frac{e^3 - 1}{3}$$

ולכן:

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = e \sin 1 + \frac{e^3 - 1}{3}$$