רשימות תרגול לקורס להנדסת חשמל ואלקטרוניקה (0509-1747)

נכתב על ידי בן פוירשטיין, אסתר ליבנה, רפאל לוי וחן פרנקל בסמסטר ב׳ תשפ״ד

רשימות תרגול אילו נכתבו בצמוד לקורס כפי שלימדו ד״ר לודה מרקוס-אפשטיין, ד״ר גיא לנדסמן ולאוניד וישנבסקי באוניברסיטת תל אביב, הן עלולות להכיל טעויות, חוסרים או אי דיוקים, תיקונים יתקבלו בברכה.

bf1@mail.tau.ac.il, estherrachel@mail.tau.ac.il, raphaellevy1@tauex.tau.ac.il,
chenfrenkel@mail.tau.ac.il

תוכן העניינים

1 תרגול ראשון 2
1.1 התכנסות סדרת פונקציות 2
1.2 התכנסות טורי פונקציות 6

2 תרגול שני 10
2.1 גזירה ואינטגרציה של סדרות וטורי פונקציות 10
2.2 טורי חזקות 14

3 תרגול שלישי 19
3.1 טורי טיילור 19
3.2 פונקציות במספר משתנים וטופולוגיה 22
3.3 גיאומטריה במרחב 27

4 תרגול רביעי 31
4.1 רציפות פונקציות במספר משתנים 31
4.2 קואורדינטות מעגליות 35
4.3 גזירות 39

5 תרגול חמישי : כלל השרשרת, נגזרות מכוונות ומשפט פונקציות סתומות 44
5.1 כלל השרשרת 44
5.2 נגזרת מכוונת וגרדיאנט 46
5.3 משפט הפונקציה הסתומה 49
5.4 תוצאות גיאומטריות ממשפט הפונקציה הסתומה 53

6 תרגול שישי 56
6.1 נגזרת מסדר גבוה 56
6.2 נקודות קיצון לפונקציה ב2 משתנים 59
6.3 נקודות קיצון לפונקציה ב3 משתנים, ומיון נקודות קיצון בעזרת מטריצת הסיאן 62
6.4 תרגול נוסף 64

7 תרגול שביעי - אינטגרל כפול 66
7.1 אינטגרל כפול במלבן ומשפט פוביני 66
7.2 אינטגרציה בתחום פשוט 69
7.2.1 החלפת סדר אינטגרציה 71

7.3 החלפת משתנים באינטגרל כפול 74
7.4 אינטגרל משולש 82
7.4.1 חישוב נפח 84
7.4.2 חישוב מסה בעזרת פונקציית צפיפות 85
7.5 תרגול נוסף 87

8 תרגול שמיני : החלפות משתנים ואינטגרל קווי ראשון 90
8.1 החלפת משתנים באינטגרל משולש 90
8.1.1 החלפות משתנים נפוצות 93
8.2 עקומים 96

9 תרגול תשיעי 98
9.1 אורך עקום 98
9.2 אינטגרל קווי מסוג ראשון 101
9.3 אינטגרל קווי מסוג שני 104
9.4 שדה משמר 107

10 תרגול עשירי 113
10.1 משפט גרין 113
10.2 פרמטריזציה של משטח 122
10.3 אינטגרל משטחי מסוג ראשון 124

11 תרגול אחד עשר 131
11.1 אינטגרל משטחי מסוג שני 131
11.2 משפט גאוס (משפט הדיברגנץ) 135

תרגול ראשון

1.1 התכנסות סדרת פונקציות

תזכורת.

יהא $I \subset \mathbb{R}$ קטע (או $\mathbb{R}$ כולו, כלומר $I = \mathbb{R}$), ותהא סדרת פונקציות $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ כך שלכל n, $f_n : I \to \mathbb{R}$, ופונקציה נוספת $f : I \to \mathbb{R}$ נאמר כי סדרת הפונקציות f_n מתכנסות נקודתית לפונקציה f אם לכל $z \in I$ סדרת הנקודות $\{f_n(z)\}_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת ל$f(z)$, כלומר:

$$\forall z \in I, \quad \lim_{n\to\infty} f_n(z) = f(z)$$

או בכתיב יותר מפורט:

$$\forall z \in I, \forall \epsilon > 0, \exists N_{\epsilon,z} \in \mathbb{N}, \forall n > N_{\epsilon,z}, \quad |f_n(z) - f(z)| < \epsilon$$

במקרה זה נקרא ל f הפונקציה הגבולית של הסדרה $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ ונסמן $f \xleftarrow{n\to\infty} f_n$.

תזכורת.

יהא $I \subset \mathbb{R}$ קטע (או $\mathbb{R}$ כולו, כלומר $I = \mathbb{R}$), ותהא סדרת פונקציות $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ כך שלכל n, $f_n : I \to \mathbb{R}$, ופונקציה נוספת $f : I \to \mathbb{R}$, נאמר כי סדרת הפונקציות f_n מתכנסות במידה שווה (במ"ש) לפונקציה f אם מתקיים:

$$\forall \epsilon > 0, \exists N_\epsilon \in \mathbb{N} : \forall x \in I, \forall n > N_\epsilon, \quad |f_n(x) - f(x)| < \epsilon$$

ונסמן $f_n \twoheadrightarrow f$ (או לפעמים גם $f \xleftarrow[\text{Uniform}]{n\to\infty} f_n$). חשוב לציין כי התכנסות במ"ש גוררת התכנסות נקודתית, כלומר אם סדרת פונקציות מתכנסת במ"ש, אז היא בהכרח מתכנסת נקודתית.
תנאי שקול וחשוב הוא ש $f_n \twoheadrightarrow f$ אמ"מ:

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in I} |f_n(x) - f(x)| = 0$$

כלומר סדרת המספרים $\sup_{x\in I}|f_n(x) - f(x)|$ מתכנסת לאפס, תנאי זה נקרא לפעמים קריטריון הסופרמום.

תרגיל 1.1.1.

תהא סדרת הפונקציות $f_n : (0,1] \to \mathbb{R}$, $f_n = \begin{cases} n & x \in (0, \frac{1}{n}) \\ x^2 & \text{אחרת} \end{cases}$, מצאו פונקציה f אשר $f_n \xrightarrow{n\to\infty} f$, ובדקו האם:

$$\int_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n(x)dx = \lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)dx$$

פתרון:

יהא $z \in (0,1]$, אנו יודעים כי קיים N כך שלכל $n > N$ מתקיים $z > \frac{1}{n}$ כלומר, $f_n(z) = z^2$, כלומר סדרת הערכים $\{f_n(z)\}_{n=1}^{\infty}$ קבועה ושווה ל-z^2 הכל ממקום מסוים, ולכן מתכנסת ל-z^2, בפרט אם נסמן $f(x) = x^2$, אז $f_n \xrightarrow{n\to\infty} f$, את האינטגרל נחשב ישירות:

$$\int_0^1 f_n(x)dx = \int_0^{\frac{1}{n}} ndx + \int_{\frac{1}{n}}^1 x^2dx = 1 + \left[\frac{x^3}{3}\right]\Bigg|_{x=\frac{1}{n}}^{x=1} = \frac{4}{3} - \frac{1}{3n^3}$$

ומצד שני:

$$\int_0^1 x^2dx = \frac{1}{3}$$

כלומר:

$$\frac{1}{3} = \int_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n(x)dx \neq \lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)dx = \lim_{n\to\infty} \frac{4}{3} - \frac{1}{3n^3} = \frac{4}{3}$$

תרגיל 1.1.2.

תהא סדרת הפונקציות $f_n(x) = \frac{x}{n}$, האם הסדרה מתכנסת במ"ש בכל $\mathbb{R}$? מה לגבי הקטע $[0, A]$ עבור $A > 0$?

פתרון:

ראשית נמצא את הפונקציה הגבולית, נשים לב כי:

$$\forall x_0 \in \mathbb{R}, \lim_{n\to\infty} f_n(x_0) = \lim_{n\to\infty} \frac{x_0}{n} = 0$$

כלומר סדרת הפונקציות מתכנסות נקודתית לפונקציה $f(x) \equiv 0$.

נבדוק התכנסות במ"ש בכל $\mathbb{R}$, נשים לב כי:

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in\mathbb{R}} |f_n(x) - f(x)| = \lim_{n\to\infty} \sup_{x\in\mathbb{R}} \left|\frac{x}{n}\right| = \infty \neq 0$$

כלומר סדרת הפונקציות אינה מתכנסת במ"ש בכל $\mathbb{R}$, נבדוק את הקטע $[0, A]$:

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in[0,A]} |f_n(x) - f(x)| = \lim_{n\to\infty} \sup_{x\in[0,A]} \left|\frac{x}{n}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{A}{n} = 0$$

כלומר סדרת הפונקציות אכן מתכנסת במ"ש בקטע $[0, A]$.

תרגיל 1.1.3.

האם סדרת הפונקציות $f_n(x) = \frac{x^n}{3+2x^n}$ מתכנסת נקודתית או במ"ש ב$[0,2]$?

פתרון:
נתחיל בלמצוא את הפונקציה הגבולית, לשם כך נחלק למקרים:

1. עבור $x = 0$, מתקיים $f_n(0) = 0$.
2. עבור $0 < x < 1$ מתקיים:

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{x^n}{3+2x^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\underbrace{\frac{3}{x^n}}_{\to\infty} + 2} = 0$$

3. עבור $x = 1$ מתקיים $f_n(1) = \frac{1}{5}$.
4. עבור $1 < x \leq 2$ מתקיים:

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{x^n}{3+2x^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\underbrace{\frac{3}{x^n}}_{\to 0} + 2} = \frac{1}{2}$$

כלומר הפונקציה הגבולית הינה:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \in [0,1) \\ \frac{1}{5} & x = 1 \\ \frac{1}{2} & x \in (1,2] \end{cases}$$

כעת, נזכר במשפט שראינו בהרצאה, שאם $f_n \rightrightarrows f$, ולכל n, הפונקציה $f_n(x)$ רציפה, אז גם f רציפה, ולכן נסיק כי ההתכנסות לא יכולה להיות במ"ש.

תרגיל 1.1.4.

האם סדרת הפונקציות $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = x^n - x^{n+1}$ מתכנסת במ"ש?

פתרון:
ראשית נבדוק התכנסות נקודתית, נבדוק את הקצוות:

$$\forall n \in \mathbb{N}, f_n(0) = f_n(1) = 0$$

עבור $x \in (0,1)$ בעזרת א"ש המשולש:

$$\left|x^n - x^{n+1}\right| \leq |x^n| + \left|x^{n+1}\right| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

כלומר f_n מתכנסות נקודתית ל$f(x) = 0$.

על מנת להוכיח התכנסות במ"ש, נחשב:

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{x\in[0,1]}|f_n(x)-f(x)| = \lim_{n\to\infty}\underbrace{\sup_{x\in[0,1]}|x^n-x^{n+1}|}_{:=M_n}$$

היות ו-$x^n - x^{n+1}$ רציפה בקטע סגור, עפ"י משפט ויירשטראס, $g(x) = x^n - x^{n+1}$ מקבלת את ערכה המקסימלי והמינימלי בקטע $[0,1]$, על מנת למצוא אותו נגזור ונשווה לאפס:

$$g'(x) = nx^{n-1} - (n+1)x^n = 0$$

משום ש-$f_n(x) \geq 0$ אפשר להניח כי המקסימום לא מתקבל ב-$x=0$ (כי $f_n(0)=0$) ולכן ניתן לחלק ב-x^{n-1} ונקבל:

$$n-(n+1)x = 0 \Rightarrow x = \frac{n}{n+1}$$

ומאותה סיבה, נקודה זאת היא אכן המקסימום המוחלט, ולכן:

$$M_n = f_n\left(\frac{n}{n+1}\right) = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n - \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n\left(1-\frac{n}{n+1}\right)$$

נרצה לחשב את $\lim_{n\to\infty} M_n$, ולשם כך נפשט את M_n:

$$\begin{aligned} M_n &= \left(\frac{n}{n+1}\right)^n\left(1-\frac{n}{n+1}\right) = \left(1-\frac{1}{n+1}\right)^n\left(1-\frac{n}{n+1}\right) \\ &= \left(1+\frac{-1}{n+1}\right)^n\left(1-\frac{n}{n+1}\right) = \left(1+\frac{-1}{n+1}\right)^{n+1}\left(1+\frac{-1}{n+1}\right)^{-1}\left(1-\frac{n}{n+1}\right) \end{aligned}$$

ולכן:

$$\lim_{n\to\infty} M_n = \lim_{n\to\infty}\underbrace{\left(1+\frac{-1}{n+1}\right)^{n+1}}_{\to\frac{1}{e}}\underbrace{\left(1+\frac{-1}{n+1}\right)^{-1}}_{\to 1}\underbrace{\left(1-\frac{n}{n+1}\right)}_{\to 0} = 0$$

ולכן סדרת הפונקציות מתכנסת במידה שווה.

תרגיל 1.1.5.

יהיו $f_n \twoheadrightarrow f$ סדרת פונקציות המתכנסות במ"ש לפונקציה f כך שלכל n, f_n חסומה, הוכיחו כי f חסומה.

פתרון:
היות ו $\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in I}|f_n(x) - f(x)| = 0$ קיים n כך ש $\sup_{x\in I}|f_n(x) - f(x)| \leq 1$, כלומר לכל $x \in I$ מתקיים:

$$|f_n(x) - f(x)| < 1$$

אז לכל $x \in I$:

$$|f(x)| = |f(x) - f_n(x) + f_n(x)| \leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x)| \leq 1 + |f_n(x)|$$

אבל f_n חסומה, אז קיים K כך שלכל $x \in I$ מתקיים $|f_n(x)| \leq K$, אז:

$$|f(x)| =\leq 1 + |f_n(x)| \leq K + 1$$

לכל $x \in I$, כלומר $f(x)$ חסומה.

1.2 התכנסות טורי פונקציות

תזכורת.

מקרה פרטי של סדרת פונקציות שנעסוק בו רבות בקורס הוא טור פונקציות, כלומר אם יש לנו סדרת פונקציות $f_n(x) : I \to \mathbb{R}$ אז נגדיר:

$$s_n(x) = \sum_{i=1}^{n} f_n(x)$$

ונקבל סדרת פונקציות חדשה, נסמן את הפונקציה הגבולית שלה ע"י $s(x) = \sum_{i=1}^{\infty} g_n(x)$, כמו במקרים נרבה לדבר על התכנסות נקודתית ובמ"ש של הסדרה s_n לפונקציה s.

תרגיל 1.2.1.

יהא הטור $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{2^n}$, בדקו התכנסות נקודתית ובמ"ש בכל $\mathbb{R}$.

פתרון:
נקבע $x_0 \in \mathbb{R}$, נשים לב כי הסכום הוא סכום סדרה הנדסית.

תזכורת.

סכום סדרה הנדסית $q, q^2, ..., q^N$ הוא:

$$\sum_{n=1}^{N} q^n = \frac{1-q^{N+1}}{1-q} - 1 = \frac{q(1-q^N)}{1-q}$$

כלומר:

$$s_n(x_0) = \sum_{k=1}^{n} \frac{x_0}{2^n} = x_0 \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^n} = x_0 \left(\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}}{1-\frac{1}{2}} - 1 \right) \xrightarrow{n\to\infty} x_0 \left(\frac{1}{1-\frac{1}{2}} - 1 \right) = x_0$$

כלומר הטור מתכנס נקודתית:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{2^n} = x$$

נבדוק התכנסות במ"ש, בעזרת קריטריון הסופרמום, יהא $n \in \mathbb{N}$, אז:

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |s_n(x) - x| = \sup_{x\in\mathbb{R}} \left| \sum_{k=1}^{n} \frac{x}{2^k} - x \right| = \sup_{x\in\mathbb{R}} |x| \underbrace{\left| \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k} - 1 \right|}_{\text{מספר חיובי}} = \infty$$

ולכן ההתכנסות אינה במידה שווה.
תרגול עצמי - מצאו מפורשות את ערך הביטוי הבא, והוכיחו כי הוא חיובי:

$$\left| \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k} - 1 \right|$$

תרגיל 1.2.2.

יהא הטור:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x^n}{n^2} - \frac{x^{n+1}}{(n+1)^2} \right)$$

בדקו התכנסות נקודתית ובמ"ש ב$[-1, 1]$.

פתרון:
נשים לב כי:

$$s_1(x) = x - \frac{x^2}{2^2}$$

$$s_2(x) = x \cancelto{0}{- \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^2}{2^2}} - \frac{x^3}{3^2}$$

$$s_3(x) = x \cancelto{0}{- \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^2}{2^2} - \frac{x^3}{3^2} + \frac{x^3}{3^2}} - \frac{x^4}{4^2}$$

כלומר, הטור הוא טלסקופי. נמשיך ובאופן דומה נקבל כי:

$$s_n(x) = x - \frac{x^{n+1}}{(n+1)^2}$$

נשים לב כי עבור $x_0 \in [-1,1]$ מתקיים:

$$\lim_{n\to\infty} s_n(x_0) = \lim_{n\to\infty}\left(x_0 - \frac{x_0^{n+1}}{(n+1)^2}\right) = x_0$$

כלומר:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x^n}{n^2} - \frac{x^{n+1}}{(n+1)^2}\right) = x$$

ועבור התכנסות במ"ש:

$$\begin{aligned}\sup_{x\in[-1,1]}|s_n(x) - x| &= \sup_{x\in[-1,1]}\left|x - \frac{x^{n+1}}{(n+1)^2} - x\right| \\ &= \sup_{x\in[-1,1]}\left|\frac{x^{n+1}}{(n+1)^2}\right| = \sup_{x\in[-1,1]}\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)^2} \\ &= \frac{1}{(n+1)^2}\sup_{x\in[-1,1]}|x|^{n+1} = \frac{1}{(n+1)^2} \xrightarrow{n\to\infty} 0\end{aligned}$$

כלומר הטור מתכנס במ"ש.

תזכורת.

(משפט M של ויירשטראס) תהא סדרת פונקציות $f_n : I \to \mathbb{R}$, אם לכל $n \in \mathbb{N}$ קיים $M_n \geq 0$ כך ש $|f(x)| \leq M_n$ לכל $x \in I$, ומתקיים כי טור המספרים $\sum_{n=1}^{\infty} M_n$ מתכנס, אז $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ מתכנס בהחלט ובמידה שווה בI.

הערה.

מספר הערות על מבחן M של ויירשטראס:

1. כדי להשתמש במבחן אין צורך לדעת מהי הפונקציה הגבולית של הטור.
2. מעבר להתכנסות במידה שווה, המבחן גם מראה לנו כי הטור מתכנס בהחלט, כלומר הטור:

$$\sum_{n=1}^{\infty}|f_n(x)|$$

מתכנס נקודתית בI.

תרגיל 1.2.3.

האם הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\ln\left(1+\frac{1}{n^2+x^2}\right)$ מתכנס במ"ש ב-$\mathbb{R}$?
רמז, ראינו בחדו"א 1 כי לכל $t\geq 0$ מתקיים $\ln(1+t)\leq t$.

פתרון:
כאן נוכל להשתמש ישר במבחן M של ויירשטראס, כי בעזרת הרמז:

$$\ln\left(1+\frac{1}{n^2+x^2}\right)\leq\frac{1}{x^2+n^2}\leq\frac{1}{n^2}$$

כלומר, אם $M_n=\frac{1}{n^2}$, אז לכל $n\in\mathbb{N}$ מתקיים כי לכל $x\in\mathbb{R}$, $\left|\ln\left(1+\frac{1}{n^2+x^2}\right)\right|\leq\frac{1}{n^2}$ והטור $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ מתכנס, ולכן $\sum_{n=1}^{\infty}\ln\left(1+\frac{1}{n^2+x^2}\right)$ מתכנס במ"ש בכל $\mathbb{R}$.

תרגיל 1.2.4.

הוכיחו כי הטור:

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k\cos(kx)+k\sin(x)}{k^3}$$

מתכנס במ"ש לכל $x\in\mathbb{R}$.

פתרון:
נשים לב כי:

$$\begin{aligned}\left|\frac{(-1)^k\cos(kx)+k\sin(x)}{k^3}\right|&=\left|\frac{(-1)^k\cos(kx)}{k^3}+\frac{k\sin(x)}{k^3}\right|\\&\leq\left|\frac{(-1)^k\cos(kx)}{k^3}\right|+\left|\frac{k\sin(x)}{k^3}\right|\leq\frac{1}{k^3}+\frac{1}{k^2}\end{aligned}$$

כלומר אם $M_k=\frac{1}{k^3}+\frac{1}{k^2}$ אז לכל k מתקיים $\frac{(-1)^k\cos(kx)+k\sin(x)}{k^3}\leq M_k$, ובאמת $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^3}+\frac{1}{k^2}$ מתכנס, ולכן $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k\cos(kx)+k\sin(x)}{k^3}$ מתכנס במ"ש בכל $\mathbb{R}$.

תרגול שני

2.1 גזירה ואינטגרציה של סדרות וטורי פונקציות

תזכורת.

אם $f_n \twoheadrightarrow f$ בקטע $[a,b]$ כך ש לכל $n \in \mathbb{N}$, f_n אינטגרביליות ב$[a,b]$, אז f אינטגרבילית ב$[a,b]$ ומתקיים:

$$\forall x \in [a,b], \lim_{n\to\infty} \int_a^x f_n(t)dt = \int_a^x \lim_{n\to\infty} f_n(t)dt = \int_a^x f(t)dt$$

אם הטור $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ של פונקציות אינטגרביליות מתכנס במ"ש ב$[a,b]$, אז מתקיים:

$$\forall x \in [a,b], \int_a^x \left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n(t)\right) dt = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^x f_n(t)dt$$

תזכורת.

תהא סדרת פונקציות $(f_i)_{i\in\mathbb{N}}$ גזירות בI, אם מתקיים:

1. קיים $x_0 \in I$ כך ש $\{f_n(x_0)\}_{i=1}^{\infty}$ סדרת מספרים מתכנסת.
2. $\{f_i'\}_{i=1}^{\infty}$ מתכנסת במ"ש לפונקציה g.

אז קיימת f כך ש $f_n \twoheadrightarrow f$ ומתקיים $f' = g$.

תזכורת.

יהא טור פונקציות $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ גזירות בI, אם מתקיים:

1. קיים $x_0 \in I$ כך ש $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x_0)$ טור מספרים מתכנס.
2. טור הנגזרות $\sum_{n=1}^{\infty} f_n'$ מתכנס במ"ש בI.

אז $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ מתכנס במ"ש בI ומתקיים:

$$\forall x \in I, \left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x)$$

תרגיל 2.1.1.

תהא סדרת הפונקציות $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$:

$$f_n(x) = n^{\alpha} x e^{-nx}$$

עבור α פרמטר.

1. עבור אילו ערכים של α הסדרה מתכנסת במ"ש ב$[0,1]$?
2. עבור אילו ערכי α מתקיים:
$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n dx = \int_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n dx$$

פתרון:

1. ראשית, נשים לב כי לכל $x \in [0,1]$ ולכל $\alpha > 0$ מתקיים:
$$\lim_{n\to\infty} n^{\alpha} x e^{-nx} = 0$$
נבדוק התכנסות במ"ש בעזרת קריטריון הסופרמום, נסמן:
$$M_n = \sup_{x\in I} |n^{\alpha} x e^{-nx}|$$
נשים לב כי $[0,1]$ קטע סגור, ולכן עפ"י משפט ויירשטראס f_n משיגה את חסמיה, נגזור ונשוואה לאפס:
$$\frac{\partial}{\partial x} n^{\alpha} x e^{-nx} = n^{\alpha}(-n) x e^{-nx} + n^{\alpha} e^{-nx} = n^{\alpha} e^{-nx}(1-nx)$$
כלומר $x = \frac{1}{n} \iff \frac{\partial}{\partial x} f_n(x) = 0$, כלומר M_n יכול לקבל שלושה ערכים:
$$M_n = \max\left\{f_n(0), f_n(1), f_n\left(\frac{1}{n}\right)\right\}$$

נשים לב כי לכל $\alpha \in \mathbb{R}$

$$f_n(0) = 0, f_n(1) = n^{\alpha} e^{-n} \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

אבל:

$$f_n\left(\frac{1}{n}\right) = n^{\alpha}\frac{1}{n}e^{-1} = \frac{n^{\alpha-1}}{e}$$

שמתכנס ל0 אמ"מ $\alpha < 1$. כלומר סדרת הפונקציות מתכנסת במ"ש אמ"מ $\alpha < 1$.

2. מסעיף א' אנו יודעים כי:

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f_n dx = \int_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n dx$$

לכל $\alpha < 1$, אבל אנו לא יודעים מה קורה ב $\alpha \geq 1$, אין מנוס מפשוט לחשב:

$$\begin{aligned}
\int_0^1 n^{\alpha} x e^{-nx} dx &= n^{\alpha}\int_0^1 \underbrace{x}_{u}\underbrace{e^{-nx}}_{v'} dx = n^{\alpha}\left(\left[-\frac{x}{n}e^{-nx}\right]\Bigg|_{x=0}^{x=1} - \int_0^1\left(-\frac{1}{n}e^{-nx}\right)dx\right) \\
&= n^{\alpha}\left(\left[-\frac{x}{n}e^{-nx}\right]\Bigg|_{x=0}^{x=1} + \frac{1}{n}\int_0^1 \left(e^{-nx}\right)dx\right) \\
&= n^{\alpha}\left(\left[-\frac{x}{n}e^{-nx}\right]\Bigg|_{x=0}^{x=1} + \frac{1}{n}\left[-\frac{e^{-nx}}{n}\right]\Bigg|_{x=0}^{x=1}\right) \\
&= n^{\alpha}\left(\left[-\frac{x}{n}e^{-nx} - \frac{e^{-nx}}{n^2}\right]\Bigg|_{x=0}^{x=1}\right) \\
&= ... = -\frac{n^{\alpha-1}}{e^n} - \frac{n^{\alpha-2}}{e^n} + n^{\alpha-2}
\end{aligned}$$

מצד שני:

$$\int_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n dx = \int_0^1 0 dx = 0$$

אז השאלה היא מתי:

$$\lim_{n\to\infty} -\frac{n^{\alpha-1}}{e^n} - \frac{n^{\alpha-2}}{e^n} + n^{\alpha-2} = 0$$

ועבור 2 המחוברים הראשונים זה קורה לכל α, אך עבור השלישי זה קורה אמ"מ $\alpha < 2$.

תרגיל 2.1.2.

תהא סדרת הפונקציות $f_n : [0,\infty) \to \mathbb{R}$:

$$f_n(x) = \frac{\arctan(x^n)}{n}$$

1. בדקו התכנסות נקודתית ובמ"ש.
2. הראו כי f_n' לא מתכנסת אפילו נקודתית ל-f'.

פתרון:

1. נשים לב כי $\arctan(t)$ חסומה על ידי $\frac{\pi}{2}$ ולכן ננחש כי הפונקציה הגבולית היא $f \equiv 0$, ובאמת:

$$\sup_{x\in[0,\infty)} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x\in[0,\infty)} |f_n(x)| \leq \frac{\pi}{2}\frac{1}{n} \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

כלומר $f_n \twoheadrightarrow 0$.
נשים לב כי התכנסות במ"ש גוררת התכנסות נקודתית, כלומר, בהכרח גם $f \xrightarrow{n\to\infty} 0$.

2. נבדוק ישירות:

$$f_n'(x) = \left(\frac{\arctan(x^n)}{n}\right)' = \frac{1}{n}\frac{1}{1+(x^n)^2}nx^{n-1} = \frac{x^{n-1}}{1+x^{2n}}$$

מצד שני $f'(x) = 0$, אבל למשל עבור $x_0 = 1$ מתקיים:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_0^{n-1}}{1+x_0^{2n}} = \frac{1}{2} \neq 0$$

תרגיל 2.1.3.

יהא $R > 1$, וטור הפונקציות $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{x+n}$, בדקו התכנסות במ"ש בקטע $I = [1, R]$.

פתרון:

נשים לב כי לכל $x_0 \in I$ הטור $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{x_0+n}$ לייבניץ (חיוביות, מונוטוניות והתכנסות לאפס) כלומר הטור מתכנס נקודתית ב-I.
לגבי התכנסות במ"ש, קצת קשה לבדוק - כי הטור לא מתכנסות בהחלט (מדוע?), וכי הוא מאוד מזכיר טור הרמוני, שקשה לעבוד איתו. אז נעשה את הטריק הבא, בו נבדוק את התכנסות במ"ש של הטור בעזרת התכנסות במ"ש של טור הנגזרות.

1. נסמן $u_n(x) = \frac{(-1)^n}{x+n}$.

2. נגזור:
$$u_n'(x) = \frac{(-1)\cdot(-1)^n}{(x+n)^2}$$

3. נפעיל את משפט M של וויירשטראס על הטור $\sum_{n=1}^{\infty} u_n'(x)$, בעזרת:
$$|u_n'(x)| = \frac{1}{(x+n)^2} \le \underbrace{\frac{1}{n^2}}_{M_n}$$

וכמובן כי $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ מתכנס.

אז לפי משפט, קיבלנו כי הטור <u>המקורי</u> מתכנס.
תרגול עצמי - פתרו את תרגיל זה בדומה לתרגיל 1.2.3.

2.2 טורי חזקות

תזכורת.

לכל טור חזקות $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ (נשים לב לאינדקס $i=0$) קיים <u>רדיוס התכנסות</u> $0 \le R < \infty$, או $R=\infty$ כך ש:

1. (א) אם $|x-x_0| < R$ אז הטור מתכנס נקודתית ב-x.
   (ב) אם $|x-x_0| > R$ אז הטור מתבדר ב-x.
   (ג) אם $|x-x_0| = R$ אז הטור יכול להתכנס או להתבדר, תלוי בטור.
2. לכל קטע סגור $[\alpha,\beta]$ בתחום ההתכנסות הטור מתכנס במ"ש.

תזכורת.

עבור טור חזקות $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ מתקיים (קושי הדמור):
$$R = \frac{1}{\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}$$

הערה, אם מתקיימים:

1.
$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 0 \implies R = \infty$$

2.
$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \infty \implies R = 0$$

אם אם קיימים אחד הגבולות הבאים:

.1

$$L=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}}$$

.2

$$L=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$$

(יכולים גם להיות ∞) אז הם שווים לR

תרגיל 2.2.1.

מצאו את תחום ההתכנסות של טור החזקות:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{2^n n^2}$$

פתרון:

ראשית, נמצא את רדיוס ההתכנסות, נעשה זאת ב2 דרכים:

.1

$$R=_\star\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{1}{2^n n^2}}{\frac{1}{2^{n+1}(n+1)^2}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{2^{n+1}(n+1)^2}{2^n n^2}\right|=\lim_{n\to\infty}2\left|\frac{(n+1)^2}{n^2}\right|=2$$

.2

$$R=_\star\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{\left|\frac{1}{2^n n^2}\right|}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)\sqrt[n]{\left|\frac{1}{n^2}\right|}}=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{\sqrt[n]{\left|\frac{1}{n^2}\right|}}=2$$

($\star$ - בהנחה שהגבול קיים.)

כלומר, $R=2$, נבדוק מה קורה בקצוות:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{2^n n^2}\bigg|_{x=2}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{2^n n^2}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n^2}<\infty$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{2^n n^2}\bigg|_{x=-2}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-2)^n}{2^n n^2}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}<\infty$$

כלומר הטור מתכנס ב $[-2,2]$.

תרגיל 2.2.2.

בדקו התכנסות של הטור:

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n n\left(\frac{x}{2}-3\right)^n$$

פתרון:
נציב $t=\frac{x}{2}-3$, ונקבל את הטור:

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n n t^n$$

נבדוק עבור רדיוס התכנסות:

$$R =_{\star}= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{n}{n+1}\right| = 1$$

($\star$ - בהנחה שהגבול קיים.)
כלומר הטור מתכנס כאשר $|t|<1$, נשים לב כי:

$$|t|<1 \iff \left|\frac{x}{2}-3\right|<1 \iff -1<\frac{x}{2}-3<1 \iff 2<\frac{x}{2}<4 \iff 4<x<8$$

נבדוק קצוות, עבור $x=8$:

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n n\left(\frac{x}{2}-3\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n n$$

שאינו מתכנס, ועבור $x=4$:

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n n\left(\frac{x}{2}-3\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} n$$

שגם לא מתכנס, כלומר הטור מתכנס ב$(4,8)$.

תרגיל 2.2.3.

מצאו את רדיוס ההתכנסות של הטור:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^n+(-2)^n}{n}x^n$$

פתרון:
נשים לב כי אפשר לפרק את הטור לסכום של 2 טורים:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^n+(-2)^n}{n}x^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^n}{n}x^n + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-2)^n}{n}x^n$$

יש פה משחק מסוכן, כי התכנסות של 2 טורים לא בהכרך אומרת הכל על התכנסות של סכומן (הבעיה תהיה דווקא בתחום התבדרות הטורים) בכל זאת, נבדוק התכנסות:

1. עבור הטור $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{n} x^n$ נשים לב כי:

$$R =_{\star} \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{\left|\frac{3^n}{n}\right|}} = \frac{1}{3}$$

כלומר הטור מתכנס ב $|x| < \frac{1}{3}$.

2. הטור $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-2)^n}{n} x^n$ מתכנס ב:

$$R =_{\star} \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{\left|\frac{(-2)^n}{n}\right|}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{\left|\frac{2^n}{n}\right|}} = \frac{1}{2}$$

כלומר הטור מתכנס כאשר $|x| < \frac{1}{2}$.

($\star$ - בהנחה שהגבול קיים.)
נשים לב כי הטור הנתון מתכנס כאשר $|x| < \frac{1}{3}$ ומצד שני, מתבדר עבור $x \in (\frac{1}{3}, \frac{1}{2})$, כי שם טור אחד מתכנס וטור שני מתבדר, כלומר כל הטור מתבדר (סכום איבר-איבר של טור מתכנס ומתבדר הוא מתבדר) כלומר, רדיוס ההתכנסות חייב להיות $\frac{1}{3}$.

תזכורת.

יהא טור חזקות $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ עם רדיוס התכנסות $R > 0$, נסמן בI את תחום ההתכנסות ואת $s(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ להיות פונקציית סכום הטור, אז:

1. בתחום ההתכנסות, פונקציית סכום הטור רציפה.

2.

$$\forall x \in I, \int_{x_0}^{x} \sum_{n=0}^{\infty} a_n(t-x_0)^n dt = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{x_0}^{x} a_n(t-x_0)^n dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} a_n(x-x_0)^{n+1}$$

וטור האינטגרלים $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} a_n(x-x_0)^{n+1}$ בעל רדיוס התכנסות R ואם הטור המקורי מתכנס ב$x = x_0 \pm R$, אז גם טור האינטגרלים מתכנס שם, ונוסחאת האינטגרציה איבר-איבר נכונה גם בנקודות אילו.

3. לכל $x \in I$, $s(x)$ גזירה ומתקיים:

$$s'(x) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n\right)' = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n(x-x_0)^n)' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n(x-x_0)^{n-1}$$

כאשר טור הנגזרות בעל רדיוס התכנסות R, ואם הטור המקורי מתבדר ב$x = x_0 \pm R$ אז גם טור הנגזרות מתבדר שם.

תרגיל 2.2.4.

פתחו את $f(x) = \text{arctan}(x)$ לטור חזקות סביב $x = 0$.

פתרון:

נשים לב כי $f'(x) = \frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{1-(-x^2)}$, שאת הטור הזה אנחנו יודעים לפתח לטור חזקות סביב $x_0 = 0$, עבור $\left|-x^2\right| < 1$, אז נקבל, שעבור $x \in (-1,1)$:

$$f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(-x^2)^n = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}$$

אז עבור $x \in (-1,1)$:

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x) - \underbrace{f(0)}_{=0} = \int_0^x f'(t)dt = \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n t^{2n}dt = \sum_{n=0}^{\infty}\int_0^x (-1)^n t^{2n}dt \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \int_0^x t^{2n}dt = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \end{aligned}$$

$$\forall x \in (-1,1), \text{arctan}(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

הערה.

עבור x שלילי יש פה נקודה עדינה:

$$\int_0^x f'(x)dx = \begin{cases} \int_0^x f'(x)dx = f(x) - f(0) & x \geq 0 \\ -\int_x^0 f'(x) = -(f(0) - f(x)) = f(x) - f(0) & x < 0 \end{cases} = f(x) - f(0)$$

תרגול שלישי

3.1 טורי טיילור

תזכורת.

בחדו"א 1 ראינו כי הפולינום מסדר k שמקרב הכי טוב פונקציה $f : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ גזירה ∞ פעמים בסביבה של $x_0 \in \mathbb{R}$ זהו פולינום טיילור:

$$T_k(x) = \sum_{n=0}^{k} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

והגדרנו את טור טיילור להיות הפונקציה הגבולית:

$$T(x) = \lim_{k\to\infty} T_k(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

נשאלת השאלה מתי $f(x) = T(x)$, ואכן ראינו את משפט השארית:

$$R_n(x) := f(x) - T_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}$$

עבור c נקודה בין x ו- x_0, כלומר:

$$\lim_{n\to\infty} T_n(x) = f(x) \iff \lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$$

עוד פרט חשוב שלמדנו הוא יחידות מקדמי טיילור, כלומר שאם:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$$

אז בהכרח:

$$a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$$

תזכורת.

מספר טורים מוכרים:

$$\cos(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n},\ \sin(x)=-\frac{\partial}{\partial x}\left(\cos(x)\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}(2n)}{(2n)!}x^{2n-1}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1}$$

$$e^x=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$$

אשר מתכנסים בכל $\mathbb{R}$.

תרגיל 3.1.1.

הוכיחו את נוסחאת אוילר:

$$e^{ix}=\cos(x)+i\sin(x)$$

כאשר $i^2=(-1)$.

פתרון:

נציב בטורים הידועים:

$$\begin{aligned}e^{ix}&=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(ix)^n}{n!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(ix)^{2n}}{(2n)!}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(ix)^{2n+1}}{(2n+1)!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{i^{2n}x^{2n}}{(2n)!}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{i^{2n+1}x^{2n+1}}{(2n+1)!}\\&=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(i^2)^nx^{2n}}{(2n)!}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{i\left(i^2\right)^nx^{2n+1}}{(2n+1)!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(i^2)^nx^{2n}}{(2n)!}+i\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(i^2\right)^nx^{2n+1}}{(2n+1)!}\\&=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^nx^{2n}}{(2n)!}+i\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(-1\right)^nx^{2n+1}}{(2n+1)!}=\cos(x)+i\sin(x)\end{aligned}$$

הערה.

מספרים מרוכבים לא בחומר הקורס, אבל זאת מסקנה מאוד חזקה שאפשר להסיק מכלים שפיתחנו בקורס.

תרגיל 3.1.2.

חשבו את טור טיילור של:

$$f(x)=\sin^2(x)$$

פתרון:

נשתמש בזהות הטריגונומטרית:

$$\sin^2(x)=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos(2x)$$

אז אפשר פשוט להציב בטור טיילור של $\cos(x)$:

$$\sin^2(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}(2x)^{2n}\right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\left(1 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}(2x)^{2n}\right)$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2}\frac{(-1)^{n+1}}{(2n)!}(2x)^{2n} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(2n)!}2^{2n-1}x^{2n}$$

תרגיל 3.1.3.

תהא $f(x)$ פונקציה עם טור חזקות סביב $x_0 = 0$, הוכיחו כי אם f זוגית, אז כל מקדמי טיילור האי-זוגיים מתאפסים, ואם f אי-זוגית אז המקדמים הזוגיים מתאפסים. הסיקו כי, לפחות עבור פונקציה עם טור חזקות, נגזרת של פונקציה זוגית היא אי-זוגית, ונגזרת של פונקציה אי-זוגית היא זוגית.

פתרון:

1. נניח כי f פונקציה זוגית עם טור חזקות $f(x) = f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, נשים לב כי f מקיימת:

$$f(x) - f(-x) = 0$$

כאשר:

$$f(-x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(-x)^n = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n a_n x^n$$

כלומר:

$$0 = f(x) - f(-x) = \sum_{n=0}^{\infty}(a_n - (-1)^n a_n)x^n = \sum_{n=0}^{\infty} 2a_{2n+1}x^{2n+1} = 2a_1x + 2a_3x^3 + 2a_5x^5 + 2a_7x^7 \ldots.$$

אבל אנו יודעים כי לפונקציה 0 קיים טור חזקות 0, אז מיחידות מקדמי טיילור נקבל:

$$\forall n, \qquad a_{2n+1}x^{2n+1} = 0$$

שזה מה שרצינו להוכיח. המקרה של f אי-זוגית דומה מאוד ומושאר כתרגיל.

2. תהא $f(x)$ פונקציה זוגית בעלת טור חזקות, אז מסעיף א' מתקיים:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{2n}x^{2n} \implies f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty}(2n)a_{2n}x^{2n-1}$$

שלפי הסעיף הקודם פונקציה אי-זוגית, המקרה של נגזרת של פונקציה אי-זוגית זהה ומושארת כתרגיל.

3.2 פונקציות במספר משתנים וטופולוגיה

תזכורת.

יהא $D \subseteq \mathbb{R}^n$, פונקציה $f : D \to \mathbb{R}^m$ נקראת פונקציה בn משתנים.
לפעמים נסמן את f ע"י m פונקציות:

$$f(x_1, ..., x_n) = (f_1(x_1, ..., x_n), ..., f_m(x_1, ..., x_n))$$

כאשר:

$$f_i : D \to \mathbb{R}$$

נסמן:

$$\text{Im}(f) = \{f(x_1, ..., x_n)|(x_1, ..., x_n) \in D\} \subseteq \mathbb{R}^m$$

אם $m = 1$ נקרא ל f פונקציה סקלרית ואם $m > 1$ נקרא לה פונקציה וקטורית.
נקרא לתחום הגדול ביותר בו מוגדרת הפונקציה תחום ההגדרה של הפונקציה .
גרף של פונקציה היא הקבוצה הבאה:

$$\Gamma_f = \{(x_1, ..., x_n, y_1, ..., y_m)|(y_1, ..., y_m) = f(x_1, ..., x_n)\} \subseteq \mathbb{R}^{n+m}$$

שזו קבוצה שקצת קשה לצייר עבור מימדים גבוהים, אז נחפש דרך אחרת להציג פונקציה.
תהא $f : D \to \mathbb{R}$ פונקציה סקלרית, לכל $c \in \mathbb{R}$ הקבוצה הבאה:

$$f^{-1}(c) := \{(x_1, ..., x_m)|f(x_1, ..., x_m) = c\} \subseteq D$$

נקראת קו הגובה של f המתאימים לגובה c במקרה בו $m = 2$, ואז זו קבוצה ב$\mathbb{R}^2$, או משטח רמה אם $m = 3$, ואז זו קבוצה ב$\mathbb{R}^3$.

תזכורת.

1. עבור $\mathbb{R}^n$ נגדיר את פונקציית המרחק:

$$d(\vec{x}, \vec{y}) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i)^2}\ , \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

2. כדור פתוח ברדיוס $R > 0$ סביב נקודה p הוא:

$$B_R(p) := \{x \in \mathbb{R}^n | d(x, p) < R\}$$

3. כדור סגור (או דיסק) ברדיוס $R > 0$ סביב נקודה p הוא:

$$\overline{B}_R(p) := D_R(p) := \{x \in \mathbb{R}^n | d(x, p) \leq R\}$$

4. נקודה $p \in A \subseteq \mathbb{R}^n$ נקראת נקודת פנים של A אם קיים $\epsilon > 0$ כך שכדור פתוח ברדיוס ϵ ממורכז בנקודה p מוכל בA.

5. קבוצה $A \subseteq \mathbb{R}^n$ נקראת פתוחה אם כל נקודה בה היא נקודת פנים.
6. נקודה $p \in \mathbb{R}^n$ נקראת נקודת שפה של $A \subseteq \mathbb{R}^n$ אם לכל $\epsilon > 0$ הכדור ברדיוס ϵ סביב p מכיל גם נקודה בA וגם נקודה לא בA.
7. אוסף נקודת השפה של $A \subseteq \mathbb{R}^n$ נקרא השפה של A ומסומן ∂A.
8. קבוצה $A \subseteq \mathbb{R}^n$ נקראת סגורה אם $\partial A \subseteq A$.
9. קבוצה $A \subseteq \mathbb{R}^n$ נקראת חסומה אם קיים $R > 0$ כך ש A מוכלת בכדור ברדיוס R סביב 0.
10. עבור $A \subseteq \mathbb{R}^n$, נסמן ב $A^c = \{x \in \mathbb{R}^n | x \notin A\}$ את המשלים של A.
11. ראינו בהרצאה כי A פתוחה אמ"מ A^c סגורה, וA סגורה אמ"מ A^c פתוחה, וכי $(A^c)^c = A$.

תרגיל 3.2.1.

הוכיחו כי קבוצה $A \subseteq \mathbb{R}^n$ היא פתוחה אמ"מ היא לא מכילה אף נקודת שפה.

פתרון:

$$\Leftarrow$$

אם A פתוחה, אז לכל נקודה $x_0 \in A$ קיים $\epsilon_{x_0} > 0$ כך שכדור סביב x_0 ברדיוס ϵ_{x_0} מוכל בA, כלומר x_0 לא יכולה להיות נקודת שפה, כלומר A לא מכילה אף נקודת שפה.

$$\Longrightarrow$$

אם A מכילה נקודת שפה $x_0 \in \partial A$, אז לכל $\epsilon > 0$ הכדור ברדיוס ϵ סביב x_0 מכיל נקודה לא בA, ולכן לא מוכל בA, כלומר x_0 איננה נקודת פנים, ולכן A לא פתוחה.

תרגיל 3.2.2.

הוכיחו כי אם $A \subseteq \mathbb{R}^n$, פתוחה וסגורה אז $A = \mathbb{R}^n$ או $A = \emptyset$.

פתרון:
דבר ראשון, $\mathbb{R}^n, \emptyset$ אכן גם סגורות וגם פתוחות, ונשים לב כי הן המשלימות אחת של השניה, ויותר מכך, אם A אכן גם סגורה וגם פתוחה, אז A^c גם כזאת, נניח בשלילה כי A, A^c הן לא $\mathbb{R}^n, \emptyset$, כלומר קיימים $p \in A, q \in A^c$, נסמן:

$$\ell = \{t \in [0,1] \mid t\vec{q} + (1-t)\vec{p} \in A\}$$

נשים לב כי $0 \in \ell, 1 \notin \ell$ נסמן $S = \sup \ell$, ברור כי $S \geq 0$, אבל גם $S < 1$, היות כי אם $S = 1$, נקבל כי $\vec{q} \in A$, כי A סגורה, אז הנקודה $\vec{X} = S\vec{q} + (1-S)\vec{p} \in A$ כי A סגורה, אבל היות וA פתוחה קיים $r > 0$ כך ש $B_r(X) \subseteq A$, אז $S + r \in \ell$ בסתירה לכך ש $S = \sup \ell$.

תרגיל 3.2.3.

1. הוכיחו את הטענות הבאות:
   (א) יהיו $\{U_n\}_{n=1}^{\infty}$ קבוצות פתוחות, הוכיחו כי $U=\bigcup_{n=1}^{\infty} U_n$ פתוחה.
   (ב) יהיו $\{F_n\}_{n=1}^{\infty}$ קבוצות סגורות, הוכיחו כי $F=\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n i$ סגורה.
   (ג) יהיו U_1, U_2 פתוחות, הוכיחו כי $U=U_1\cap U_2$ פתוחה, הסיקו כי כל חיתוך סופי של קבוצות פתוחות היא פתוחה.
   (ד) יהיו F_1, F_2 סגורות, הוכיחו כי $F=F_1\cup F_2$ סגורה, הסיקו כי כל איחוד סופי של קבוצות סגורות היא סגורה,
2. מצאו דוגמא נגדית לטענות הבאות:
   (א) יהיו $\{U_n\}_{n=1}^{\infty}$ קבוצות פתוחות, הוכיחו כי $U=\bigcap_{n=1}^{\infty} U_n$ פתוחה.
   (ב) יהיו $\{F_n\}_{n=1}^{\infty}$ קבוצות סגורות, הוכיחו כי $F=\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$ סגורה.

פתרון:

1. (א) תהא $p\in U$ היות והיא באיחוד, קיים k כך ש $p\in U_k$, היות וU_k פתוחה, קיים $r>0$ כך ש $B_r(p)\subseteq U_k\subseteq U$, אז $B_r(p)\subseteq U$, וסיימנו.
   (ב) נזכר כי K סגורה אמ"מ K^c פתוחה, ונשתמש בחוקי דה-מורגן:
$$F=\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n=\bigcap_{n=1}^{\infty}(F_n^c)^c=\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n^c\right)^c$$
   אז עלפי הסעיף הקודם, $\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n^c$ פתוחה, אז $F=\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n^c\right)^c$ סגורה.
   (ג) תהא $p\in U_1\cap U_2$, אז $p\in U_1$ וגם $p\in U_2$, היות ו U_1, U_2 פתוחות, קיימים $r_1, r_2>0$ כך ש $B_{r_1}(p)\subseteq U_1$ וגם $B_{r_2}(p)\subseteq U_2$, נסמן $r=\min\{r_1,r_2\}>0$, אז $B_r(p)\subseteq B_{r_1}(p)$ וגם $B_r(p)\subseteq B_{r_2}(p)$ ולכן $B_r(p)\subset U_1\cap U_2$ וסיימנו.
   (ד) נשאיר את סעיף זה כתרגיל.
2. (א) נסמן $U_n=B_{\frac{1}{n}}(0)$, אז:
$$U=\bigcap_{i=1}^{\infty} U_i=\bigcap_{n=1}^{\infty} B_{\frac{1}{n}}(0)=\{0\}$$
   אינה פתוחה.
   (ב) נסמן $F_n=D_{1-\frac{1}{n}}(0)$, אז:
$$F=\bigcup_{n=1}^{\infty} D_{1-\frac{1}{n}}(0)=B_1(0)$$
   שאינה סגורה.

תרגיל 3.2.4.

מצאו וציירו את תחום ההגדרה של הפונקציות הבאות, בדקו האם תחומים אילו פתוחים, סגורים וחסומים.

1.
$$f(x,y)=\sqrt{(x^2+y^2-16)(x^2+y^2-9)}$$

2.
$$g(x,y)=\arcsin(2x-y)$$

3.
$$h(x,y)=\ln\left(x^2-y^2-4\right)$$

4.
$$s(x,y)=\sqrt{y|\ln(x)|}$$

<u>פתרון:</u>

1. נשים לב שעל מנת שf תהיה מוגדרת, הביטוי תחת השורש צריך להיות חיובי, ביטוי זה חיובי אמ"מ מתקיימת אחת מ2 האפשרויות הבאות:

(א) $(x^2+y^2-16)\geq 0$ **וגם** $(x^2+y^2-9)\geq 0$, כלומר:

$$x^2+y^2\geq 16 \text{ **וגם** } x^2+y^2\geq 9 \implies x^2+y^2\geq 16$$

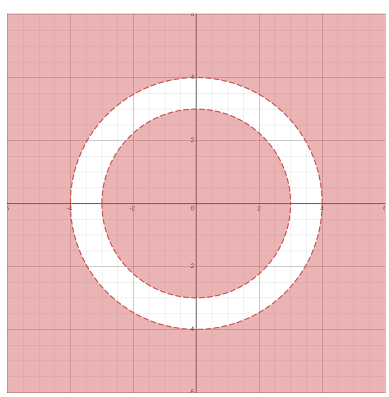
(ב) $(x^2+y^2-16)\leq 0$ **וגם** $(x^2+y^2-9)\leq 0$, כלומר:

$$x^2+y^2\leq 16 \text{ **וגם** } x^2+y^2\leq 9 \implies x^2+y^2\leq 9$$

כלומר, תחום הגדרת f הוא:

$$x^2+y^2\geq 16 \text{ **או** } x^2+y^2\leq 9$$

אם נשרטט את התחום הזה נקבל:



נשים לב כי שפת התחום הינה:

$$x^2+y^2=16 \text{ או } x^2+y^2=9$$

שמוכלת בקבוצה, כלומר תחום ההגדרה הינו סגור. הנקודה $(4,0)$ איננה נקודת פנים, ולכן הקבוצה לא פתוחה וברור כי הקבוצה אינה חסומה.

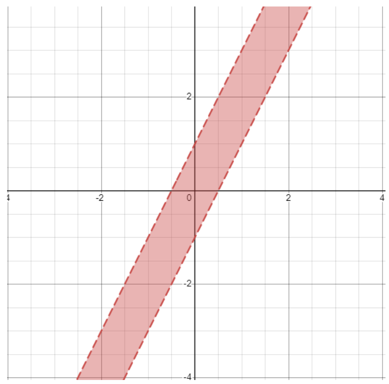
2. $\arcsin(t)$ מוגדר רק עבור $-1 \le t \le 1$, כלומר תחום ההגדרה שלנו הוא:

$$-1 \le 2x-y \le 1 \iff -1 \le 2x-y \text{ וגם } 2x-y \le 1$$

כלומר:

$$y \le 2x+1 \text{ וגם } y \ge 2x-1$$

וזהו התחום הבא:



נשים לב כי שפת התחום הינה:

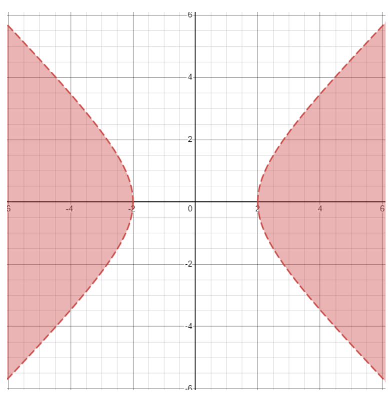
$$-1=2x-y \text{ או } 2x-y=1$$

שמוכלת בקבוצה, כלומר תחום ההגדרה הוא סגור ולא פתוח, וברור שהקבוצה אינה חסומה.

3. תחום ההגדרה של $\ln(t)$ הוא $t>0$ ולכן תחום ההגדרה הינו:

$$x^2-y^2-4>0 \implies x^2-y^2>4$$

שזהו התחום הבא:



הוא לא מכיל את השפה שלו, ולכן הוא פתוח אך לא סגור, וברור שהוא איננו חסום.

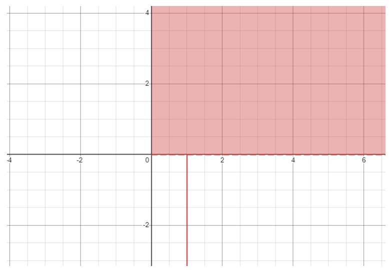
4. תחום ההגדרה של s הוא:

$$y|\ln(x)| \geq 0 \text{ וגם } x > 0$$

שהוא:

$$(y \geq 0 \text{ או } x = 1) \text{ וגם } x > 0$$

שהוא:



הוא איננו חסום, $(0,3)$ נקודת שפה שאיננה בתחום, ולכן אינו סגור, אבל גם $(3,0)$ לא נקודת פנים, ולכן הקבוצה גם לא פתוחה.

3.3 גיאומטריה במרחב

תזכורת.

נזכר במשוואות ריבועיות במישור $\mathbb{R}^2$, כלומר משוואת מהצורה:

$$ax^2 + by^2 + cxy + dx + ey = f$$

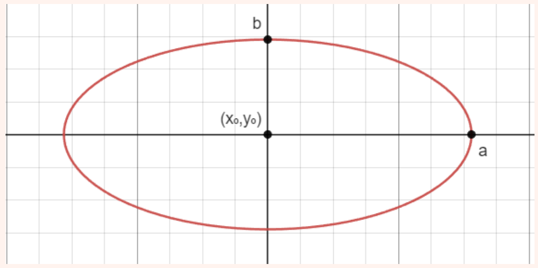
אז 4 משפחות ידועות של משוואת אילו הן:

1. מעגל סביב (x_0, y_0) ברדיוס $\mathbb{R}^2$ מתואר על ידי המשוואה:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$$

2. אליפסה סביב (x_0, y_0) עם "רדיס" a בכיוון ציר הx וb בכיוון ציר הy מתואר על ידי:

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1$$

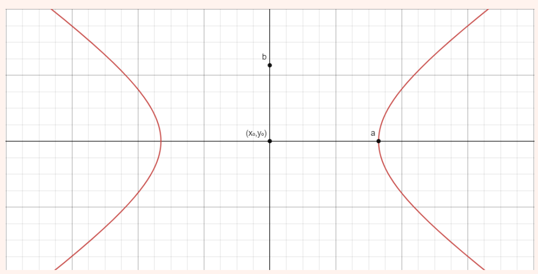


3. פרבולה עם ממורכזת ב (x_0, y_0) ומשתנה c:

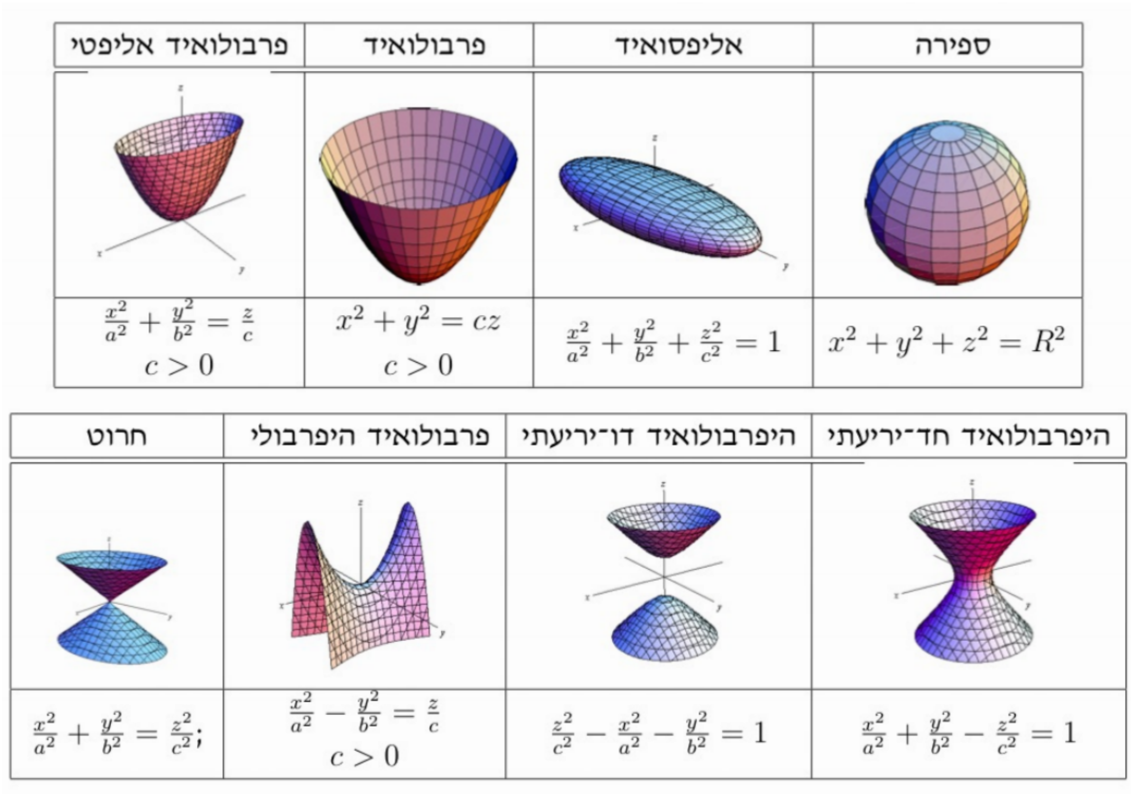
$$y - y_0 = c(x - x_0)^2$$

4. היפרבולה סביב (x_0, y_0), עם ציר a, ופה קצת קשה להסביר את התפקיד של b, אבל הוא מהווה מדד לכמה ההיפרבולה "מעוכה":

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2} - \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1$$



אותו משחק נוכל לעשות ב-$\mathbb{R}^3$, ולקבל מספר משפחות:



ספירה	אליפסואיד	פרבולואיד	פרבולואיד אליפטי
$x^2+y^2+z^2=R^2$	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$	$x^2+y^2=cz$ $c>0$	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{z}{c}$ $c>0$

היפרבולואיד חד־יריעתי	היפרבולואיד דו־יריעתי	פרבולואיד היפרבולי	חרוט
$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$	$\frac{z^2}{c^2}-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$	$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=\frac{z}{c}$ $c>0$	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{z^2}{c^2};$

תרגיל 3.3.1.

ציירו את קווי הגובה של "פרבולואיד הפרבולי":

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=\frac{z}{c}, c>0$$

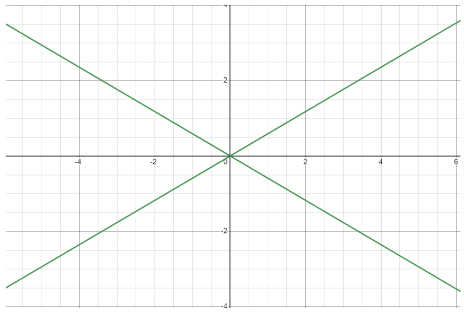
פתרון:

נרצה לקבוע את z, ולקבל קבוצה ב-$\mathbb{R}^2$, נחלק ל-3 מקרים:

1. אם $z=0$, נקבל את המשוואה:

$$\frac{x^2}{a^2}=\frac{y^2}{b^2} \implies y=\pm\sqrt{\frac{x^2b^2}{a^2}} \implies y=\pm x\left|\frac{a}{b}\right|$$

כלומר זוג ישרים:



2. עבור $z > 0$, נקבל:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = \frac{z}{c} \implies \frac{x^2}{a^2\frac{z}{c}} - \frac{y^2}{b^2\frac{z}{c}} = 1 \implies \frac{x^2}{\left(a\sqrt{\frac{z}{c}}\right)^2} - \frac{y^2}{\left(b\sqrt{\frac{z}{c}}\right)^2} = 1$$

שזה פשוט היפרבולה עם המשתנים:

$$\tilde{a} = a\sqrt{\frac{z}{c}}, \tilde{b} = b\sqrt{\frac{z}{c}},$$

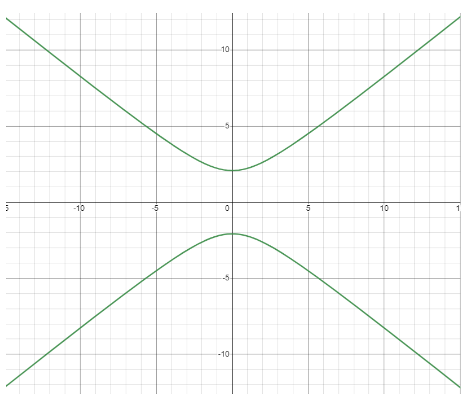
3. אם $z < 0$, נוכל לעשות כמעט אותו דבר, חוץ מלהכניס את $\frac{z}{c}$ לשורש, אז נוכל לעשות את הטריק הבא:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = \frac{z}{c} \implies \frac{x^2}{a^2\frac{(-z)}{c}} - \frac{y^2}{b^2\frac{(-z)}{c}} = -1 \implies \frac{x^2}{\left(a\sqrt{\frac{(-z)}{c}}\right)^2} - \frac{y^2}{\left(b\sqrt{\frac{(-z)}{c}}\right)^2} = -1$$

כלומר:

$$\frac{y^2}{\left(b\sqrt{\frac{(-z)}{c}}\right)^2} - \frac{x^2}{\left(a\sqrt{\frac{(-z)}{c}}\right)^2} = 1$$

שזאת היפרבולה "הפוכה", כלומר כאשר הפכנו את התפקידים של x, y - והיא תראה כך:



תרגול רביעי

4.1 רציפות פונקציות במספר משתנים

תזכורת.

לכל $m \in \mathbb{N}$ נוכל להגדיר פונקצית מרחק (אשר נקראת גם מטריקה אוקלידית) ב־$\mathbb{R}^m$ על ידי:

$$d : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \to [0, \infty)$$

$$d(\vec{x}, \vec{y}) = \sqrt{\sum_{i=1}^{m} (x_i - y_i)^2}$$

תהא סדרת נקודות $\{\vec{x}_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ נאמר כי $\lim_{n\to\infty} \vec{x}_n = \vec{x}$ אם:

$$\forall \epsilon > 0, \exists N_\epsilon \in \mathbb{N}, \forall n > N_\epsilon, d(\vec{x}_n, \vec{x}) < \epsilon$$

ראינו בהרצאה כי אם נסמן:

$$\vec{x}_n = (x_1^n, ..., x_m^n), \vec{x} = (x_1, ..., x_m)$$

אז:

$$\lim_{n\to\infty} \vec{x}_n = \vec{x} \iff \begin{matrix} \lim_{n\to\infty} x_1^n = x_1 \\ \vdots \\ \lim_{n\to\infty} x_m^n = x_m \end{matrix}$$

תזכורת.

תהא $f : D \to \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}^n$ סביבה של נקודה $\vec{x}_0$, אז נסמן:

$$\lim_{\vec{x}\to\vec{x}_0} f(\vec{x}) = L$$

אם:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, 0 < d(\vec{x}, \vec{x}_0) < \delta \implies |f(\vec{x}) - L| < \varepsilon$$

הערה.

בפרט, אם $n=2$, ו $\vec{x}_0=(a,b)$, אז:

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)=L$$

אם:

$$\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0,0<\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}<\delta \implies |f(x,y)-L|<\varepsilon$$

אם $L=f(\vec{x}_0)$ אז נאמר כי f רציפה בנקודה $\vec{x}_0$.

תזכורת.

יהיו $\gamma_1,\gamma_2:[0,1]\to\mathbb{R}^n$ מסילות רציפות כך ש $\gamma_1(0)=\gamma_2(0)=\vec{x}_0$, אם:

$$\lim_{t\to0} f(\gamma_1(t))\neq\lim_{t\to0} f(\gamma_2(t))$$

אז הגבול $\lim_{\vec{x}\to\vec{x}_0} f(\vec{x})$ לא קיים.

תזכורת.

(משפט היינה)
תהא $f(x,y)$ פונקציה סקלרית המוגדרת בסביבה של (a,b), אז $\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)=L$ אמ"מ לכל סדרה $\{(x_n,y_n)\}_{n=1}^{\infty}$ כך ש $(a,b)\xrightarrow{n\to\infty}(x_n,y_n)$ מתקיים:

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n,y_n)=L$$

תזכורת.

(אריתמטיקה של גבולות)
יהיו $f,g:D\subseteq\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ פונקציות כך ש:

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)=L,\ \lim_{(x,y)\to(a,b)} g(x,y)=M$$

אז:

1.
$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)+g(x,y)=L+M$$

2.
$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)\cdot g(x,y)=L\cdot M$$

.3

$$\forall c\in\mathbb{R},\ \lim_{(x,y)\to(a,b)} c\cdot f(x,y)=c\cdot L$$

.4 אם $M\neq 0$, אז:

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)}\frac{f(x,y)}{g(x,y)}=\frac{L}{M}$$

תרגיל 4.1.1.

הראו כי לא קיים הגבול:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$$

פתרון:
נשאף לנקודה $(0,0)$ דרך המסלולים ליניאריים (t,at) עם פרמטרים a שונים כאשר $t\longrightarrow 0$ (הגדרנו כאן לכל a מסילה שונה). כאשר ערך הגבול תלוי בערכו של a, זה בדיוק אומר שעל מסלולים שונים מתקבל גבול שונה, ולכן בפרט מוכיח את אי קיום הגבול.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}=\lim_{t\to0}\frac{t^2-(at)^2}{t^2+(at)^2}=\frac{1-a^2}{1+a^2}$$

ואכן הגבול תלוי ב-a, כלומר בשיפוע המסלול הקווי שבחרנו, ולכן לא קיים גבול.

תרגיל 4.1.2.

הוכיחו כי הפונקציה:

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{y\sin x}{\sqrt{y\sin x+1}-1} & y\sin x+1\geq0 \text{ וגם } \sqrt{y\sin x+1}\neq1\\ 2 & \text{אחרת}\end{cases}$$

רציפה ב$(0,1)$.
כאשר ניתן להניח ללא בדיקה כי $\frac{y\sin x}{\sqrt{y\sin x+1}-1}$ מוגדרת בסביבה מנוקבת של $(0,1)$.

פתרון:
כדאי להוכיח רציפות, נדרש לבדוק כי:

$$\lim_{(x,y)\to(0,1)}f(x,y)=f(0,1)$$

כלומר:

$$\lim_{(x,y)\to(0,1)}\frac{y\sin x}{\sqrt{y\sin x+1}-1}=2$$

ואכן, נסמן $t = y\sin x$, כאשר $(x,y)\longrightarrow(0,1)$, $t\longrightarrow 0$, ונקבל

$$\begin{aligned}\lim_{(x,y)\to(0,1)}\frac{y\sin x}{\sqrt{y\sin x+1}-1} &= \lim_{t\to 0}\frac{t}{\sqrt{t+1}-1}\\ &= \lim_{t\to 0}\frac{t\left(\sqrt{t+1}+1\right)}{\left(\sqrt{t+1}-1\right)\left(\sqrt{t+1}+1\right)}\\ &= \lim_{t\to 0}\frac{t\left(\sqrt{t+1}+1\right)}{t}=2\end{aligned}$$

כלומר f רציפה בתוחם הגדרתה.

תרגיל 4.1.3.

נתבונן בפונקציה $f(x,y)=\frac{\sin(x^2)+\sin(y^2)}{x+y}$. האם קיים לפונקציה גבול בנקודה $(x,y)=(0,0)$?

פתרון:
נשים לב כי $f(x,y)$ כלל אינה מוגדרת בישר $y=-x$ ולכן לא קיימת סביבה מנוקבת של $(0,0)$ בה הפונקציה מוגדרת. כלומר כלל אין משמעות לשאול על הגבול בנקודה זאת.

תזכורת.

(כלל הסנדוויץ') יהיו $f,g,h : D\subseteq\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ פונקציות סקלריות המוגדרות בסביבה של (a,b), כך שלכל (x,y) בסביבה זו מתקיים:

$$f(x,y)\le g(x,y)\le h(x,y)$$

ומתקיים:

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)=\lim_{(x,y)\to(a,b)} h(x,y)=L$$

אז:

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} g(x,y)=L$$

תרגיל 4.1.4.

נגדיר $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ ע"י:

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{y\sin(x)+3xy}{\sin(y)x} & \mathbb{R}^2-\{x=0 \text{ or } y=\pi k\}\\ \alpha & \{x=0 \text{ or } y=\pi k\}\end{cases}$$

עבור $\alpha\in\mathbb{R}$, מצאו α כך ש $f(x,y)$ תהיה רציפה ב$(0,0)$.

פתרון:
על מנת לקבל מועמד לגבול עבור α, נציב מסילה אחת, למשל (t,t), ונראה מה הגבול עליה

$$\begin{aligned}\lim_{t\to0}\frac{t\sin(t)+3t^2}{\sin(t)t}&=\lim_{t\to0}\frac{\sin(t)+3t}{\sin(t)}\\&=\lim_{t\to0}\left(1+3\frac{t}{\sin(t)}\right)=4\end{aligned}$$

לכן ניתן לראות כי 4 הוא המועמד שלנו להיות הגבול. נעזר בכלל הסנדוויץ' על מנת להוכיח שהוא אכן הגבול של הפונקציה הדו-ממדית:

$$\begin{aligned}0\le|f(x,y)-4|&\le\left|\frac{y\sin(x)+3xy}{\sin(y)x}-4\right|=\left|\frac{y\sin(x)}{\sin(y)x}-1+\frac{3xy}{\sin(y)x}-3\right|\\&\le\left|\frac{y\sin(x)}{\sin(y)x}-1\right|+\left|\frac{3xy}{\sin(y)x}-3\right|=\left|\frac{y}{\sin(y)}\cdot\frac{\sin(x)}{x}-1\right|+3\left|\frac{y}{\sin(y)}-1\right|\longrightarrow0\end{aligned}$$

כאשר השתמשנו באריתמטיקה של גבולות, ולכן עפ"י כלל הסנדוויץ':

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)=4$$

כלומר, עבור $\alpha=4$, הפונקציה רציפה ב$(0,0)$.

4.2 קואורדינטות מעגליות

תזכורת.

אם $f(x,y)$ פונקציה, ואנו רוצים לחשב את הגבול שלה ב$(0,0)$, אז לפעמים אנו יכולים לעבור לקואורדינטות פולאריות :

$$x=r\cos(\theta),y=r\sin(\theta)\iff\begin{array}{l}r=\sqrt{x^2+y^2}\\\theta=\arccos\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)=\arcsin\left(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)\end{array}$$

במקרה כזה, אם קיימות פונקציות g,h כך ש:

$$|f(x,y)|=|f(r\cos(\theta),r\sin(\theta))|\le|g(r)||h(r,\theta)|$$

ומתקיים:

$$\lim_{r\to0}g(r)=0$$

ו$h(r,\theta)$ חסומה עבור r לכל θ, אז $\lim_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)=0$.

תרגיל 4.2.1.

חשבו את הגבול הבא:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{3xy^2-5y^4}{x^2+2y^2}$$

פתרון:

נעבור לקואורדינטות פולאריות:

$$\begin{aligned}\frac{3xy^2-5y^4}{x^2+2y^2} &= \frac{3r^3\cos(\theta)\sin^2(\theta)-5r^4\sin^4(\theta)}{r^2\cos^2(\theta)+2r^2\sin^2(\theta)}\\ &= \frac{r^3(3\cos(\theta)\sin^2(\theta)-5r\sin^4(\theta))}{r^2(1+\sin^2(\theta))} = r\frac{3\cos(\theta)\sin^2(\theta)-5r\sin^4(\theta)}{1+\sin^2\theta}\end{aligned}$$

נשים לב כי:

$$\left|\frac{3\cos(\theta)\sin^2(\theta)-5r\sin^4(\theta)}{1+\sin^2\theta}\right| \leq \left|\frac{3\cos(\theta)\sin^2(\theta)-5r\sin^4(\theta)}{1}\right| \leq |3+5r|$$

וכמובן כי $\lim_{r\to 0}|r| = 0$, אז:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{3xy^2-5y^4}{x^2+2y^2} = 0$$

תרגיל 4.2.2.

הוכיחו או הפריכו, אם לכל θ_0 מתקיים:

$$\lim_{r\to 0} f(r\cos(\theta_0), r\sin(\theta_0)) = 0$$

אז מתקיים:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$$

פתרון:

נפריך עם הפונקציה $f(x,y)=\frac{xy^3}{x^2+y^6}$ והגבול:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^3}{x^2+y^6}$$

ננסה לעבור לקואורדינטות פולאריות:

$$\frac{xy^3}{x^2+y^6} = \frac{r^4\cos(\theta_0)\sin^3(\theta_0)}{r^2\cos^2(\theta_0)+r^6\sin^6(\theta_0)} = r^2\frac{\cos(\theta_0)\sin^3(\theta_0)}{\cos^2(\theta_0)+r^4\sin^6(\theta_0)}$$

נשים לב כי עבור θ_0 כך ש $\cos(\theta_0) = 0$ מתקיים:

$$r^2 \frac{\cos(\theta_0)\sin^3(\theta_0)}{\cos^2(\theta_0) + r^4\sin^6(\theta_0)} = r^2 \frac{0 \cdot \sin^3(\theta_0)}{r^4\sin^6(\theta_0)} = 0$$

ועבור θ_0 כך ש$\cos(\theta_0) \neq 0$ מתקיים:

$$\left| r^2 \frac{\cos(\theta_0)\sin^3(\theta_0)}{\cos^2(\theta_0) + r^4\sin^6(\theta_0)} \right| \leq |r^2| \underbrace{\left| \frac{\cos(\theta_0)\sin^3(\theta_0)}{\cos^2(\theta_0)} \right|}_{M(\theta_0)} \xrightarrow{r\to 0} 0$$

משום שלכל θ_0, הביטוי $M(\theta_0)$ קבוע ממשי.
כלומר, לכל θ_0 מתקיים:

$$\lim_{r\to 0} f(r\cos(\theta_0), r\sin(\theta_0)) = 0$$

אבל, נראה שהגבול $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ לא קיים, ואכן במסלול $\gamma_1(t) = (0,t)$, עבור $t \to 0$ נקבל:

$$\lim_{t\to 0} f(\gamma_1(t)) = \lim_{t\to 0} 0 = 0$$

אבל עבור $\gamma_2(t) = (t^3, t)$ עבור $t \to 0$ נקבל:

$$\lim_{t\to 0} f(\gamma_2(t)) = \lim_{t\to 0} \frac{t^6}{t^6 + t^6} = \lim_{t\to 0} \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

כלומר הגבול לא קיים.
אז מה קרה פה? הבעיה היא שאם נסמן:

$$f(r\cos(\theta), r\sin(\theta)) = \underbrace{r^2}_{g(r)} \underbrace{\frac{\cos(\theta)\sin^3(\theta)}{\cos^2(\theta) + r^4\sin^6(\theta)}}_{h(r,\theta)}$$

אז $\lim_{r\to 0} g(r) = 0$, מצד שני, $h(r,\theta)$ חסומה על ידי $M(\theta)$ לכל זווית θ, כלומר לכל זווית θ יש לפונקציה $h(r,\theta)$ חסם אחר ואין חסם משותף, כלומר, לא קיים $M \in \mathbb{R}$ כך <u>שלכל</u> זווית θ מתקיים $|h(r,\theta)| \leq M$.

תזכורת.

כמו בפונקציות במשתנה אחד, גם כאן מתקיים ש–$f(x,y)$ רציפה בנק' (x_0, y_0) אמ"מ קיים הגבול $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$ והוא שווה ל–$f(x_0, y_0)$.

תרגיל 4.2.3.

בדקו האם הפונקציות הבאות רציפות בתחום הגדרתן:

1. $f(x,y)=\begin{cases}\frac{x+y}{x^2-y} & x^2\neq y\\ 5 & \text{אחרת}\end{cases}$.
2. $f(x,y)=\begin{cases}\left(x^2+y^2\right)\cdot\sin\frac{1}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$.
3. $f(x,y)=\begin{cases}\frac{x}{3x+5y} & (x,y)\neq\left(x,-\frac{3}{5}x\right)\\ \frac{1}{3} & (x,y)=\left(x,-\frac{3}{5}x\right)\end{cases}$

פתרון:

1. בכל נקודה שאינה בפרבולה $y=x^2$ הפונקציה מוגדרת כאלמנטרית ולכן רציפה בתחום הגדרתה.
נחשב אז הגבול בכל נקודה $\left(a,a^2\right)$ של הפרבולה דרך מסלולים (x,kx) :

$$\begin{aligned}\lim_{(x,kx)\to(a,a^2)}\frac{x+y}{x^2-y} &= \lim_{x\to 0}\frac{x+a+kx+a^2}{(x+a)^2-(kx+a^2)}\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{x(1+k)+a+a^2}{x^2+x(2a-k)+a^2-a^2)}\\ &= \frac{1+k}{2a-k}+\frac{a+a^2}{2a-k}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\end{aligned}$$

כלומר, הגבול אינו סופי ולכן בפרט אינו קיים, לכן בפרט הפונקציה אינה רציפה ב– $(0,0)$.

2. בכל נקודה שאינה הראשית הפונקציה רציפה כהרכבה של אלמנטריות. נחשב את הגבול הבא $\lim_{(x,y)\to(0,0)}\left(x^2+y^2\right)\cdot\sin\frac{1}{x^2+y^2}$
מתקיים :

$$0\leq\left|\left(x^2+y^2\right)\sin\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right)\right|\leq\left|x^2+y^2\right|$$

ומשום ש-$0\longrightarrow x^2+y^2$ כאשר $(0,0)\longrightarrow(x,y)$, הרי שמכלל הסנדויץ' נקבל כי הגבול קיים ושווה לאפס.

3. בכל נקודה שאינה על הישר $y=-\frac{3}{5}x$ הפונקציה רציפה כהרכבה של אלמנטריות.
נבדוק עבור נקודות מהצורה $\left(a,-\frac{3}{5}a\right)$ כאשר $a\neq 0$, נראה כי הגבול לא קיים : נגדיר $x(t)=a$ $y(t)=-\frac{3}{5}a+t,$ כאשר $t\to 0$, $\left(a,-\frac{3}{5}a\right)\longrightarrow(x,y)$:

$$\lim_{(x,y)\to(a,-\frac{3}{5}a)}\frac{x}{3x+5y} = \lim_{t\longrightarrow 0}\frac{a}{3a-3a+5t}=\lim_{t\longrightarrow 0}\frac{a}{5t}=\frac{a}{5}\lim_{t\longrightarrow 0}\frac{1}{t}$$

והגבול הזה לא קיים, כלומר $f(x,y)$ לא רציפה ב$\left(a,-\frac{3}{5}a\right)$ עבור $a\neq 0$.
ב$a=0$ הגבול של f תחת המסילה קיים ושווה לאפס, אך לא שווה ל$f(0,0)$, כלומר, גם אם הגבול קיים, הפונקציה לא יכולה להיות רציפה בנקודה זאת.
כלומר f לא רציפה באף נקודה על הישר $y=-\frac{3}{5}x$.

4.3 גזירות

תזכורת.

תהא $f:D\subset\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, הגדרנו נגזרות חלקיות:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)=f'_x(x_0,y_0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h,y_0)-f(x_0,y_0)}{h}$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)=f'_y(x_0,y_0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0,y_0+h)-f(x_0,y_0)}{h}$$

נאמר כי $f(x,y)$ גזירה (דיפרנציאבילית) ב(x_0,y_0) אם קיימים קבועים $A,B\in\mathbb{R}$ ופונקציות $\alpha(x,y),\beta(x,y)$ כך שלכל x,y בסביבה של (x_0,y_0) מתקיים:

$$f(x,y)=f(x_0,y_0)+A(x-x_0)+B(y-y_0)+\alpha(x,y)(x-x_0)+\beta(x,y)(y-y_0)$$

כאשר:

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)}\alpha(x,y)=\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)}\beta(x,y)=0$$

או, באופן שקול:

$$f(x,y)=f(x_0,y_0)+A(x-x_0)+B(y-y_0)+\epsilon(x,y)\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}$$

כאשר:

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)}\epsilon(x,y)=0$$

במקרה זה (ב2 הניסוחים) בהכרח יתקיים:

$$A=\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)$$
$$B=\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)$$

1. אם $f(x,y)$ גזירה ב(x_0,y_0) אז היא רציפה שם.
2. אם f'_x,f'_y קיימות ורציפות בתחום $D\subset\mathbb{R}^2$, אז f גזירה שם, ונסמן $f\in C^1(D)$.
3. ייתכן כי קיימות f'_x,f'_y ב(x_0,y_0) אך f אינה גזירה, ואפילו לא רציפה ב(x_0,y_0).

תזכורת.

(מישור משיק)

מישור שעובר דרך הנקודה (x_0,y_0,z_0), עם נורמל $\vec{N}=\begin{pmatrix}A\\B\\C\end{pmatrix}$ הוא הקבוצה (אוסף הנקודות):

$$\{(x,y,z)|A(x-x_0)+B(x-x_0)+C(z-z_0)=0\}$$

בהנתן פונקציה $f(x,y)$, ניתן לשרטט את הגרף שלה, $\Gamma_f=\{(x,y,z)|z=f(x,y)\}\subset\mathbb{R}^3$, ואז אפשר להתבונן בנקודה על הגרף $(x_0,y_0,f(x_0,y_0))$ ולהתבונן על המישור המשיק בנקודה הזאת שמוגדר להיות אוסף כל הישרים המשיקים לכל עקומה גזירה המוכלת בגרף הפונקציה, במקרה ומישור זה קיים משוואתו תיהיה:

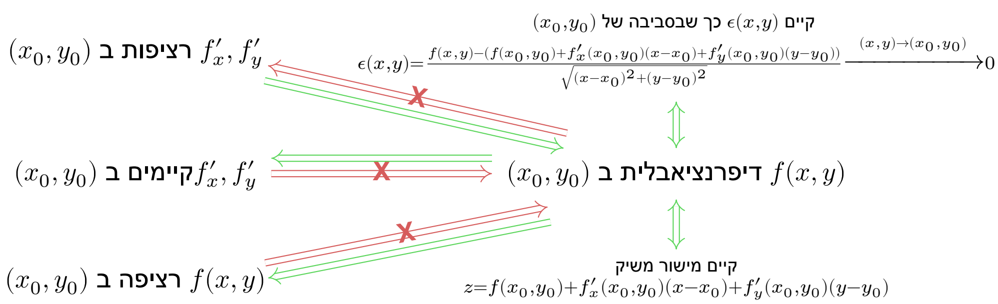
$$z=f(x_0,y_0)+\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0)+\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)(y-y_0)$$

כלומר, המישור עם הנורמל:

$$\vec{N}=\begin{pmatrix}-\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\\-\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\\1\end{pmatrix}$$

העובר בנקודה $(x_0,y_0,f(x_0,y_0))$.
ראינו בהרצאה כי פונקציה גזירה בנקודה (x_0,y_0) אמ"מ קיים בנקודה זאת מישור משיק לגרף הפונקציה.

לסיכום:



תרגיל 4.3.1.

עבור המשטחים הבאים, מצאו את המישור המשיק בנקודה המצוינת:

1. $\ln(xyz)=0, P=\left(1,2,\frac{1}{2}\right)$.
2. $\frac{2x+y}{x+2y+z}=1, P=(1,0,0)$, כאשר $x+2y+z\neq0$.

פתרון:

1. נביא את המשטח לצורה $z = f(x,y)$:

$$\ln(xyz) = 0 \implies xyz = 1 \underset{x,y\neq 0}{\implies} z = \frac{1}{xy} = f(x,y)$$

נחשב את $f'_x(P), f'_y(P)$, ואכן:

$$f'_x = -\frac{1}{yx^2}, f'_y = -\frac{1}{xy^2}$$

אז המישור המשיק הוא:

$$z = f(x_0,y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)(y-y_0)$$

$$z = f(1,2) + \frac{\partial f}{\partial x}(1,2)(x-1) + \frac{\partial f}{\partial y}(1,2)(y-2)$$

$$z = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}(x-1) - \frac{1}{4}(y-2)$$

2. נביא את המשטח לצורה $z = f(x,y)$.

$$\frac{2x+y}{x+2y+z} = 1 \underset{x+2y+z\neq 0}{\implies} 2x+y = x+2y+z \implies z = x-y$$

המשטח הוא כבר מישור, כלומר המישור המשיק הוא המשטח עצמו.

תרגיל 4.3.2.

תהא $f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & (x,y)=(0,0) \end{cases}$

1. האם $f(x,y)$ רציפה ב $(0,0)$?
2. האם קיימות $f'_x(0,0), f'_y(0,0)$?

פתרון:

1. יהא $a \in \mathbb{R}$, נגדיר $\gamma_a(t) = (at,t)$, ונבדוק את:

$$\lim_{t\to 0} f(\gamma_a(t)) = \frac{at^2}{(1+a^2)t^2} = \frac{a}{1+a^2}$$

בפרט עבור $a=0, a=1$ נקבל גבולות שונים, כלומר $f(x,y)$ אינה רציפה ב$(0,0)$.

2. נחשב עפ"י הגדרה:

$$f'_x(0,0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x,0) - f(0,0)}{x} = 0$$

$$f'_y(0,0) = \lim_{y\to 0} \frac{f(0,y) - f(0,0)}{x} = 0$$

תרגיל 4.3.3.

בתרגיל זה נראה כי דיפרנציאביליות אינה גוררת רציפות של הנגזרות החלקיות:
תהא

$$f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)\sin\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

הוכיחו כי $f(x,y)$ דיפרנציאבילית, אבל $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$ אינן רציפות ב$(0,0)$.

פתרון:
נוכיח דיפרנציאביליות:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h^2 \sin\left(\frac{1}{\sqrt{h^2}}\right)}{h} = 0$$

ובאותה צורה $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$.

כלומר, f דיפרנציאבילית ב$(0,0)$ אם $\epsilon(x,y) \xrightarrow{(x,y)\to(0,0)} 0$ עבור:

$$\epsilon(x,y) = \frac{f(x,y) - f(0,0) - \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)(x) - \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{f(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

אז:

$$|\epsilon(x,y)| \leq \left|(x^2+y^2)\sin\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right| = \left|\sqrt{x^2+y^2}\sin\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)\right| \xrightarrow{(x,y)\to(0,0)} 0$$

כלומר $f(x,y)$ דיפרנציאבילית ב$(0,0)$.
נחשב את $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ ב$(x,y) \neq (0,0)$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x\sin\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) + (x^2+y^2)\cos\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)\frac{-\frac{2x}{2\sqrt{x^2+y^2}}}{\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^2}$$

$$= 2x\sin\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) - \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\cos\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)$$

נראה כי $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ לא קיים (ובפרט לא שווה ל$0 = \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$), ואכן, עבור המסילה $\gamma(t) = (t,0)$ עבור $t \in [0,1]$ (שימו לב כי $t > 0$), עבור כאשר $\gamma(0) = 0$ נקבל:

$$\lim_{t\to 0} f(\gamma(t)) = \lim_{t\to 0} t\sin\left(\frac{1}{|t|}\right) - \frac{t}{|t|}\cos\left(\frac{1}{|t|}\right) = \lim_{t\to 0} t\sin\left(\frac{1}{t}\right) - \cos\left(\frac{1}{t}\right)$$

והגבול הזה לא קיים.

תרגול חמישי : כלל השרשרת, נגזרות מכוונות ומשפט פונקציות סתומות

5.1 כלל השרשרת

תזכורת.

תהא $f(x,y)$ פונקציה סקלרית גזירה, $\xi,\eta:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ פונקציות גזירות אז מתקיים:

$$\frac{\partial}{\partial t}f(\xi(t),\eta(t))=\frac{\partial f}{\partial \xi}(\xi(t),\eta(t))\frac{\partial \xi}{\partial t}(t)+\frac{\partial f}{\partial \eta}(\xi(t),\eta(t))\frac{\partial \eta}{\partial t}(t)$$

לפעמים נסמן את ξ,η על ידי x,y ואז זה קצת מבלבל, אבל הכוונה ל x,y כפונקציות של t.
במקרה ש ξ,η פונקציות של 2 משתנים, $\xi(u,v),\eta(u,v)$ נקבל:

$$\frac{\partial}{\partial u}f(\xi(u,v),\eta(u,v))=\frac{\partial f}{\partial \xi}(\xi(u,v),\eta(u,v))\frac{\partial \xi}{\partial u}(u,v)+\frac{\partial f}{\partial \eta}(\xi(u,v),\eta(u,v))\frac{\partial \eta}{\partial u}(u,v)$$

$$\frac{\partial}{\partial v}f(\xi(u,v),\eta(u,v))=\frac{\partial f}{\partial \xi}(\xi(u,v),\eta(u,v))\frac{\partial \xi}{\partial v}(u,v)+\frac{\partial f}{\partial \eta}(\xi(u,v),\eta(u,v))\frac{\partial \eta}{\partial v}(u,v)$$

את הנוסחאות האלה אפשר לכתוב בכתיב מקוצר:

$$\frac{\partial f}{\partial t}=\frac{\partial f}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial t}+\frac{\partial f}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial t}$$

או:

$$\frac{\partial f}{\partial u}=\frac{\partial f}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial u}+\frac{\partial f}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial u}$$
$$\frac{\partial f}{\partial v}=\frac{\partial f}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial v}+\frac{\partial f}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial v}$$

תרגיל 5.1.1.

1. תהא $f(x,y)=e^{2x-y}$, $x(t)=\sin(t),y(t)=t^4$, חשבו את $\frac{\partial f}{\partial t}$.
2. תהא $g(x,y)=x^2+xy+y^2$, עבור קואורדינטות פולאריות, $\begin{cases}x=r\cos(\theta)\\y=r\sin(\theta)\end{cases}$
חשבו את $\frac{\partial g}{\partial \theta},\frac{\partial g}{\partial r}$.

פתרון:

1. נפתור את התרגיל הזה ב2 דרכים שונות, עם כלל השרשרת ובעזרת חישוב ישיר, נתחיל עם כלל השרשרת:

$$\frac{\partial f}{\partial t}=\underbrace{\frac{\partial f}{\partial x}}_{2e^{2x-y}}\underbrace{\frac{\partial x}{\partial t}}_{\cos(t)}+\underbrace{\frac{\partial f}{\partial y}}_{-e^{2x-y}}\underbrace{\frac{\partial y}{\partial t}}_{4t^3}=2e^{2\sin(t)-t^4}\cos(t)-e^{2\sin(t)-t^4}4t^3=e^{2\sin(t)-t^4}\left(2\cos(t)-4t^3\right)$$

מצד שני, החישוב הישיר נותן לנו:

$$f(x(t),y(t))=e^{2\sin(t)-t^4}\implies\frac{\partial f}{\partial t}=e^{2\sin(t)-t^4}(2\cos(t)-4t^3)$$

2. נשתמש בכלל השרשרת:

$$\begin{aligned}\frac{\partial g}{\partial r}&=\frac{\partial g}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r}+\frac{\partial g}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r}=(2x+y)\left|_{\substack{x=r\sin(\theta)\\y=r\sin(\theta)}}\right.\cos(\theta)+(2y+x)\left|_{\substack{x=r\sin(\theta)\\y=r\sin(\theta)}}\right.\sin(\theta)\\&=(2r\cos(\theta)+r\sin(\theta))\cos(\theta)+(2r\sin(\theta)+r\cos(\theta))\sin(\theta)\\&=r(2\cos^2(\theta)+\cos(\theta)\sin(\theta)+2\sin^2(\theta)+\cos(\theta)\sin(\theta))=2r(1+\cos(\theta)\sin(\theta))\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial g}{\partial \theta}&=\frac{\partial g}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \theta}+\frac{\partial g}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \theta}=(2x+y)\left|_{\substack{x=r\sin(\theta)\\y=r\sin(\theta)}}\right.(-r\sin(\theta))+(2y+x)\left|_{\substack{x=r\sin(\theta)\\y=r\sin(\theta)}}\right.(r\cos(\theta))\\&=(2r\cos(\theta)+r\sin(\theta))((-r\sin(\theta)))+(2r\sin(\theta)+r\cos(\theta))(r\cos(\theta))\\&=r^2(-2\cos(\theta)\sin(\theta)-\sin^2(\theta)+2\sin(\theta)\cos(\theta)+\cos^2(\theta))=r^2(\cos^2(\theta)-\sin^2(\theta))\end{aligned}$$

תרגיל 5.1.2.

תהא $f(x,y)$ גזירה, נגדיר:

$$g(u,v)=f(3u-v,u^2+v)$$

בהנתן:

$$f'_x(7,3)=1,f'_y(7,3)=2$$

חשבו את:

$$\left.\frac{\partial g}{\partial u}\right|_{(u,v)=(2,-1)},\left.\frac{\partial g}{\partial v}\right|_{(u,v)=(2,-1)}$$

פתרון:

נשים לב כי אם נסמן $x(u,v)=3u-v,y(u,v)=u^2+v$, אז x,y גזירות, ולכן ניתן להשתמש בכלל

השרשרת:

$$\left.\frac{\partial g}{\partial u}\right|_{(u,v)=(2,-1)} = \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(x,y)=(x(2,-1),y(2,-1))} \left.\frac{\partial x}{\partial u}\right|_{(u,v)=(2,-1)} + \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(x,y)=(x(2,-1),y(2,-1))} \left.\frac{\partial y}{\partial u}\right|_{(u,v)=(2,-1)}$$

נחשב:

$$x(2,-1) = 3(2) - (-1) = 7, y(2,-1) = 2^2 - 1 = 3$$

$$\left.\frac{\partial x}{\partial u}\right|_{(u,v)=(2,-1)} = 3, \left.\frac{\partial y}{\partial u}\right|_{(u,v)=(2,-1)} = 2u = 4$$

אז:

$$\left.\frac{\partial g}{\partial u}\right|_{(u,v)=(2,-1)} = f'_x(7,3)\cdot 3 + f'_y(7,3)\cdot 4 = 3 + 4\cdot 2 = 11$$

אותו דבר נעשה עבור $\left.\frac{\partial g}{\partial v}\right|_{(u,v)=(2,-1)}$:

$$\left.\frac{\partial g}{\partial v}\right|_{(u,v)=(2,-1)} = \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(x,y)=(x(2,-1),y(2,-1))} \left.\frac{\partial x}{\partial v}\right|_{(u,v)=(2,-1)} + \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(x,y)=(x(2,-1),y(2,-1))} \left.\frac{\partial y}{\partial v}\right|_{(u,v)=(2,-1)}$$
$$= f'_x(7,3)\cdot(-1) + f'_y(7,3)\cdot 1 = -1 + 2 = 1$$

5.2 נגזרת מכוונת וגרדיאנט

תזכורת.

תהא $f(x,y) : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, וקטור $\hat{n} = (n_1, n_2) \in \mathbb{R}^2$, אז נגדיר:

$$\frac{\partial f}{\partial \hat{n}}(x_0,y_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0 + hn_1, y_0 + hn_2) - f(x_0,y_0)}{h}$$

זה השיפוע של גרף הפונקציה f, בנקודה (x_0,y_0) בכיוון $\hat{n}$.

נשים לב כי אם $\hat{n} = (1,0)$, אז $\frac{\partial f}{\partial \hat{n}} = f_x$, ואם $\hat{w} = (0,1)$ אז $\frac{\partial f}{\partial \hat{w}} = f_y$.

אם $f(x,y)$ דיפרנציאבילית ב(x_0,y_0), אז קיימת לה נגזרת מכוונת בכל כיוון $\vec{v}$ ב(x_0,y_0).

תזכורת.

אם $f(x,y)$ דיפרנציאבילית ב(x_0,y_0) אז לכל $\hat{n} = (n_1,n_2) \in \mathbb{R}^2$ מתקיים:

$$\frac{\partial f}{\partial \hat{n}}(x_0,y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)n_1 + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)n_2$$

אם נגדיר את הגרדיאנט של f להיות הווקטור $\nabla f(x_0,y_0)=\begin{pmatrix}\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\\ \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\end{pmatrix}$ ונזכר במכפלה סקלרית:

$$\left\langle \begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\gamma\\ \delta\end{pmatrix}\right\rangle=\alpha\gamma+\beta\delta$$

אז נוכל לכתוב:

$$\frac{\partial f}{\partial \hat{n}}(x,y)=\langle \nabla f(x,y),\hat{n}\rangle$$

נזכר גם כי $\langle \vec{v},\vec{w}\rangle$ מקסימלי כאשר $\vec{v},\vec{w}$ וקטורים מקבילים, כלומר $\frac{\partial f}{\partial \hat{n}}=\langle \nabla f,\hat{n}\rangle$ מקסימלי כאשר $\nabla f,\hat{n}$ מצביעים באותו כיוון, כלומר ∇f, כווקטור מצביע בכיוון הגידול המקסימלי של f.

תרגיל 5.2.1.

תהא $f(x,y)=e^x\sin(y)$, חשבו את $\frac{\partial f}{\partial \vec{n}}(3,4)$ עבור $\hat{n}=\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

פתרון:

נוכיח קודם כל שפונקציה- $f(x,y)$ דיפ' בנקודה-$(3,4)$ דרך רציפות נגזרות הלקיות :

$$\begin{aligned}f_x(3,4)&=e^x\sin(y)|_{(x,y)=(3,4)}=e^3\sin(4)\\ f_y(3,4)&=e^x\cos(y)|_{(x,y)=(3,4)}=e^3\cos(4)\end{aligned}$$

אז ע"י הגדרדיאנט $\nabla f(3,4)$, מקבלים:

$$\frac{\partial f}{\partial \hat{n}}(3,4)=\left\langle \begin{pmatrix}e^3\sin(4)\\ e^3\cos(4)\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2}\\ \frac{\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix}\right\rangle=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(e^3\sin(4)+e^3\cos(4)\right)$$

תרגיל 5.2.2.

חשבו את הנגזרת הכוונית של $f(x,y)=\begin{cases}\frac{-x^2y}{x^4+y^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$, בכוון $(\cos\theta,\sin\theta)$ בנקודה $(0,0)$

פתרון:

אפשר לראות שהפונקציה אינה רציפה ב-$(0,0)$. אכן, למסלולים (y,y) ו- $(\sqrt{y},y)$ מקבלים :

$$\lim_{(y,y)\to(0,0)} f(y,y)=0$$

$$\lim_{(\sqrt{y},y)\to(0,0)}=-\frac{1}{2}$$

. לכן אי-אפשר להשתמש במשפטים הקודמים ואז נחשב הנגזרת לפי הגדרה:

$$\lim_{h\to0}\frac{f(h\cos\theta,h\sin\theta)-0}{h}=\lim_{h\to0}-\frac{h^2\cos^2\theta h\sin\theta}{h(h^4\cos^4\theta+h^2\sin^2\theta)}=\lim_{h\to0}-\frac{\cos^2\theta h\sin\theta}{h^2\cos^4\theta+\sin^2\theta}$$

נבחין בין שני מקרים :

1. אם $\sin\theta=0$, כלומר הכוון של הנגזרת הוא על ציר ה-x, מתקיים :

$$\lim_{h\to0}-\frac{\cos^2\theta\sin\theta}{h^2\cos^4\theta+\sin^2\theta}=\lim_{h\to0}\frac{0}{h^2\cos^4\theta}=0$$

2. אם $\sin\theta\neq0$, מתקיים :

$$\lim_{h\to0}-\frac{\cos^2\theta\sin\theta}{h^2\cos^4\theta+\sin^2\theta}=\frac{\cos^2\theta\sin\theta}{\sin^2\theta}=\cos\theta\cdot\cot\theta$$

ביטוי מוגדר כאשר $\sin\theta\neq0$.

הערה.

כמו לנגזרות חלקיות, הנה פונקציה לא רציפה בנקודה כאשר כל נגזרות כווניות (כולל החלקיות) מוגדרות (אבל לא רציפות, לבדוק את זה).

תרגיל 5.2.3.

(שאלה ממבחן)

1. תהא $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ פונקציה זוגית וגזירה ב0 כך ש $g'(0)=0$, נגדיר $f(x,y)=g\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)$, הוכיחו כי f דיפרנציאבילית ב$(0,0)$.
2. תהא $f(x,y)=\cos\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)$, חשבו את $\frac{\partial f}{\partial\hat{n}}(0,0)$ עבור $\hat{n}=\left(\frac{\sqrt2}{2},\frac{\sqrt2}{2}\right)$.

פתרון:

1. נתחיל בחישוב $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0),\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$, עפ"י הגדרה:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=\lim_{h\to0}\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{g(\sqrt{h^2})-g(0)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{g(|h|)-g(0)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{g(h)-g(0)}{h}=g'(0)=0$$

חישוב דומה יראה לנו כי $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=0$, אז עפ"י הגדרה, f דיפרנציאבילית ב$(0,0)$ אם

עבור $\epsilon(x,y) \xrightarrow{(x,y)\to(0,0)} 0$:

$$\epsilon(x,y)=\frac{f(x,y)-f(0,0)-\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)(x)-\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)}{\sqrt{x^2+y^2}}=\frac{f(x,y)-f(0,0)}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

נעבור לקואורדינטות פולאריות:

$$\begin{aligned}\lim_{(x,y)\to(0,0)}\epsilon(x,y)&=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{f(x,y)-f(0,0)}{\sqrt{x^2+y^2}}=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{g\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)-g(0)}{\sqrt{x^2+y^2}}\\&=\lim_{r\to0^+}\frac{g(r)-g(0)}{r}=g'(0)=0\end{aligned}$$

כלומר, $f(x,y)$ דיפרנציאבילית ב$(0,0)$.

2. הפונקציה $g(t)=\cos(t)$ זוגית וגזירה ומקיימת $g'(0)=-\sin(0)=0$, אז עפ"י החישוב שנעשה בסעיף א' מתקיים כי $\nabla f(0,0)=(0,0)$, ולכן $\frac{\partial f}{\partial \hat{n}}=0$ (לכל $\hat{n}$).

5.3 משפט הפונקציה הסתומה

תזכורת.

פונקציה בצורה סתומה היא פונקציה מהצורה:

$$F(x,y)=0$$

משפט הפונקציה הסתומה עוזר לנו למצוא פונקציה $y=f(x)$ כך ש:

$$f(x)=y \iff F(x,y)=0$$

ננסח את המשפט עבור פונקציה ב2 משתנים:
אם $F(x,y)=0$ פונקציה סתומה, אז בהנתן (x_0,y_0) כך ש $F(x_0,y_0)=0$, אם מתקיים כי:

1. בסביבה של (x_0,y_0), F_x,F_y רציפות.
2. $F_y(x_0,y_0)\neq 0$

אז קיימת פונקציה יחידה $y=f(x)$ המוגדרת בסביבה של (x_0,y_0) כך ש:

$$y=f(x) \iff F(x,y)=0$$

ומתקיים:

$$\frac{\partial y}{\partial x}=f'(x)=-\frac{F'_x(x,f(x))}{F'_y(x,f(x))}$$

ועבור פונקציה ב3 משתנים: תהא פונקציה סתומה:

$$F(x,y,z)=0$$

נחפש $z=f(x,y)$ כך ש:

$$z=f(x,y) \iff F(x,y,f(x,y))=0$$

אז בהנתן (x_0,y_0,z_0) כך ש $F(x_0,y_0,z_0)=0$, אם קיימת סביבה בה:

1. F_x,F_y,F_z רציפות.
2. $F_z(x_0,y_0,z_0)\neq 0$

אז קיימת פונקציה יחידה $z=f(x,y)$ המקיימת כי בסביבה של (x_0,y_0):

$$z=f(x,y) \iff F(x,y,f(x,y))=0$$

ומתקיים:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=-\frac{F'_x(x,y,f(x,y))}{F'_z(x,y,f(x,y))}$$
$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=-\frac{F'_y(x,y,f(x,y))}{F'_z(x,y,f(x,y))}$$

תרגיל 5.3.1.

חשבו את $\frac{\partial y}{\partial x}$ בסביבה של $x=1,y=0$ עבור:

$$x^2y^4=\sin(xy)$$

פתרון:
נשים לב כי את הפונקציה הסתומה אפשר לכתוב בצורה:

$$F(x,y)=x^2y^4-\sin(xy)=0$$

נבדוק שמתקיימים תנאי משפט הפונקציה הסתומה:

1. $$F(1,0)=0$$

2. $$F'_x=2xy^4-y\cos(xy)$$
$$F'_y=4x^2y^3-x\cos(xy)$$
רציפות.

3. $$F'_y(1,0)=0-\cos(0)=-1\neq 0$$

אז בסביבה של $(1,0)$ מתקיים:

$$\frac{\partial y}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_y}=-\frac{2xy^4-y\cos(xy)}{4x^2y^3-x\cos(xy)}$$

תרגיל 5.3.2.

תהא $\cos(x)+\sin(y)=\tan(z)$, מצאו את $\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y}$ בסביבה של הנקודה $\left(\frac{\pi}{2},0,0\right)$.

פתרון:

נשתמש במשפט הפונקציה הסתומה עבור $F(x,y,z)=\cos(x)+\sin(y)-\tan(z)$. נבדוק את תנאי המשפט.

1.
$$F\left(\frac{\pi}{2},0,0\right)=0$$

2.
$$\frac{\partial F}{\partial x}=-\sin(x),\ \frac{\partial F}{\partial y}=\cos(y),\ \frac{\partial F}{\partial z}=\frac{1}{\cos^2(z)}$$

כולן רציפות סביב $\left(\frac{\pi}{2},0,0\right)$.

3.
$$\frac{\partial F}{\partial z}\left(\frac{\pi}{2},0,0\right)=\frac{1}{\cos^2(z)}=\frac{1}{\cos^2(0)}=1\neq 0$$

אז קיימת $z=f(x,y)$ בסביבה של $\left(\frac{\pi}{2},0,0\right)$, והיא מקיימת:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=f'_x(x,y)=-\frac{F_x}{F_z}=-\frac{-\sin(x)}{\frac{1}{\cos^2(z)}}=\frac{\sin(x)}{\cos^2(z)}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=f'_y(x,y)=-\frac{F_y}{F_z}=-\frac{\cos(y)}{\frac{1}{\cos^2(z)}}=-\cos(y)\cos^2(z)$$

תרגיל 5.3.3.

(תרגיל ממבחן)

הראו שקיימת פונקציה $z=z\left(x,y\right)$ המקיימת את המשוואה $x^2+y^2+z^3+z=1$, והראו כי הפונקציה $G\left(x,y\right)=e^{x^2+y^2}+e^{z(x,y)}$ מקיימת $yG_x=xG_y$.

פתרון:

נגדיר $F(x,y,z)=x^2+y^2+z^3+z-1$. נגזור:

$$F_z=3z^2+1$$

נשים לב כי $F_z>0$, בנוסף, F_x,F_y רציפות (כפולינומים), כלומר בכל נקודה המקיימת $F(x,y,z)=0$ ניתן להפעיל את משפט הפונקציה הסתומה ולקבל:

$$\begin{aligned}
z_x &= -\frac{F_x}{F_z} = -\frac{2x}{3z^2+1} \\
z_y &= -\frac{F_y}{F_z} = -\frac{2y}{3z^2+1} \\
G_x &= e^{x^2+y^2}(2x) + e^z(z_x) \\
&= e^{x^2+y^2}(2x) + e^z\left(-\frac{2x}{3z^2+1}\right) \\
G_y &= e^{x^2+y^2}(2y) + e^z(z_y) \\
&= e^{x^2+y^2}(2y) + e^z\left(-\frac{2y}{3z^2+1}\right) \\
yG_x &= 2xye^{x^2+y^2} - e^z\frac{2xy}{3z^2+1} \\
xG_y &= 2xye^{x^2+y^2} - e^z\frac{2yx}{3z^2+1}
\end{aligned}$$

5.4 תוצאות גיאומטריות ממשפט הפונקציה הסתומה

תזכורת.

בהרצאה השתמשנו במשפט הפונקציה הסתומה וראינו את התוצאה הבאה:
תהא $F(x,y,z)$ פונקציה גזירה ברציפות בסביבית (x_0,y_0,z_0) כך שמתקיים:

1. $F(x_0,y_0,z_0)=0$.
2. $\nabla F(x_0,y_0,z_0)\neq\vec{0}$.

אז למשטח רמה 0 $F(x,y,z)=0$, קיים מישור משיק ב(x_0,y_0,z_0) כך שמשוואתו:

$$\left\langle \nabla F(x_0,y_0,z_0), \begin{pmatrix} x-x_0 \\ y-y_0 \\ z-z_0 \end{pmatrix} \right\rangle = 0$$

כלומר:

$$F'_x(x_0,y_0,z_0)(x-x_0)+F'_y(x_0,y_0,z_0)(y-y_0)+F'_z(x_0,y_0,z_0)(z-z_0)=0$$

אותה תוצאה אפשר לראות גם עבור פונקציה סתומה $G(x,y)$, כלומר:
תהא $G(x,y)$ פונקציה גזירה ברציפות בסביבה של (x_0,y_0), כך שמתקיים:

1. $G(x_0,y_0)=0$.
2. $\nabla G(x_0,y_0)\neq\vec{0}$.

אז לקו גובה 0 $G(x,y)=0$ קיים מישור משיק ב(x_0,y_0) ומשוואתו:

$$\left\langle \nabla G(x_0,y_0), \begin{pmatrix} x-x_0 \\ y-y_0 \end{pmatrix} \right\rangle = 0$$

כלומר:

$$G'_x(x_0,y_0)(x-x_0)+G'_y(x_0,y_0)(y-y_0)=0$$

רעיון.

בשני משתנים : נתונה פונקציה $F:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ ונתון מספר $k\in\mathbb{R}$. נוכל להתבונן במשוואה

$$F(x,y)=k$$

נראה להביע את y כפונקציה של x, כלומר $y=y(x)$, כך שיתקיים

$$F(x,y(x))=k$$

לצורך כך נגזור את F לפי x ונקבל מכלל השרשרת ומכך ש- $F(x,y)=k$:

$$0=\frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x}=F_x+F_y y'$$

ומכאן נובע

$$\frac{dy}{dx}=y'=-\frac{F_x}{F_y}$$

שימו לב!! הנוסחה עובדת כאשר אפשר להציג את y כפונקציה של x (בסביבה של נקודה מסוימת).
בשלושה משתנים : נניח כי $F(x,y,z)=c$, ונרצה לחפש $z=z(x,y)$. הנגזרות של z לפי x,y נתונות ע"י

$$z_x(x_0,y_0)=\left[-\frac{F_x}{F_z}\right]_{(x_0,y_0)},z_y(x_0,y_0)=\left[-\frac{F_y}{F_z}\right]_{(x_0,y_0)}$$

נראה זאת : נגזור לפי x :

$$F_x\cdot\frac{dx}{dx}+F_y\cdot\frac{dy}{dx}+F_z\cdot\frac{dz}{dx}\quad=\quad F_x\cdot 1+F_y\cdot 0+F_z\cdot z_x=0$$

כי y אינה פונקציה של x, והנגזרת של x לפי x היא 1 (כל משתנה בעל נגזרת 1 ביחס לעצמו).
אם נגזור לפי y :

$$F_x\cdot\frac{dx}{dy}+F_y\cdot\frac{dy}{dy}+F_z\cdot\frac{dz}{dy}=F_x\cdot 0+F_y\cdot 1+F_z\cdot z_y=0$$

לאחר העברת אגפים נקבל את הדרוש.
גם כאן, הנוסחאות עובדות רק כאשר אפשר להציג את z כפונקציה של (x,y).

תרגיל 5.4.1.

נתונה משוואה סתומה:

$$F(x,y,z)\quad=\quad z^2-e^{x^2+y^2}+(x+y)\sin z=0$$

1. הראו כי קיימת פונקציה $z(x,y)$ המקיימת את המשוואה בסביבה של הנקודה $(0,0,1)$, וחשבו את $z_x(0,0),z_y(0,0)$.
2. חשבו את משוואת המישור המשיק למשטח הנתון על ידי המשוואה הזו בנקודה $(0,0,1)$, ואת ישר הנורמל למישור המשיק בנקודה זו בצורה פרמטרית.

פתרון:

1. ראשית, נשים לב כי $F(0,0,1) = 1 - e^0 = 0$, שנית, נחשב את הנגזרות החלקיות של F:

$$F_x = -2xe^{x^2+y^2} + \sin z, \quad F_y = -2ye^{x^2+y^2} + \sin z, \quad F_z = 2z + (x+y)\cos z$$

ובאמת, כל הנ"ח רציפות ומתקיים $F_z(0,0,1) = 2 \neq 0$ ולכן ניתן להשתמש במשפט הפונקציה הסתומה ולקבל:

$$\begin{aligned} z_x(0,0) = \left[-\frac{F_x}{F_z}\right]_{(0,0)} &= -\frac{0+\sin 1}{2} = -\frac{1}{2}\sin 1 \\ z_y(0,0) = \left[-\frac{F_y}{F_z}\right]_{(0,0)} &= -\frac{0+\sin 1}{2} = -\frac{1}{2}\sin 1 \end{aligned}$$

2. עפ"י הסעיף הקודם, הווקטור הנורמלי למישור המשיק בנקודה הנ"ל נתון על ידי

$$\begin{aligned} \vec{N} = \left(F_x, F_y, F_z\right) &= \left(-2xe^{x^2+y^2} + \sin z, -2ye^{x^2+y^2} + \sin z, 2z + (x+y)\cos z\right) \\ &= (0+\sin 1, 0+\sin 1, 2+0) = (\sin 1, \sin 1, 2) \end{aligned}$$

ולכן המישור המשיק נתון על ידי המשוואה:

$$\vec{N} \cdot (x-0, y-0, z-1) = 0$$

כלומר:

$$(\sin 1)\, x + (\sin 1)\, y + 2z = 0$$

ישר הנורמל נתון על ידי לקיחת הנקודה $p = (0,0,1)$ והוספת כפולה של הווקטור $\vec{N}$:

$$\begin{aligned} p + t\vec{N} &= (0,0,1) + (t\sin 1, t\sin 1, 2t) \\ &= (t\sin 1, t\sin 1, 2t+1) \end{aligned}$$

תרגול שישי

6.1 נגזרת מסדר גבוה

תזכורת.

תהא $f(x,y)$ פונקציה סקלרית ב2 משתנים, נוכל להתבונן בנגזרות החלקיות השניות של f:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) &:= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f''_{xx}\\ \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) &:= \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = f''_{yy}\\ \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) &:= \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = f''_{yx}\\ \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) &:= \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = f''_{xy}\end{aligned}$$

וכן האלה עבור נגזרות חלקיות מסדר שלישי, רביעי וכו'.
ראינו גם את משפט אוילר-שוורץ-קלרו שאומר שאם f''_{xy}, f''_{yx} קיימות ורציפות בסביבה של (x_0,y_0) אז הן שוות:

$$f''_{xy}(x_0,y_0) = f''_{yx}(x_0,y_0)$$

תרגיל 6.1.1.

תהא $f(x,y) = x^2y^{13}$, חשבו את f_x, f_y, f_{xy}, f_{yx}.

פתרון:
נחשב ישירות:

$$\begin{aligned}f_x(x,y) = 2xy^{13}, &\qquad f_y(x,y) = x^2 \cdot 13y^{12}\\ f_{xy}(x,y) = \left(2xy^{13}\right)_y = 26xy^{12}, &\qquad f_{yx} = 26xy^{12}\end{aligned}$$

תרגיל 6.1.2.

תהא $f(x,y) = \begin{cases}\frac{xy^3-yx^3}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$ חשבו את $f_x(x,y), f_y(x,y)$ עבור (x,y) כלליים, וחשבו את $f_{xy}(0,0), f_{yx}(0,0)$.

פתרון:
נתחיל מ $f_x(x,y)$, ונפצל למקרים.

- אם $(x,y)\neq(0,0)$ נקבל:

$$f_x(x,y)=\frac{\left(y^3-3yx^2\right)\left(x^2+y^2\right)-2x\left(xy^3-yx^3\right)}{\left(x^2+y^2\right)^2}=\frac{y^5-4x^2y^3-x^4y}{\left(x^2+y^2\right)^2}$$

$$f_y(x,y)=\frac{\left(3xy^2-x^3\right)\left(x^2+y^2\right)-2y\left(xy^3-yx^3\right)}{\left(x^2+y^2\right)^2}=\frac{-x^5+4x^3y^2+xy^4}{\left(x^2+y^2\right)^2}$$

- עבור $(x,y)=(0,0)$ נחשב עפ"י הגדרה,

$$f_x(0,0)=\lim_{h\to0}\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{0}{h}=0$$

$$f_y(0,0)=\lim_{h\to0}\frac{f(0,h)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{0}{h}=0$$

- נחשב את $f_{xy}(0,0)$ עפ"י הגדרה:

$$f_{xy}(0,0)=\left(f_x(x,y)\right)_y|_{(x,y)=(0,0)}=\lim_{h\to0}\frac{f_x(h,0)-f_x(0,0)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{f_x(0,h)-f_x(0,0)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{\frac{h^5}{h^4}}{h}=1$$

- נחשב את $f_{yx}(0,0)$ עפ"י הגדרה:

$$f_{yx}(0,0)=\lim_{h\to0}\frac{f_y(h,0)-f_y(0,0)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{\frac{-h^5}{h}}{h}=-1$$

תרגיל 6.1.3.

1. תהא $g:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$, אשר נסמן $g(x,y)=\begin{pmatrix}P(x,y)\\Q(x,y)\end{pmatrix}$ הוכיחו כי אם קיימת $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ גזירה פעמיים ברציפות כך ש $g(x,y)=\nabla f(x,y)$, כלומר:

$$g(x,y)=\nabla f(x,y)=\begin{pmatrix}\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\\\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}P(x,y)\\Q(x,y)\end{pmatrix}$$

אז $P_y=Q_x$.

2. האם קיימת פונקציה $f(x,y)$ כך ש $\nabla f(x,y)=\begin{pmatrix}-y\\x\end{pmatrix}$?

פתרון:

1. היות ו f גזירה ברציפות מתקיים:

$$P_y = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial yx} = \frac{\partial^2 f}{\partial xy} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = Q_x$$

2. ראינו כי $P_y = Q_x$ תנאי הכרחי לקיום f כזאת, נבדוק:

$$P_y = -1, \qquad Q_x = 1$$

וכמובן $-1 \neq 1$.

תרגיל 6.1.4.

יהיו $a, b \in \mathbb{R}$, ותהא $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ פונקציה גזירה פעמיים ברציפות, נתון שלכל $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ מתקיים:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 3x + ay^2$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = bxy + 2y$$

וכי $\frac{\partial f}{\partial y}(1, 1) = 3$ מצאו את a, b.

פתרון:
ראשית, נגזור:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)(x, y) = by,$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)(x, y) = 2ay.$$

היות ו f גזירה פעמיים ברציפות, מתקיים כל לכל $(x, y) \in \mathbb{R}^2$:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y).$$

בפרט מתקיים:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(1, 1) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(1, 1),$$

ולכן $b = 2a$.
בנוסף, $\frac{\partial f}{\partial y}(1, 1) = 3$, ולכן $b + 2 = 3$, ולכן $b = 1$ ו $a = \frac{1}{2}b = \frac{1}{2}$.

6.2 נקודות קיצון לפונקציה ב2 משתנים

תזכורת.

תהי $f(x,y)$ פונקציה המוגדרת בתחום D. נאמר כי הנקודה (x_0,y_0) היא:

- **מינימום מקומי** של f, אם קיימת סביבה של הנקודה (x_0,y_0), עבורה מתקיים $f\left(x_0,y_0\right)\leq f(x,y)$.
- **מקסימום מקומי** של f, אם קיימת סביבה של הנקודה (x_0,y_0), עבורה מתקיים $f\left(x_0,y_0\right)\geq f(x,y)$.

ע"פ משפט Fermat, אם f_x,f_y קיימות בנקודת קיצון (x_0,y_0), אזי הן חייבות להתאפס שם, כלומר $\nabla f(x_0,y_0)=0$, נגדיר נקודה קריטית (או נקודה חשודה לקיצון) להיות נקודה פנימית של התחום D בה $\nabla f=0$, או שלפחות אחת מהנגזרות החלקיות f_x,f_y אינן קיימות בה.
נקרא ל (x_0,y_0) **נקודת אוכף** של f, אם $\nabla f(x_0,y_0)=0$ ובכל סביבה של הנקודה (x_0,y_0), קיימות (x,y) עבורן $f\left(x_0,y_0\right)\leq f(x,y)$, וקיימות (x,y) עבורן $f\left(x_0,y_0\right)\geq f(x,y)$.

תרגיל 6.2.1.

מצאו את החשודות לקיצון של הפונקציה $f\left(x,y\right)=x\sqrt{y-1}-2x$ בתחום הגדרתה.

פתרון:
נחשב את הנגזרות החלקיות

$$\begin{aligned} f_x &= \sqrt{y-1}-2 \\ f_y &= \frac{x}{2\sqrt{y-1}} \end{aligned}$$

זאת אומרת שכאשר $y=1$ הנגזרת החלקית לפי y אינה מוגדרת (למרות שזה אכן בתחום ההגדרה של f).
בנוסף, נבדוק התאפסות:

$$\begin{aligned} f_x = \sqrt{y-1}-2 &= 0 \\ f_y = \frac{x}{2\sqrt{y-1}} &= 0 \end{aligned}$$

מהמשוואה השנייה נקבל $x=0$ ומהראשונה נקבל $\sqrt{y-1}=2 \Leftarrow y-1=4 \Leftarrow y=5$. סך הכול קיבלנו שהחשודות לקיצון הן כל הנקודות מהצורה $(x,1)$ והנקודה הבודדת $(0,5)$.

תרגיל 6.2.2.

מצאו קיצון מוחלט לפונקציה:

$$f(x,y)=x^2-2xy+2y^2-4y$$

פתרון:

ראשית, נמצא את החשודות לקיצון. נגזור את הפונקציה ונקבל:

$$\begin{aligned} f_x =& 2x-2y \\ f_y =& -2x+4y-4 \end{aligned}$$

הנגזרות החלקיות מוגדרות בכל המישר, אז נבדוק מתי הן מתאפסות:

$$\begin{aligned} 2x-2y =& 0 \\ -2x+4y-4 =& 0 \end{aligned}$$

מהמשוואה הראשונה לקבל ש-$x=y$, אז נציב במשוואה השנייה ונקבל

$$\begin{aligned} -2x+4x-4 =& 0 \\ 2x =& 4 \\ x =& 2 \end{aligned}$$

ולכן הנקודה הקריטית היחידה היא $(2,2)$.
שימו לב - זה לא אומר כלום עדיין! אנחנו נוכיח ידנית שזוהי אכן נקודת קיצון (מוחלטת) של הפונקציה. כלומר, ננסה להוכיח שבה מתקבל הערך הקטן ביותר של הפונקציה, באמצעות השלמה לריבוע. נשים לב כי

$$\begin{aligned} f(x,y) =& x^2-2xy+2y^2-4y \\ =& x^2-2xy+y^2+y^2-4y+4-4 \\ =& (x-y)^2+(y-2)^2-4 \geq -4 \end{aligned}$$

ועבור $x=y=2$ נקבל את הערך $f(2,2)=(2-2)^2+(2-2)^2-4=-4$. הוכחנו שלכל נקודה, ערך הפונקציה גדול או שווה ל--4, אך בנקודה $(2,2)$ מתקבל הערך -4. כעת נותר להראות שלכל נקודה אחרת מתקבל ערך גדול מ--4. נשים לב ששוויון מתקיים אמ"ם שני הריבועים במשוואה מתאפסים, כלומר

$$\begin{aligned} x =& y \\ y =& 2 \end{aligned}$$

ואז $x=y=2$. כלומר הנקודה היחידה שבה מתקבל הערך המינימלי היא $(2,2)$ ולכן זהו מינימום מוחלט.

תרגיל 6.2.3.

בהנתן פונקציה $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ גזירה בכל הישר, נגדיר את הסיבוב שלה סביב ציר ה-z להיות פונקציה $g(x,y)=f\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)$. הראו שאם $f'(a)=0$ עבור $a\in\mathbb{R}$, אז כל נקודה (x,y) המקיימת $x^2+y^2=a^2$ היא נקודה קריטית של g.

פתרון:
נגזור באמצעות כלל השרשרת ונבדוק

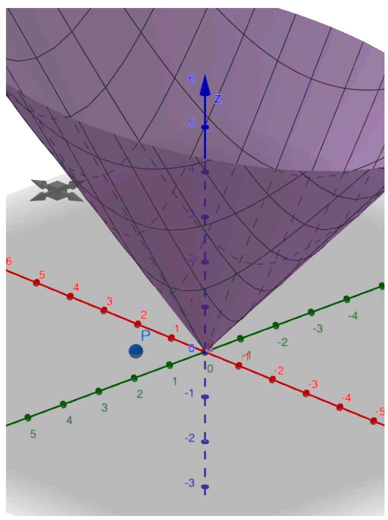
$$\nabla g=\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}f'\left(\sqrt{x^2+y^2}\right),\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}f'\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)\right)$$

כעת, אם $a\neq 0$ אז אכן מתקיים $\nabla g\left(x,y\right)=\left(\frac{x}{a}f'\left(a\right),\frac{y}{a}f'\left(a\right)\right)=\left(0,0\right)$, ואם $a=0$ אז ∇g אינה מוגדרת. בשני המקרים קיבלנו שמדובר בנקודה קריטית של g.

תרגיל 6.2.4.

מהי הנקודה הקרובה ביותר בין $z=\sqrt{x^2+3y^2}$ לבין $P=\left(1,1,0\right)$.

פתרון:
ראשית, נשרטט את הבעיה לראות במה מדובר:



המרחק בין נקודה בגרף ו־P הוא:

$$D(x,y)=d\left(P,\begin{pmatrix}x\\y\\\sqrt{x^2+3y^2}\end{pmatrix}\right)=\sqrt{(1-x)^2+(1-y)^2+(\sqrt{x^2+3y^2})^2}$$

נשים לב כי מינימום של D יהיה גם מינימום של $K=D^2$, ויהיה יותר נוח לעבוד בלי שורש, אז:

$$K(x,y):=D(x,y)^2=(1-x)^2+(1-y)^2+x^2+3y^2=1-2x+x^2+1-2y+y^2+x^2+3y^2$$
$$=2-2x-2y+2x^2+4y^2$$

נגזור:

$$\nabla K(x,y) = \begin{pmatrix} 2-4x \\ 2-8y \end{pmatrix} = 0 \iff \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

מחקירת הבעיה, אנו מיד יודעים כי מדובר בנקודת מינימום, אז:

$$z = \sqrt{x^2+3y^2} = \sqrt{\frac{1}{4}+\frac{3}{16}} = \frac{\sqrt{7}}{4}$$

ולכן הנקודה הינה:

$$\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{\sqrt{7}}{4}\right)$$

6.3 נקודות קיצון לפונקציה ב3 משתנים, ומיון נקודות קיצון בעזרת מטריצת הסיאן

תזכורת.

נניח כי $f: D \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ פונקציה סקלרית, בעלת נ"ח רציפות מסדר שני ונניח כי $\nabla f(x_0, y_0, z_0) = 0$, כלומר $P = (x_0, y_0, z_0)$ נקודה חשודה לקיצון, נסמן:

$$H_f(P) = \begin{pmatrix} f_{xx}(P) & f_{xy}(P) & f_{xz}(P) \\ f_{yx}(P) & f_{yy}(P) & f_{yz}(P) \\ f_{zx}(P) & f_{zy}(P) & f_{zz}(P) \end{pmatrix}$$

נשים לב כי H_f סימטרית, ולכן קיימים לה 3 ע"ע.

1. אם קיים ע"ע אפס, אז לא ניתן לדעת, ויש להפעיל מבחן אחר.
2. אם כל הע"ע חיוביים אז P מינימום מקומי.
3. אם כל הע"ע שליליים אז P מקסימום מקומי.
4. אם קיים ע"ע חיובי, ע"ע שלילי, וגם כל הע"ע אינם אפס, P נקודות אוכף.

הערה.

אפשר גם להשתמש במשפט סילבסטר, ואז לקבל את הגרסא הבאה של המשפט:

1. כל המינורים הראשיים חיוביים, אז P נקודות מינימום מקומית.
2. אם כל המינורים הראשיים מחליפים סימן, ו $f_{xx}(P) < 0$ אז (P) נקודות מקסימום מקומית.
3. אם $\det(H_f(P)) \neq 0$, והמינורים הראשיים לא מקיימים את התנאים הקודמים אז P נקודת אוכף.
4. בכל מקרה אחר, לא ניתן לדעת בשיטה זו.

תרגיל 6.3.1.

מצאו וסווגו את נקודות הקיצון של:

$$f(x, y, z) = x^2 + 2xy - y^2 - z^3 + x + y + 3z + 4$$

פתרון:

ראשית נמצא נקודות חשודות לקיצון:

$$\nabla f(x, y, z) = \begin{pmatrix} 2x + 2y + 1 \\ 2x - 2y + 1 \\ -3z^2 + 3 \end{pmatrix} = 0$$

נשים לב כי:

$$\begin{cases} 2x + 2y + 1 = 0 \\ 2x - 2y + 1 = 0 \end{cases} \implies x = -\frac{1}{2} \implies y = 0$$

אז יש לנו 2 נקודות חשודות לקיצון:

$$P_1 = \left(-\frac{1}{2}, 0, 1\right), \qquad P_2 = \left(-\frac{1}{2}, 0, -1\right)$$

נחשב את ההסיאן:

$$H_f(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -6z \end{pmatrix}$$

מהם הע"ע (כתלות ב (x,y,z))? נחשב:

$$\det\left(H_f(x,y,z) - \lambda I\right) = \det\begin{pmatrix} 2-\lambda & 2 & 0 \\ 2 & -2-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -6z-\lambda \end{pmatrix} = (-6z-\lambda)\det\begin{pmatrix} 2-\lambda & 2 \\ 2 & -2-\lambda \end{pmatrix}$$
$$= -(6z+\lambda)\left((2-\lambda)(-2-\lambda) - 4\right) = -(6z+\lambda)\left(\lambda^2 - 8\right)$$

אז הע"ע הם:

$$\lambda_1 = -6z, \qquad \lambda_2 = \sqrt{8}, \qquad \lambda_3 = -\sqrt{8}$$

כלומר, גם P_1 וגם P_2 נקודות אוכף.

6.4 תרגול נוסף

תרגיל 6.4.1.

1. תהא $f(x,y) = \frac{xy^2 - x^2 + y}{y^2}$, מצאו לכל $y > 0$ ערך של x עבורו $g(x) = f(x,y)$ נקודת מקסימום מקומית.
2. בדקו האם הגבול $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ קיים.
3. אם נגדיר $g_n(x) = f\left(x, \frac{1}{n}\right)$, האם $g_n(x)$ מתכנסת במ"ש ב$(0,1)$?

פתרון:

1. נקבע $y_0 > 0$ ונגדיר $g(x) = f(x, y_0)$, נגזור לפי x:

$$g'(x) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y_0) = \frac{y_0^2 - 2x}{y_0^2}$$

כלומר, לכל $y_0 > 0$, הנקודה:

$$\frac{y_0^2 - 2x}{y_0^2} = 0 \implies y_0^2 - 2x = 0 \implies x = \frac{y_0^2}{2}$$

היא נקודת מקסימום מקומית כי $g''(x) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y_0) = -\frac{2}{y_0^2} < 0$, נחשב את ערך הפונקציה בנקודה זאת:

$$g\left(\frac{y_0^2}{2}\right) = f\left(\frac{y_0^2}{2}, y_0\right) = \frac{\left(\frac{y_0^2}{2}\right) y_0^2 - \left(\frac{y_0^2}{2}\right)^2 + y_0}{y_0^2} = \frac{\frac{y_0^4}{2} - \frac{y_0^4}{4} + y_0}{y_0^2} = \frac{y_0^4 + 4y_0}{4y_0^2} = \frac{1}{4}y_0^2 + \frac{1}{y_0}$$

2. מהעבודה שעישנו קל להראות כי הגבול לא קיים, אם נגדיר את המסילה $\gamma(t) = \left(\frac{t^2}{2}, t\right)$, אז $\gamma(0) = (0,0)$, אז:

$$\lim_{t\to 0} f(\gamma(t)) = \lim_{t\to 0} \frac{1}{4}t^2 + \frac{1}{t}$$

והגבול לא קיים.

3. שוב פעם, אנו יודעים כי:

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in(0,1)} g_n(x) = \lim_{n\to\infty} \sup_{x\in(0,1)} f\left(x, \frac{1}{n}\right) \overset{\star}{=} \lim_{n\to\infty} \frac{1}{4n^2} + n = \infty$$

כאשר $\overset{\star}{=}$ משום שהנקודה $\left(\frac{y_n^2}{2}, y_n\right)$ היא נקודת מקסימום מוחלט של g_n (בדקו זאת!) ו-$\frac{y_n^2}{2} \in (0,1)$.
כלומר סדרת הפונקציות אינה מתכנסת במ"ש ב-$(0,1)$.

תרגיל 6.4.2.

תהא $f(x,y,z)$ גזירה, עבור $g(u,v,w) = f(u-v, v-w, w-u)$ הראו כי $\frac{\partial g}{\partial u} + \frac{\partial g}{\partial v} + \frac{\partial g}{\partial w} = 0$.

פתרון:

עבור $\begin{cases} x = u - v \\ y = v - w \\ z = w - u \end{cases}$, אז:

$$\frac{\partial g}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial z}$$

$$\frac{\partial g}{\partial v} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial v} = -\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}$$

$$\frac{\partial g}{\partial w} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial w} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial w} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial w} = -\frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z}$$

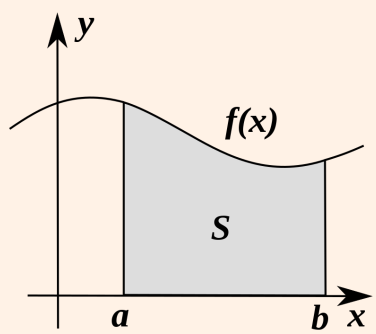
והשוויון מתקבל.

תרגול שביעי - אינטגרל כפול

7.1 אינטגרל כפול במלבן ומשפט פוביני

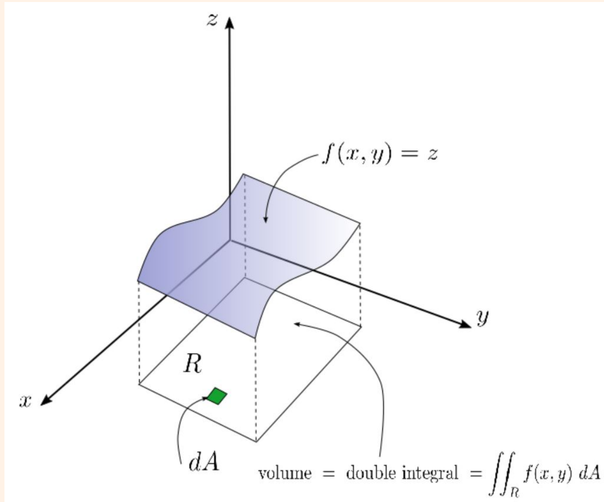
רעיון.

כמו שאינטגרל רגיל עונה על השאלה הבאה, בהנתן $f:[a,b]\to\mathbb{R}^+$, אינטגרבילית, $\int_a^b f(x)\,dx$ הוא השטח הכלוא תחת גרף הפונקציה, מעל ציר הx, בין $x=a$ לבין $x=b$:



אותה שאלה נוכל לשאול על נפח שכלוא תחת גרף של פונקציה $f:D\subset\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^+$, כלומר, אם $D=[a,b]\times[c,d]=\{(x,y)|a\leq x\leq b \text{ וגם } c\leq y\leq d\}\subset\mathbb{R}^2$ מלבן, נחשב את הנפח הזה בעזרת אינטגרל כפול:

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy$$



הערה.

ההגדרה הפורמלית של אינטגרל כפול היא בעזרת התכנסות של סכומי רימן, החומר הזה לא יועבר במלואו בתרגול, אבל פונקציה $f(x,y)$ נקראת <u>אינטגרבילית</u> אם הסכומים האלה מתכנסים, כמה משפטים שימושיים:

1. אם $f(x,y)$ רציפה בD אז היא אינטגרבילית בD.
2. אם $f(x,y),g(x,y)$ אינטגרבילית בD, אז עבור $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$, $h(x,y)=\alpha f(x,y)+\beta g(x,y)$, אינטגרבילית ומתקיים:

$$\iint_D \alpha f(x,y)+\beta g(x,y)\,dx\,dy=\alpha\iint_D f(x,y)\,dx\,dy+\beta\iint_D g(x,y)\,dx\,dy$$

3. אם D,D' תחומים זרים - כלומר $D\cap D'=\emptyset$ (או אולי נחתכים במספר סופי של ישרים או נקודות) ו $f(x,y)$ אינטגרבילית ב D,D' אז היא אינטגרבילית ב $D\cup D'$ ומתקיים:

$$\iint_{D\cup D'} f(x,y)\,dx\,dy=\iint_D f(x,y)\,dx\,dy+\iint_{D'} f(x,y)\,dx\,dy$$

איך מחשבים אינטגרל כפול?

תזכורת.

תהא $f(x,y)$ אינטגרבילית במלבן $D=[a,b]\times[c,d]$, אם לכל $x\in[a,b]$ מוגדר:

$$F(x)=\int_c^d f(x,y)\,dy$$

אז מתקיים:

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b F(x)\,dx = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)\,dy\right)\,dx$$

או באופן דומה, אם $G(y) = \int_a^b f(x,y)\,dx$, אז:

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \int_c^d G(y)\,dy = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)\,dx\right)\,dy$$

זה נקרא משפט פוביני הניסוח המלא הוא:

תזכורת.

(משפט פוביני) אם $f(x,y)$ רציפה במלבן $D=[a,b]\times[c,d]$ אז:

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)\,dy\right)\,dx = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)\,dx\right)\,dy$$

תרגיל 7.1.1.

חשבו את $\iint_D 3x^3y + xy^5\,dx\,dy$ עבור $D=[0,1]\times[0,\sqrt{2}]$.

פתרון:

$f(x,y)$ רציפה, ולכן עפ"י פוביני מתקיים:

$$\iint_D 3x^3y + xy^5\,dx\,dy = \int_0^1 \left(\int_3^4 3x^3y + xy^5\,dy\right)\,dx$$

נתחיל בחישוב האינטגרל הפנימי:

$$\int_3^4 3x^3y + xy^5\,dy = 3x^3\left(\frac{y^2}{2}\right) + x\left(\frac{y^6}{6}\right)\Bigg|_{y=0}^{y=\sqrt{2}} = 3x^3 + \frac{4x}{3}$$

אז:

$$\iint_D 3x^3y + xy^5\,dx\,dy = \int_0^1 \left(\int_3^4 3x^3y + xy^5\,dy\right)\,dx = \int_0^1 \left(3x^3 + \frac{4x}{3}\right)\,dx$$

$$= 3\cdot\frac{x^4}{4} + \frac{4}{3}\cdot\frac{x^2}{2}\Bigg|_{x=0}^{x=1} = \frac{3}{4} + \frac{2}{3} = \frac{17}{12}$$

תרגיל 7.1.2.

תהא $f(x,y)$ פונקציה רציפה כך ש $f(x,y)=A(x)B(y)$, הוכיו כי:

$$\iint_{[a,b]\times[c,d]} f(x,y)\,dx\,dy = \left(\int_a^b A(x)\,dx\right)\cdot\left(\int_c^d B(y)\,dy\right)$$

פתרון:

נשים לב כי בעזרת פוביני:

$$\begin{aligned}\iint_{[a,b]\times[c,d]} f(x,y)\,dx\,dy &= \int_a^b\left(\int_c^d f(x,y)\,dy\right)\,dx = \int_a^b\left(\int_c^d A(x)B(y)\,dy\right)\,dx\\ &=_\star \int_a^b A(x)\left(\int_c^d B(y)\,dy\right)\,dx = \left(\int_c^d B(y)\,dy\right)\cdot\left(\int_a^b A(x)\,dx\right)\end{aligned}$$

כאשר ב $=_\star$ יש שימוש בכך ש$A(x)$ לא תלוי במשתנה y, ובלינאריות האינטגרל.

7.2 אינטגרציה בתחום פשוט

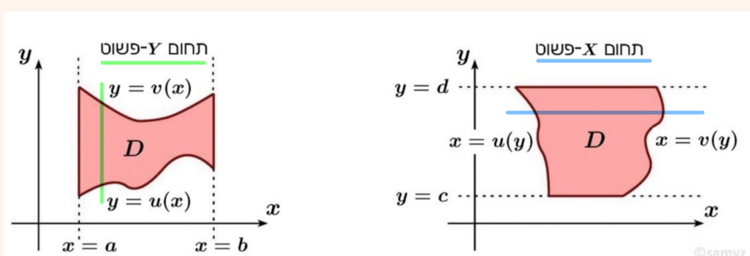
תזכורת.

(תחום פשוט) תחום חסום וסגור $D\subset\mathbb{R}^2$ נקרא <u>פשוט ביחס לציר y</u> אם הוא מהצורה:

$$D=\{(x,y)|a\le x\le b, v(x)\le y\le u(x)\}$$

עבור פונקציות $v,u:[a,b]\to\mathbb{R}$ רציפות.
ובאופן דומה D נקרא <u>פשוט ביחס לציר x</u> אם קיימות $p,q:[c,d]\to\mathbb{R}$ כך ש:

$$D=\{(x,y)|c\le y\le d, p(y)\le x\le q(y)\}$$



תזכורת.

תהא $f(x,y)$ אינטגרבילית בתחום D, אם $D=\{(x,y)|a\le x\le b, v(x)\le y\le u(x)\}$ תחום פשוט ביחס לציר y, אז:

$$\iint_D f(x,y)=\int_a^b\left(\int_{v(x)}^{u(x)} f(x,y)\,dy\right)\,dx$$

ואם $D=\{(x,y)|c\le y\le d, p(y)\le x\le q(y)\}$ תחום פשוט ביחס לציר x, אז:

$$\iint_D f(x,y)=\int_c^d\left(\int_{p(x)}^{q(x)} f(x,y)\,dx\right)\,dy$$

תרגיל 7.2.1.

חשבו את שטח עיגול היחידה בעזרת אינטגרל כפול.

פתרון:

נשים לב כי שטח עיגול היחידה הוא $\iint_D f(x,y)\,dx\,dy$ עבור $f(x,y)=1$ ו D עיגול היחידה, ראשית נשים לב כי:

$$\begin{aligned}D&=\{(x,y)|x^2+y^2\le 1\}=\{(x,y)|y^2\le 1-x^2\}\\&=\left\{(x,y)|-\sqrt{1-x^2}\le y\le\sqrt{1-x^2}, -1\le x\le 1\right\}\end{aligned}$$

אז:

$$\iint_D f(x,y)=\int_{-1}^1\left(\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} dy\right)\,dx=2\int_{-1}^1\sqrt{1-x^2}\,dx$$

נבצע החלפת משתנים $x=\sin(u), \frac{dx}{du}=\cos(u)\implies dx=\cos(u)\,du$, וגם $-1\le x\le 1\implies -\frac{\pi}{2}<u\le\frac{\pi}{2}$, אז:

$$\begin{aligned}2\int_{-1}^1\sqrt{1-x^2}\,dx&=2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-\sin^2(u)}\cos(u)\,du=2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}|\cos(u)|\cos(u)\,du\\&=_\star 2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2(u)\,du=2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1}{2}+\frac{\cos(2u)}{2}\right)\,du\\&=2\left[\frac{u}{2}+\frac{1}{4}\sin(2u)\right]\Bigg|_{u=-\frac{\pi}{2}}^{u=\frac{\pi}{2}}=\pi\end{aligned}$$

כאשר $=_\star$ כי $\cos(u)$ חיובית בתחום.

כלומר, השטח של עיגול היחידה הוא π.

7.2.1 החלפת סדר אינטגרציה

תרגיל 7.2.2.

עבור האינטגרלים הבאים, זהו כי תחום האינטגרציה הוא פשוט גם ביחס לציר x וגם ביחס לציר הy והשתמשו בכך כדאי להחליף את סדר האינטגרציה.

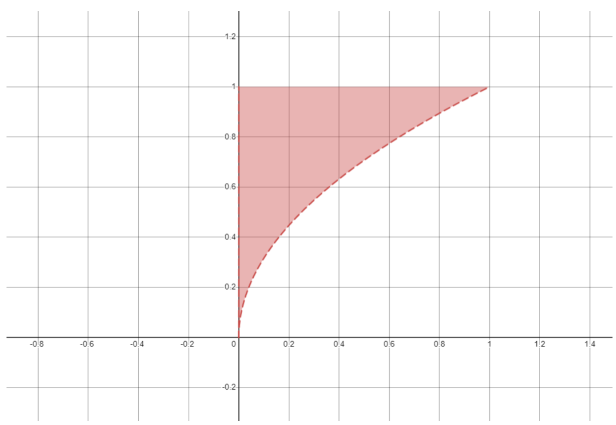
1. $\int_0^1 \int_0^{y^2} f(x,y)\,dx\,dy$.
2. $\int_0^1 \int_{-y}^{y} f(x,y)\,dx\,dy$.
3. $\int_0^4 \int_{\sqrt{x}}^{2} f(x,y)\,dy\,dx$.

פתרון:

1. התחום הוא:

$$\{(x,y)|0 \leq y \leq 1, 0 \leq x \leq y^2\}$$

נשרטט אותו:

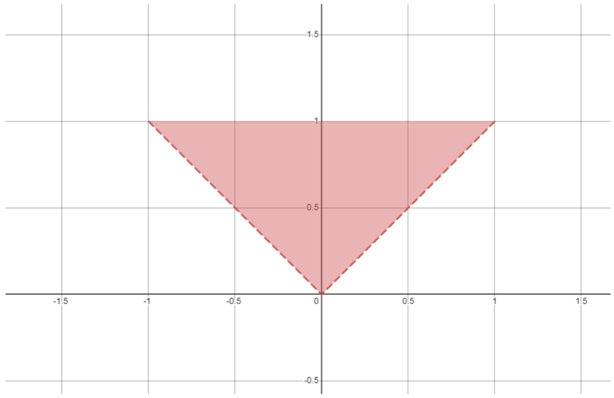


ונשים לב כי $0 \leq x \leq 1$ ולכן x מתקיים $\sqrt{x} \leq y \leq 1$, כלומר:

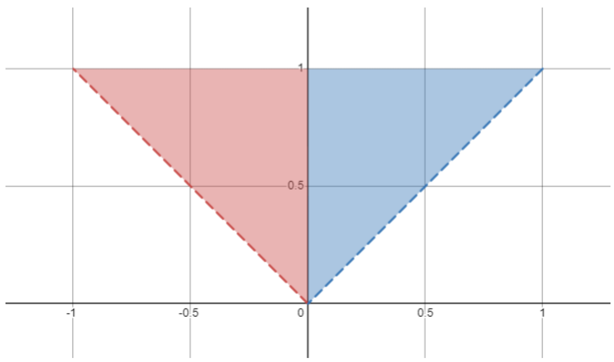
$$\int_0^1 \int_0^{y^2} f(x,y)\,dx\,dy = \int_0^1 \left(\int_{\sqrt{x}}^1 f(x,y)\,dy \right) dx$$

2. נשרטט את התחום:

$$\{(x,y)|0 \leq y \leq 1, -y \leq x \leq y\}$$



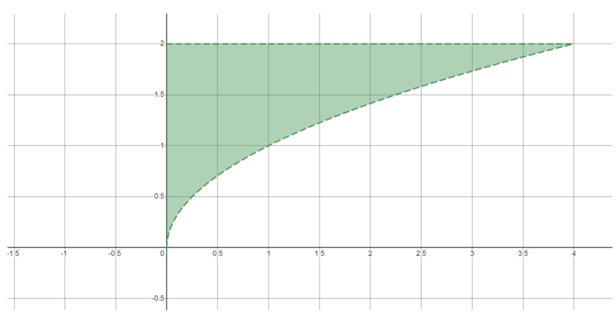
כלומר, $-1 \le x \le 1$, נחלק את התחום ל2 תחומים שונים, עבור $-1 \le x \le 0$ ועבור $0 < x \le 1$:



ונקבל כי עבור $-1 \le x \le 0$ מתקיים $-x < y < 1$ ועבור $0 < x \le 1$ מתקיים $x \le y \le 1$, כלומר:

$$\int_0^1 \int_{-y}^{y} f(x,y)\,dx\,dy = \int_{-1}^{0}\left(\int_{-x}^{1} f(x,y)\,dy\right)\,dx + \int_0^1\left(\int_x^1 f(x,y)\,dy\right)\,dx$$

3. נשרטט את התחום:



נשים לב כי $0 \le y \le 2$, **ולכל** y **קבוע,** $0 \le x \le y^2$, **אז:**

$$\int_0^4 \int_{\sqrt{x}}^2 f(x,y)\,dy\,dx = \int_0^2 \int_0^{y^2} f(x,y)\,dx\,dy$$

7.3 החלפת משתנים באינטגרל כפול

רעיון.

החלפת משתנים מאפשרת לנו לפשט את התחום בו מבצעים אינטגרציה ו/או מפשטת את הפונקציה עליה מבצעים אינטגרציה.

תזכורת.

(החלפת משתנים) נניח ש-$f(x,y)$ רציפה בתחום D (שנתון בקואורדינטות x,y) ונניח שנתונה טרנספורמציה חח"ע המעתיקה תחום Δ (שנתון בקואורדינטות u,v) לתחום D, ע"י $x=x(u,v)$, $y=y(u,v)$ ב-Δ כאשר הפונקציות הן רציפות ובעלות נגזרות חלקיות רציפות. (כלומר, $\varphi:\Delta\to D$ מוגדרת על ידי $\varphi(u,v)=(x,y)$ הנ"ל)

נגדיר:

$$J=\det\begin{pmatrix}\frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v}\\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v}\end{pmatrix}$$

היעקוביאן של ההעתקה φ. אזי, אם בכל Δ, $J\neq 0$, אז מתקיים:

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy=\iint_\Delta f(x(u,v),y(u,v))|J|\,du\,dv$$

נוכל להגדיר גם את ההעתקה ההפוכה ל-φ: $\varphi^{-1}(x,y)=(u,v)$, כלומר $u=u(x,y)$, $v=v(x,y)$ **המתאימה לכל נקודה** $(x,y)\in D$ **נקודה אחת ויחידה** $(u,v)\in\Delta$**.** היעקוביאן של ההעתקה ההפוכה נתון על ידי

$$J^*=\det\begin{pmatrix}\frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y}\\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y}\end{pmatrix}$$

אפשר להוכיח ש– $J^*=J^{-1}$, כלומר $JJ^*=1$.

$$\iint_\Delta g(u,v)\,du\,dv=\iint_D g(u(x,y),v(x,y))|J^*|\,dx\,dy$$

הערה.

- מומלץ לחשוב על התחום D בתור התמונה ועל Δ בתור המקור, ולא בתור תחומים ישן / חדש. מה שהמשפט אומר זה שאפשר לחשב אינטגרל של פונקציה המוגדרת על התמונה במונחים של המקור.
- **היעקוביאן** מתאר את היחס בין אלמנט השטח במישור xy, לאלמנט השטח במישור uv, כלומר הוא מייצג את רמת עיוות השטח , (זהו האנלוג להחלפת dx ב-dt למשל כאשר מבצעים החלפת משתנים באינטגרל של משתנה יחיד).

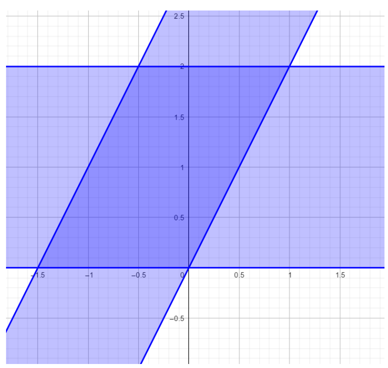
- מסקנה מהמשפט היא שנבטא את x,y במונחי u,v או להיפך לפי מה שיותר נוח ונוכל לחשב את היעקוביאן המתאים.
- ניתן לבצע החלפת משתנים גם אם $J=0$, או φ לא חח"ע בקבוצה בעלת שטח אפס בלבד, כלומר מספר סופי של עקומים או נקודות (בכל הדוגמאות בקורס שלנו φ תהיה כזאת.)

תרגיל 7.3.1.

חשבו את שטח המקבילית החסומה ע"י הישרים:

$$\begin{cases} y=2x \\ y=2x+3 \\ y=0 \\ y=2 \end{cases}$$

פתרון:



נסמן את המקבילית על ידי D. שימו לב ש–D במישור xy! ועלינו לחשב את האינטגרל

$$\iint_D 1\,dx\,dy$$

כלומר כאן הפונקציה f היא קבועה $f(x,y)=1$.
נחפש כעת תחום במישור uv שיהיה המקור לתמונה D ויהיה נוח לחישוב אינטגרלים. כלומר תחום Δ וההעתקה שתעביר אותו ל-D.
התחום בו הכי קל לנו לחשב אינטגרל כפול הינו מלבן, לכן ננסה להחליף את המשתנים בצורה כזו שהמקור שנקבל יהיה מלבני. אידיאלית נרצה לתאר את התחום כחסום בין קוי גובה של פונקציות.

$$\begin{cases} u=y-2x \\ v=y \end{cases}$$

שימו לב: קיבלנו למעשה את ההעתקה ההפוכה, כלומר זו שמעבירה את (x,y) ל- (u,v).
איך יודעים אם ההעתקה היא הפוכה או לא? שואלים האם ההעתקה שקיבלנו היא מ-D ל-Δ (ואז הפוכה) או להיפך.
נחשב גבולות אינטגרציה :

$$\begin{array}{rcl} D & & \triangle \\ y=2x & \longrightarrow & u=0 \\ y=2x+3 & \longrightarrow & u=3 \\ y=0 & \longrightarrow & v=0 \\ y=2 & \longrightarrow & v=2 \end{array}$$

נחשב את היעקוביאן של ההעתקה $(u,v)\to(x,y)$. **אפשר לעשות זאת בשתי דרכים.**
אחת, נהפוך את ההעתקה: נציג את x,y כפונקציות של המשתנים החדשים u,v :

$$\begin{cases} x=\frac{1}{2}(v-u) \\ y=v \end{cases}$$

נחשב :

$$J=\begin{vmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 \end{vmatrix}=-\frac{1}{2}\neq 0, \forall(u,v)\in\Delta$$

היעקוביאן שקיבלנו שונה מאפס ולכן ההעתקה שהגדרנו חח"ע מקומית. לכן המשפט תקף ונקבל :

$$\iint_D dx\,dy=\iint_{\triangle}|J|\,du\,dv=\frac{1}{2}\int_{v=0}^{2}\int_{u=0}^{3}du\,dv=3$$

דרך שניה: בגלל שכבר יש לנו את ההעתקה ההפוכה, אפשר לחשב את היעקוביאן שלה ולהשתמש בכך ש- $J=\frac{1}{J^{-1}}$.

$$J^*=J^{-1}=\det\begin{pmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{pmatrix}=\det\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=-2\Longrightarrow J=-\frac{1}{2}$$

הערה.

מעבר הקואורדינטות $(x,y)\mapsto(u,v)$ צריך להיות חח"ע בתחומים המדוברים, תנאי מספיק לכך הוא $J\neq 0$ בתחום המדובר. למעשה מספיק שיהיה שונה מאפס פרט לתחומים בעלי שטח 0, למשל נקודות וישרים על שפת התחום שלנו.

הערה.

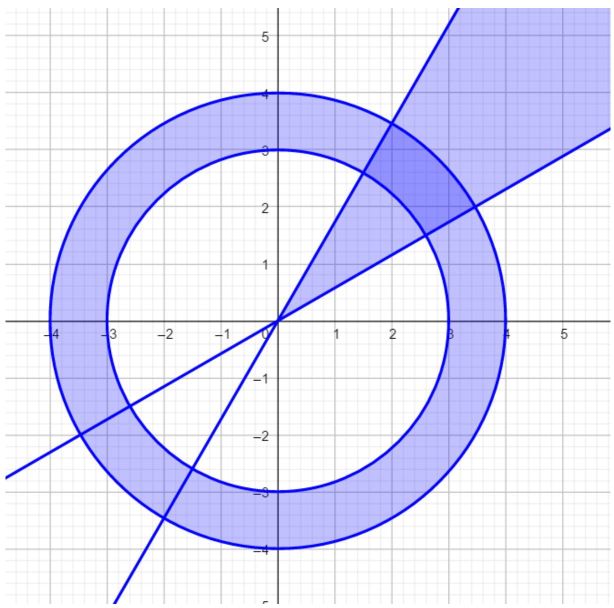
מבחינה פורמלית, ברגע שעשינו החלפת משתנים למשתנים u, v, לא ייתכן שיופיע באינטגרל ביטויים של x, y, אך כאן עשינו זאת רק בשלב ביניים כדי לראות שהביטויים מצטמצמים.

תרגיל 7.3.2.

חשבו את $I = \iint_D \frac{y}{x}\,dx\,dy$, כאשר $D = \left\{ \begin{array}{c} 9 \leq x^2 + y^2 \leq 16 \\ \frac{\sqrt{3}}{3}x \leq y \leq \sqrt{3}x \\ x > 0, y > 0 \end{array} \right\}$.

פתרון:

ראשית נשרטט את התחום:



נפתור את השאלה ב2 דרכים.

1. ע"י החלפת המשתנים הבאה $\begin{cases} u = x^2 + y^2 \\ v = \frac{y}{x} \end{cases}$, נקבל:

$$J^{-1} = \begin{vmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2x & 2y \\ -\frac{y}{x^2} & \frac{1}{x} \end{vmatrix} = 2 + 2\frac{y^2}{x^2} = 2(1+v^2) \neq 0$$

הגבולות יהיו $9 \le u \le 16$, $\sqrt{\frac{1}{3}} \le v \le \sqrt{3}$, ולכן:

$$\begin{aligned}
I &= \iint_D \frac{y}{x}\,dx\,dy = \iint_\Delta v\,|J|\,dv\,du \\
&= \frac{1}{2}\int_{u=9}^{16}\int_{v=\sqrt{\frac{1}{3}}}^{\sqrt{3}} \frac{v}{1+v^2}\,dv\,du = \frac{7}{2}\int_{v=\sqrt{\frac{1}{3}}}^{\sqrt{3}} \frac{v}{1+v^2}\,dv \\
&= \frac{7}{4}\int_{v=\sqrt{\frac{1}{3}}}^{\sqrt{3}} \frac{2v}{1+v^2}\,dv = \frac{7}{4}\left[\ln(1+v^2)\right]|_{\sqrt{\frac{1}{3}}}^{\sqrt{3}} = \frac{7}{4}\left[\ln(1+3) - \ln(1+\tfrac{1}{3})\right] \\
&= \frac{7}{4}\left[\ln(4) - \ln(\frac{4}{3})\right] = \frac{7}{4}\ln\left(\frac{4}{\frac{4}{3}}\right) = \frac{7}{4}\ln(3)
\end{aligned}$$

2. בתחומים מהצורה הזו נעדיף לעבור לקואורדינטות פולריות $\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$.

נחשב את גבולות האינטגרציה החדשים :

$$\begin{aligned}
9 \le x^2+y^2 \le 16 \quad &\longrightarrow \quad 3 \le r \le 4 \\
\frac{\sqrt{3}}{3}x \le y \le \sqrt{3}x \quad &\longrightarrow \quad \frac{\sqrt{3}}{3} \le \frac{y}{x} \le \sqrt{3} \\
\frac{\sqrt{3}}{3} \le \tan\theta \le \sqrt{3} \quad &\longrightarrow \quad \frac{\pi}{6} \le \theta \le \frac{\pi}{3}
\end{aligned}$$

נחשב את היעקוביאן :

$$J = \begin{vmatrix} x_r & x_\theta \\ y_r & y_\theta \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} = r$$

ששונה מאפס פרט לקבוצה משטח אפס, ולכן נקבל:

$$\begin{aligned}
I &= \iint_D \frac{y}{x}\,dx\,dy = \iint_\Delta \tan\theta\,|J|\,dr\,d\theta \\
&= \int_{\theta=\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\int_{r=3}^{5} \frac{\sin\theta}{\cos\theta} r\,dr\,d\theta = \int_{\theta=\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \left(\frac{16}{2} - \frac{9}{2}\right)\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\,d\theta = -\frac{7}{2}\ln|\cos\theta|\Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \\
&= -\frac{7}{2}\ln\left(\cos\frac{\pi}{3}\right) + \frac{7}{2}\ln\left(\cos\frac{\pi}{6}\right) = \frac{7}{2}\ln\left(\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}}\right) = \frac{7}{2}\ln\sqrt{3} = \frac{7}{4}\ln(3).
\end{aligned}$$

הערה.

בהינתן $I=\iint_D f(x,y)\,dx\,dy$ נפעל באופן הבא:

1. נבדוק האם D תחום פשוט, אם כן, נחשב את האינטגרל, אחרת נמשיך לשלבים הבאים.
2. נעבור לקואורדינטות נוחות יותר (u,v) (או (r,θ)).
3. נמצא את תחום האינטגרציה החדש Δ, לפי הקואורדינטות החדשות (פשוט מעבירים את שפת התחום D לקואורדינטות החדשות).
4. נחשב נגזרות חלקיות ויעקוביאן.
5. נחשב :

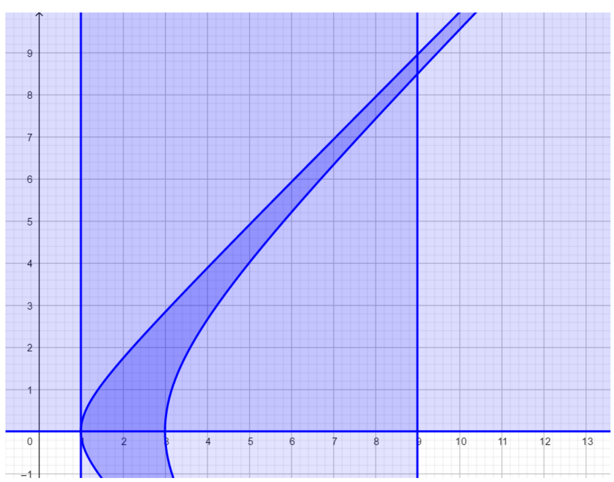
$$I=\iint_D f(x,y)\,dx\,dy=\iint_\Delta f\left(x\left(u,v\right),y\left(u,v\right)\right)|J|\;du\,dv$$

תרגיל 7.3.3.

חשבו את $I=\iint_D xye^{x^2-y^2}\,dx\,dy$, כאשר $.D=\begin{cases}1\le x^2-y^2\le 9\\ 1\le x\le 9\\ y\ge 0\end{cases}$

פתרון:

נשרטט את התחום:



נבצע את החלפת המשתנים הבאה $\begin{cases} u = x^2 - y^2 \\ v = x^2 \end{cases}$, נמצא את גבולות האינטגרציה החדשים

$$\begin{array}{rcl} D & & \Delta \\ x^2 - y^2 = 1 & \longrightarrow & u = 1 \\ x^2 - y^2 = 9 & \longrightarrow & u = 9 \\ x = 9 & \longrightarrow & v = 81 \\ y = 0 & \longrightarrow & v = u \end{array}$$

במקרה זה יהיה קל יותר לחשב את היעקוביאן ההופכי:

$$J^{-1} = \begin{vmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2x & -2y \\ 2x & 0 \end{vmatrix} = 4xy$$

ששונה מאפס פרט לקבוצה משטח אפס, ולכן: $|J| = \frac{1}{|4xy|} = \frac{1}{4xy}$, ונקבל:

$$\begin{aligned} I &= \iint_D xye^{x^2-y^2}\,dx\,dy = \int_\Delta xye^u \frac{1}{4xy}\,du\,dv = \frac{1}{4}\int_\Delta e^u\,dv\,du \\ &= \frac{1}{4}\int_{u=1}^{9}\left(\int_{v=u}^{81} e^u\,dv\right)du = \frac{1}{4}\int_1^9 e^u\,(81-u)\,du = \frac{81}{4}\int_1^9 e^u\,du - \frac{1}{4}\int_1^9 e^u u\,du \\ &= \left\{\begin{array}{cc} f' = e^u & f = e^u \\ g = u & g' = 1 \end{array}\right\} = \frac{81}{4}\int_1^9 e^u\,du - \frac{1}{4}\left(ue^u|_1^9 - \int_1^9 e^u\,du\right) \\ &= \frac{82}{4}\left(e^9 - e\right) - \frac{1}{4}\left(9e^9 - e\right) = \frac{73}{4}e^9 - \frac{81}{4}e \end{aligned}$$

תרגיל 7.3.4.

חשבו את שטח האליפסה $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

פתרון:

עבור צורות הדומות לאליפסה נוכל לפעמים להיעזר בקואורדינטות פולריות מוכללות

$$\begin{aligned} x &= ar\cos\theta \\ y &= br\sin\theta \end{aligned}$$

מתקיים

$$1 = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{a^2r^2\cos^2\theta}{a^2} + \frac{b^2r^2\sin^2\theta}{b^2} = r^2$$

ולכן, תחום האינטגרציה החדש הוא $\begin{cases} 0 \le \theta \le 2\pi \\ 0 \le r \le 1 \end{cases}$ (נשים לב כי θ אינה מוגדרת באפס באופן חח"ע, על זה תדברו בהרצאה).

נחשב יעקוביאן :

$$J = \begin{vmatrix} a\cos\theta & -ar\sin\theta \\ b\sin\theta & br\cos\theta \end{vmatrix} = abr\cos^2\theta + abr\sin^2\theta = abr$$

ששונה מאפס פרט לקבוצה משטח אפס, ולכן נקבל:

$$\begin{aligned} \text{Area} &= \iint_D dx\,dy = \iint_\Delta abr\,dr\,d\theta = ab\int_{\theta=0}^{2\pi}\int_{r=0}^{1} r\,dr\,d\theta \\ &= ab\int_{\theta=0}^{2\pi} \frac{r^2}{2}\bigg|_{r=0}^{r=1} d\theta = \pi ab \end{aligned}$$

7.4 אינטגרל משולש

רעיון.

תהי $f(x,y,z)$ פונקציה רציפה בתחום D במרחב $\mathbb{R}^3$, כלומר $f : D \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$. אינטגרל משולש הינו אינטגרל מהצורה:

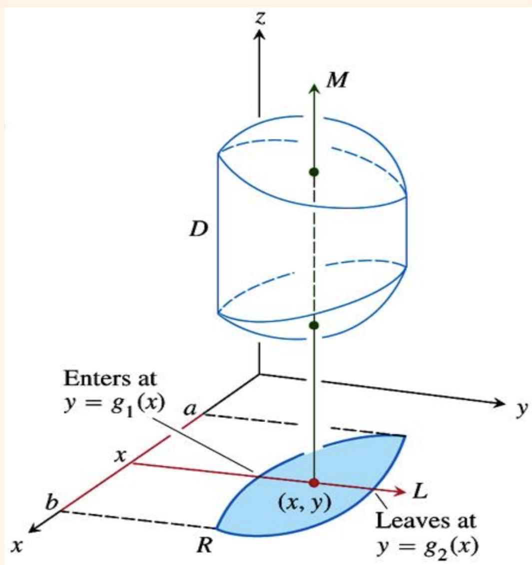
$$\iiint_D f(x,y,z)dV$$

וכמו אינטגרל אינטגרל משולש הוא בעצם הרחבה ישירה של אינטגרל כפול.
כמו באינטגרל כפול, אם נמצא פרמטריזציה נוחה לΩ, כאשר מהצורה הבאה:

$$R = \{(x,y)|a \le x \le b, g_1(x) \le y \le g_2(x)\}$$

$$D = \{(x,y,z)|(x,y) \in R, f_1(x,y) \le z \le f_2(x,y)\},$$

עבור f_1, f_2, g_1, g_2 רציפות.



אז נקבל:

$$\iiint_D h(x,y,z)dV = \int_{x=a}^{b} \int_{y=g_1(x)}^{g_2(x)} \int_{z=f_1(x,y)}^{f_2(x,y)} h(x,y,z)dzdydx$$

תרגיל 7.4.1.

(תרגיל ממבחן)

חשבו את $\iiint_E \frac{dV}{(x+y+z+1)^3}$ כאשר E הגוף החסום ע"י המישורים:

$$x=0$$

$$y=0$$

$$z=0$$

$$x+y+z=1$$

פתרון:

z משתנה בין 0 לבין $1-y-x$. כעת נטיל את המשטח על המישור xy: ההיטל הינו התחום במישור החסום ע"י $x=0, y=0, x+y=1$.
כלומר, y משתנה בין 0 ל-$1-x$, x משתנה בין 0 ל-1. נקבל :

$$\begin{aligned}
I &= \iiint_E \frac{dV}{(x+y+z+1)^3} = \int_{x=0}^{1}\int_{y=0}^{1-x}\int_{z=0}^{1-x-y}\frac{1}{(x+y+z+1)^3}dzdydx \\
&= \int_{x=0}^{1}\int_{y=0}^{1-x}\left[-\frac{1}{2}(x+y+z+1)^{-2}\right]_{z=0}^{1-x-y}dydx \\
&= \int_{x=0}^{1}\int_{y=0}^{1-x}\left(-\frac{1}{8}+\frac{1}{2}(x+y+1)^{-2}\right)dydx \\
&= \int_{x=0}^{1}\left[-\frac{1}{8}y-\frac{1}{2}(x+y+1)^{-1}\right]_{y=0}^{1-x}dx = \int_{x=0}^{1}\left(-\frac{1}{8}(1-x)-\frac{1}{4}+\frac{1}{2}(x+1)^{-1}\right)dx \\
&= \int_{x=0}^{1}\left(-\frac{3}{8}+\frac{x}{8}+\frac{1}{2}(x+1)^{-1}\right)dx = \left[-\frac{3}{8}x+\frac{1}{16}x^2+\frac{1}{2}\ln|x+1|\right]_0^1 = -\frac{3}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{2}\ln 2 \\
&= \frac{1}{2}\ln 2-\frac{5}{16}
\end{aligned}$$

7.4.1 חישוב נפח

נניח ויש לנו גוף $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, אז נוכל לחשב את הנפח שלו, בעזרת:

$$\text{Vol}\,\Omega = \iiint_\Omega 1dV$$

תרגיל 7.4.2.

(תרגיל ממבחן)
חשבו את נפח הגוף V המוגדר על ידי:

$$x^2+y^2 \le 2y$$
$$0 \le z \le (x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}$$

פתרון:

נסמן, $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x^2+y^2 \le 2y\}$, אז:

$$\text{Vol}\,V = \iiint_V 1dV = \iint_D \left(\int_{z=0}^{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} 1dz\right) dydx = \iint_D (x^2+y^2)^{\frac{3}{2}} dxdy$$

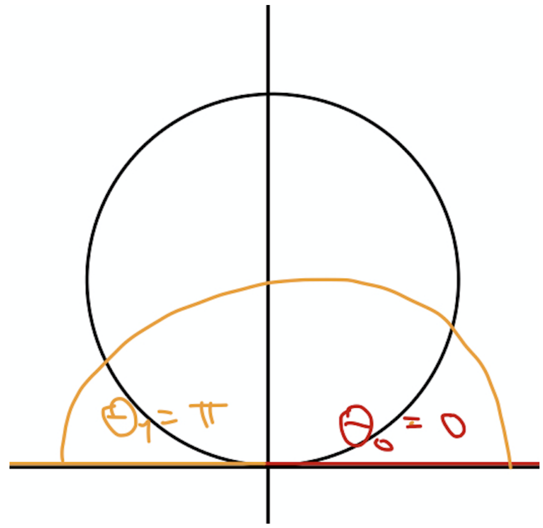
כדי לפשט את התחום D נבצע החלפה קוטבית. כעת האי-שוויון ב– D נרשם כך:

$$0 \le x^2+y^2 \le 2y$$

$$0 \le r^2 \le 2r\sin\theta$$

$$0 \le r \le 2\sin\theta$$

ונותר להבין כיצד הזווית משתנה.
נשים לב כי $0 \le \sin\theta$ ולכן נסיק כי $0 \le \theta \le \pi$, ניתן לראות זאת באיור הבא:



קיבלנו את האינטגרל:

$$\begin{aligned}\text{Vol}(V) &= \iint_D (x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}dxdy = \int_0^\pi \int_0^{2\sin\theta}(r^2)^{3/2}rdrd\theta \\ &= \int_0^\pi \left[\frac{r^5}{5}\right]_0^{2\sin\theta} d\theta = \frac{32}{5}\int_0^\pi (1-\cos^2\theta)^2\sin\theta d\theta \\ &\overset{t=\cos\theta}{=} -\int_1^{-1}(1-t^2)^2dt = \frac{64}{5}\int_0^1 (1-t^2)^2 dt \\ &= \frac{64}{5}\left[t-\frac{2}{3}t^3+\frac{1}{5}t^5\right]_0^1 = \frac{512}{75}.\end{aligned}$$

7.4.2 חישוב מסה בעזרת פונקציית צפיפות

נניח ויש לנו גוף במרחב Ω, עם צפיפות ρ, כאשר:

$$\rho : \Omega \to \mathbb{R}$$

נוכל לסמן את מסת הגוף Ω להיות:

$$M = \iiint_\Omega \rho\,(x,y,z)\,dV$$

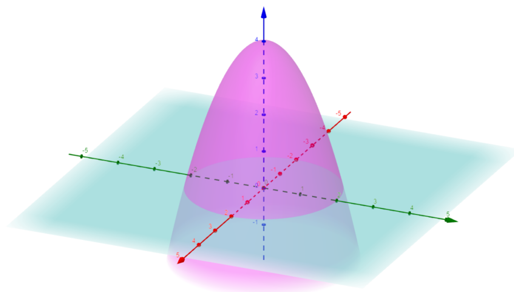
נשים לב כי אם $\rho = 1$, אז $M = \text{Vol}\,\Omega$.

תרגיל 7.4.3.

מצאו את המסה של גוף Ω, המוגדר להיות הגוף החסום מלמטה ע"י הדיסק $x^2+y^2 \le 4$ במישור xy ($z=0$), ומלמעלה ע"י הפרבולואיד $z = 4 - x^2 - y^2$, עם צפיפות אחידה δ.

פתרון:

נשרטט את הגוף:



אז:

$$M=\iint_{x^2+y^2\le 4}\int_{z=0}^{4-x^2-y^2}\delta dzdydx=\delta\iint_{x^2+y^2\le 4}4-x^2-y^2dydx$$

נעבור לקואורדינטות פולריות:

$$M=\delta\int_0^{2\pi}\int_0^2\left(4-r^2\cos^2\theta-r^2\sin^2\theta\right)rdrd\theta=\delta\int_0^{2\pi}\int_0^2 4r-r^3drd\theta$$

$$=\delta\int_0^{2\pi}\left(2r^2-\frac{r^4}{4}\right)|_0^2 d\theta=\delta\int_0^{2\pi}4d\theta=8\pi\delta$$

7.5 תרגול נוסף

תרגיל 7.5.1.

חשבו את $\iint_D e^{3x+6y}\,dx\,dy$ כאשר $D=[0,1]\times[0,4]$.

פתרון:

נשים לב כי $e^{3x+6y}=e^{3x}e^{6y}$, אז אפשר להשתמש בתרגיל שעשינו מוקדם יותר ולקבל:

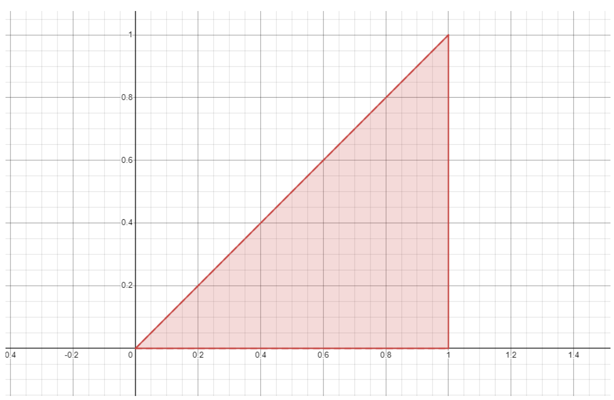
$$\iint_D e^{3x+6y}\,dx\,dy=\left(\int_0^1 e^{3x}\,dx\right)\left(\int_0^4 e^{6y}\right)=\left(\frac{e^{3x}}{3}\bigg|_{x=0}^{x=1}\right)\left(\frac{e^{6y}}{6}\bigg|_{y=0}^{y=4}\right)$$
$$=\left(\frac{1}{3}e^3-\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{6}e^{24}-\frac{1}{6}\right)$$

תרגיל 7.5.2.

חשבו את $\iint_D \frac{\sin x}{x}\,dx\,dy$ עבור D המשולש החסום בין $y=x$, $x=1$ וציר הx.

פתרון:

נתחיל בלשרטט את התחום הזה:



נשים לב כי אפשר לכתוב את התחום הזה על ידי:

$$D=\{(x,y)|0\le x\le 1, 0\le y\le x\}$$

כלומר, D תחום פשוט ביחס לציר הy (האם הוא גם פשוט ביחס לציר הx?), ולכן:

$$\iint_D f(x,y)=\int_0^1\left(\int_0^x\frac{\sin(x)}{x}\,dy\right)\,dx=\int_0^1\frac{\sin(x)}{x}\left(\int_0^x\,dy\right)\,dx=\int_0^1\frac{\sin(x)}{x}\,(x)\,dx$$
$$=\int_0^1\sin(x)\,dx=[-\cos(x)]\bigg|_{x=0}^{x=1}=-\cos(1)+1=1-\cos(1)$$

תרגיל 7.5.3.

חשבו $I=\iint_D \frac{x+3y}{x^4}e^{\frac{y}{x^3}}\,dx\,dy$, כאשר D הוא התחום החסום ע"י המשוואות $\begin{cases} x+y=1 \\ x+y=\frac{1}{2} \\ y=x^3 \\ y=4x^3 \end{cases}$.

פתרון:

מטרתנו היא "לרבע" את התחום ולכן נבחר בהחלפת המשתנים הבאה : $\begin{cases} v=x+y \\ u=\frac{y}{x^3} \end{cases}$, נחשב את גבולות האינטגרציה החדשים :

$$\begin{array}{rcl} D & & \Delta \\ x+y=1 & \longrightarrow & v=1 \\ x+y=\dfrac{1}{2} & \longrightarrow & v=\dfrac{1}{2} \\ y=x^3 & \longrightarrow & u=1 \\ y=4x^3 & \longrightarrow & u=4 \end{array}$$

נחשב את היעקוביאן, במקרה זה יהיה קל יותר לחשב את היעקוביאן ההופכי, שכן u,v מובאים כבר כפונקציות של x,y :

$$J^{-1}=\begin{vmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} -3yx^{-4} & \frac{1}{x^3} \\ 1 & 1 \end{vmatrix}= -\frac{3y}{x^4}-\frac{1}{x^3}=-\frac{(3y+x)}{x^4}$$
$$\Rightarrow |J|=\left|\tfrac{1}{J^{-1}}\right|=\tfrac{x^4}{3y+x}$$

היעקוביאן מוגדר ושונה מאפס, פרט לקבוצה משטח אפס (מהי? מצאו אותה והסבירו מדוע היא משטח אפס). נחשב:

$$\begin{aligned} I &= \iint_D \frac{x+3y}{x^4}e^{\frac{y}{x^3}}\,dx\,dy=\iint_\Delta \frac{x+3y}{x^4}e^{\frac{y}{x^3}}\,|J|\,du\,dv \\ &=_\star \iint_\Delta e^u\,du\,dv=\int_{v=\frac{1}{2}}^{1}\int_{u=1}^{4} e^u\,du\,dv=\frac{1}{2}\left(e^4-e\right) \end{aligned}$$

כאשר $=_\star$ מכיוון שלכל $(x,y)\in D$ מתקיים $\frac{3y+x}{x^4}>0$.

תרגיל 7.5.4.

חשבו את השטח החסום ע"י העקומה $(2x+y+1)^2+(x-y)^2=1$.

פתרון:

ננסה לבחור קואורדינטות חדשות כך שיתקבל מעגל $\begin{cases} u = 2x + y + 1 \\ v = x - y \end{cases}$, ונקבל כי התחום החדש Δ חסום ע"י $u^2 + v^2 = 1$.

נחשב יעקוביאן :

$$J^{-1} = \begin{vmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -3 \neq 0$$

כלומר, $|J| = \frac{1}{3} \neq 0$, נקבל :

$$\text{Area} = \iint_D dx\,dy = \iint_\Delta \frac{1}{3}\,du\,dv = \frac{1}{3}\iint_{u^2+v^2\leq 1} du\,dv = \frac{\pi}{3}$$

שכן, $\iint_{u^2+v^2\leq 1} du\,dv = \pi$ שטח של מעגל ברדיוס 1.

תרגול שמיני : החלפות משתנים ואינטגרל קווי ראשון

8.1 החלפת משתנים באינטגרל משולש

רעיון.

עבור אינטגרל כפול $\iiint_{\Omega} f dV$, והעתקה "טובה מספיק", נוכל לבצע החלפת משתנים, כפי שביצענו באינטגרל כפול, כאשר התהליך מאוד דומה.

1. נעבור לקואורדינטות נוחות יותר (המפשטות את התחום ו/או את הפונקציה מתחת לאינטגרל) (u, v, w).

$$\Phi : \Delta \to \Omega$$

$$(x, y, z) = (x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w))$$

2. נחשב את היעקוביאן:

$$J = \begin{vmatrix} x_u & x_v & x_w \\ y_u & y_v & y_w \\ z_u & z_v & z_w \end{vmatrix}$$

3. נשתמש בנוסחאת החלפת המשתנים:

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z)\, dxdydz = \iiint_{\Delta} f(x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w))\, |J|\, dudvdw$$

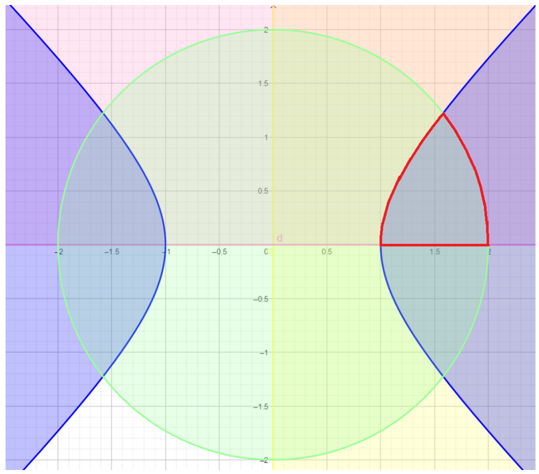
תרגיל 8.1.1.

(תרגיל ממבחן).
חשבו $I = \iiint_V (x^5yz - y^5xz)\, dxdydz$, כאשר V חסום ע"י המשטחים:

$$z = 1, z = 0, y = 0, x = 0$$
$$x^2 - y^2 \geq 1, 0 \leq x^2 + y^2 \leq 4$$

כאשר $x \geq 0$, $y \geq 0$.

פתרון:
תחילה נבין מהו תחום האינטגרציה, קל לראות כי $0 \leq z \leq 1$, ובמישור x, y מתקבל הציור הבא:



ברביע הראשון נבטא את x כפונקציה של y על פני העקומות:

$$x_1(y) = \sqrt{1+y^2}, x_2(y) = \sqrt{4-y^2}$$

נמצא את נקודת החיתוך ברביע הראשון:

$$\sqrt{4-y^2} = \sqrt{1+y^2} \Rightarrow y = \sqrt{\frac{3}{2}}$$

אם כך במישור xy תחום האינטגרציה:

$$\left\{(x,y) \;\middle|\; \sqrt{1+y^2} \leq x \leq \sqrt{4-y^2}, 0 \leq y \leq \sqrt{\frac{3}{2}}\right\}$$
$$= \left\{(x,y) \;\middle|\; 1+y^2 \leq x^2 \leq 4-y^2, 0 \leq y \leq \sqrt{\frac{3}{2}}\right\}$$
$$= \left\{(x,y) \;\middle|\; 1 \leq x^2-y^2 \leq 4-2y^2, 0 \leq y \leq \sqrt{\frac{3}{2}}\right\}$$

נבצע החלפת משתנים:

$$\begin{cases} w = z \\ v = y^2 \\ u = x^2 - y^2 \end{cases}$$

אז נקבל את התחום:

$$\Delta = \left\{ (u,v,w) \middle| 1 \leq u \leq 4-2v, 0 \leq v \leq \frac{3}{2}, 0 \leq w \leq 1 \right\}$$

נחשב:

$$J^{-1} = \begin{vmatrix} 2x & -2y & 0 \\ 0 & 2y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 4xy \neq 0$$

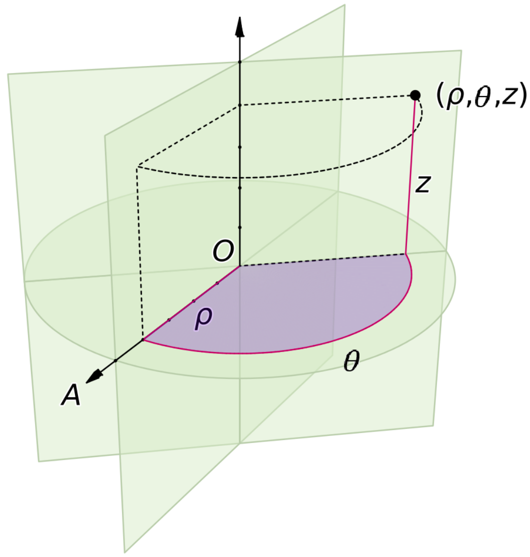
$$J = \frac{1}{4xy} > 0$$

ולכן מתקיים:

$$\begin{aligned}
\iiint_V \left(x^5yz - y^5xz\right) dxdydz &= \iiint_\Delta \left(x^5yz - y^5xz\right) \cdot \tfrac{1}{4xy} dudvdw \\
&= \tfrac{1}{4} \iiint_\Delta \left(x^4 - y^4\right) zdudvdw \\
&= \tfrac{1}{4} \int_0^1 \int_0^{\frac{3}{2}} \int_1^{4-2v} \left(x^2 - y^2\right)\left(x^2 + y^2\right) zdudvdw \\
&= \tfrac{1}{4} \int_0^1 \int_0^{\frac{3}{2}} \int_1^{4-2v} u\left(u + 2v\right) wdudvdw \\
&= \tfrac{1}{4} \left(\int_0^{\frac{3}{2}} \int_1^{4-2v} \left(u^2 + 2vu\right) dudv \right) \left(\int_0^1 wdw \right) \\
&= \tfrac{1}{8} \left(\int_0^{\frac{3}{2}} \left[\tfrac{u^3}{3} + vu^2 \right]_1^{4-2v} dv \right) \\
&= \tfrac{1}{8} \left(\int_0^{\frac{3}{2}} \left(\tfrac{(4-2v)^3}{3} + v(4-2v)^2 - \tfrac{1}{3} - v \right) dv \right) \approx 1.63281
\end{aligned}$$

8.1.1 החלפות משתנים נפוצות

קואורדינטות גליליות



הקואורדינטות החדשות במקרה זה הן (ρ,θ,z) :

$$\begin{cases} x=\rho\cos\theta \\ y=\rho\sin\theta \\ z=z \end{cases},|J|=\rho,\quad \rho\geq 0, 0\leq\theta<2\pi, -\infty\leq z\leq\infty$$

קואורדינטות גליליות מוכללות

זהו המקרה שבמישור x,y ישנה אליפסה ולא עיגול, כלומר מתקיימת המשוואה:

$$\rho^2=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}$$

$$\begin{cases} x=a\rho\cos\theta \\ y=b\rho\sin\theta \\ z=z \end{cases},|J|=|ab|\rho, \rho\geq 0, 0\leq\theta<2\pi, -\infty\leq z\leq\infty$$

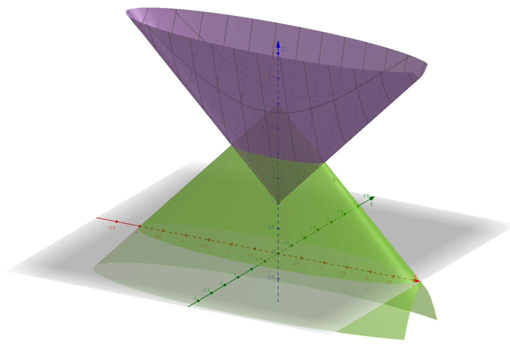
תרגיל 8.1.2.

מצאו את הנפח החסום ע"י המשטחים $z=1+\sqrt{x^2+16y^2}$ ו- $z=3-\sqrt{x^2+16y^2}$.

פתרון:
עלינו לחשב:

$$\iint_D \int_{1+\sqrt{x^2+16y^2}}^{3-\sqrt{x^2+16y^2}} 1dzdA$$

נותר להבין מהו התחום D.



נמצא את משוואת החיתוך של הצורות:

$$\begin{aligned} 1+\sqrt{x^2+16y^2} &= 3-\sqrt{x^2+16y^2} \\ x^2+16y^2 &= 1 \\ x^2+\frac{1}{(\frac{1}{4^2})}y^2 &= 1 \end{aligned}$$

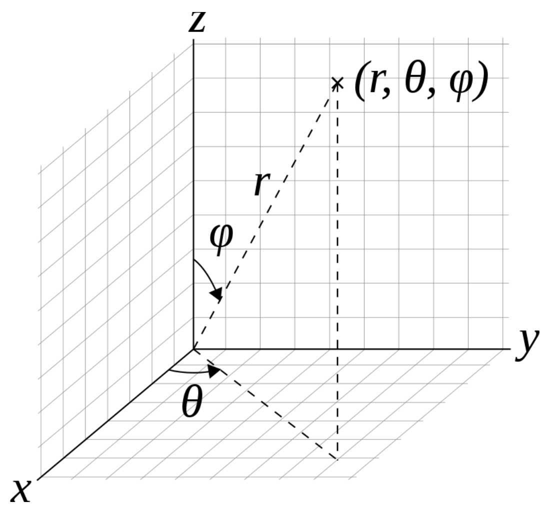
כלומר D הוא האליפסה הנ"ל במישור xy.
כעת נבצע החלפת משתנים גלילית מוכללת:

$$R = \{(\rho,\theta,z)|0<\theta<2\pi, 0<\rho<1, 1+\rho<z<3-\rho\}, J=\frac{1}{4}\rho$$

כלומר:

$$\text{Vol} = \int_0^{2\pi}\int_0^1\int_{1+\rho}^{3-\rho}\frac{1}{4}\rho dzd\rho d\theta = ... = \frac{\pi}{6}$$

קואורדינטות כדוריות



הקואורדינטות החדשות במקרה זה הן (r,θ,φ):

$$\begin{cases} x = r\sin\varphi\cos\theta \\ y = r\sin\varphi\sin\theta \\ z = r\cos\varphi \end{cases} ,|J| = r^2\sin\varphi, r>0, 0\le\theta<2\pi, 0\le\varphi\le\pi$$

תרגיל 8.1.3.

חשבון $I = \iiint_V \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+(z-1)^2}}dxdydz$, כאשר

$$\begin{aligned} V &= \{(x,y,z)\,|x^2+y^2+z^2\le 2z\} \\ &= \left\{(x,y,z)\,|x^2+y^2+(z-1)^2\le 1\right\} \end{aligned}$$

פתרון:

מדובר בכדור ברדיוס 1 סביב הנקודה $(0,0,1)$. כאן לא נשתמש בקואורדינטות כדוריות , שכן אילו נוחות רק כאשר יש סימטריה לראשית, אך נשתמש בקואורדינטות כדוריות קצת שונות :

$$\begin{cases} x = r\sin\varphi\cos\theta \\ y = r\sin\varphi\sin\theta \\ z-1 = r\cos\varphi \end{cases}$$

כמו בכדוריות נקבל כי $|J| = r^2 \sin\varphi$, גבולות האינטגרציה החדשים $\begin{cases} 0 \le \theta \le 2\pi \\ 0 \le \varphi \le \pi \\ 0 \le r \le 1 \end{cases}$.

$$I = \iiint_{\Delta} \frac{1}{r} \cdot r^2 \sin\varphi dV = \int_0^{2\pi} \int_0^1 \int_0^{\pi} r \sin\varphi d\varphi dr d\theta = 2\pi \cdot \tfrac{1}{2} \cdot 2 = 2\pi.$$

8.2 עקומים

תזכורת.

עקום הוא פונקציה רציפה:

$$\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$$

כאשר נתמקד בעיקר ב$n = 2$ או $n = 3$, לפעמים נסמן:

$$\gamma(t) = (x(t), y(t), z(t))$$

- אם $\gamma(a) = \gamma(b)$, אז נקרא לγ עקום סגור.
- אם γ לא חותך אץ עצמו באף נקודה, פרט אולי לקצוות, כלומר:

$$\forall t \neq s \in (a,b), \gamma(t) \neq \gamma(s)$$

נקרא לγ עקום פשוט.

כאשר אנו מדברים על עקום γ, בד"כ אנו מתכוונים לעקום, איך שהוא מונח במרחב, כלומר, בד"כ לא אכפת לנו מהפונקציה γ, אלא מהקבוצה $\text{Im}\,\gamma = \{\gamma(t) | t \in [a,b]\} \subset \mathbb{R}^n$, כלומר, נחשוב על 2 העקומים:

$$\gamma_1(t) = (0,t), t \in [0,1]$$

$$\gamma_2(t) = (0, 1-t), t \in [0,1]$$

$$\gamma_3(t) = (0, \sin(t)), t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$$

$$\gamma_4(t) = (0, 3t+1)\,, t \in \left[-\frac{1}{3}, 0\right]$$

כאותו עקום, להבדל בניהם נקרא פרמטריזציה (ההגדרה המדויקת בהרצאות).
אם γ עקום גזיר, אז $\gamma'(t_0) = (x'(t_0), y'(t_0), z'(t_0))$ הוא הוקטור המשיק לעקום γ בנקודה t_0.

תרגיל 8.2.1.

מצאו פרמטריזציה נגד כיוון השעון לעקומים הבאים:

1. לישר היוצא מ $(3,-1,1)$ ומסתיים ב$(1,2,0)$.
2. $$x^2+y^2=r^2$$
3. $$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$
4. $$x^{\frac{2}{5}}+y^{\frac{2}{5}}=a^{\frac{2}{5}}$$

פתרון:

1. דרך ראשונה:
נשים לב כי הפרמטריזציה מקיימת $t\in[0,1]$, $\gamma(1)=(1,2,0)$, $\gamma(0)=(3,-1,1)$:

$$\begin{aligned}\gamma(t) &= (3,-1,1)+t\cdot(\text{כיוון הווקטור})\\ &= (3,-1,1)+t\cdot((1,2,0)-(3,-1,1))\\ &= (3,-1,1)+t\cdot(-2,3,-1)\\ &= (3-2t,-1+3t,1-t)\end{aligned}$$

דרך שנייה:

$$\gamma(t)=(1-t)(3,-1,1)+t(1,2,0)=(3-2t,3t-1,1-t)\qquad t\in[0,1]$$

2. $$\begin{cases}x=R\cos\theta\\ y=R\sin\theta\\ \theta\in[0,2\pi]\end{cases}$$

3. $$\begin{cases}x=a\cos\theta\\ y=b\sin\theta\\ \theta\in[0,2\pi]\end{cases}$$

4. $$\begin{cases}x=a\cos^5\theta\\ y=a\sin^5\theta\\ \theta\in[0,2\pi]\end{cases}$$

תרגול תשיעי

9.1 אורך עקום

תזכורת.

בהינתן עקום גזיר ברציפות $\gamma:[a,b]\to\mathbb{R}^3$, אורך העקום נתון על ידי:

$$\ell=\int_a^b\|\gamma'(t)\|dt=\int_a^b\sqrt{x'(t)^2+y'(t)^2+z'(t)^2}dt$$

או אם $\gamma:[a,b]\to\mathbb{R}^2$:

$$\ell=\int_a^b\|\gamma'(t)\|dt=\int_a^b\sqrt{x'(t)^2+y'(t)^2}dt$$

אורך עקום לא תלוי בפרמטריזציה.

תזכורת.

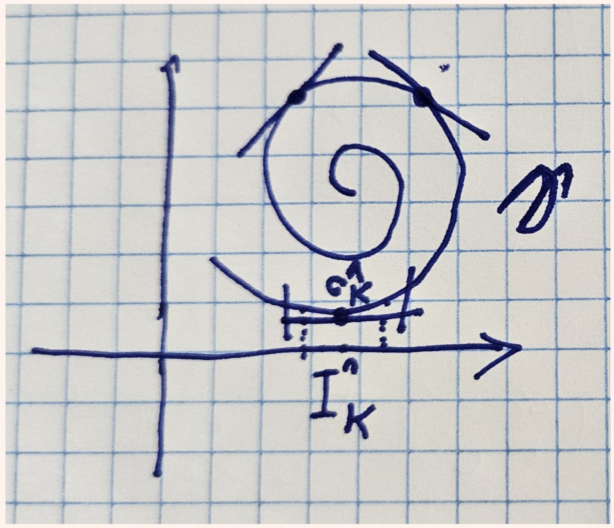
ניתן אינטואיציה מדוע ביטוי זה אכן מבטא את אורך העקומה:
נניח כי $[a,b]=[0,1]$ ונבצע לדוגמא חלוקה רגולרית $I_k^n=[\frac{k}{n},\frac{k+1}{n}]$. מרציפות נראה כי הסכום

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\left\|\gamma(\frac{k+1}{n})-\gamma(\frac{k}{n})\right\|=\sum_{k=0}^{n-1}\left\|\frac{\gamma(\frac{k+1}{n})-\gamma(\frac{k}{n})}{n}\right\|$$

נותן קירוב לאורך העקומה כאשר n שואף לאינסוף. לבסוף מגזירות ניזכר במשפט לגראנז':

$$\gamma'(c_k^n)=\frac{\gamma(\frac{k+1}{n})-\gamma(\frac{k}{n})}{n}$$

עם $c_k^n\in I_k^n$. אם כן מיצוע נורמת הנגזרת אמור לתת את אורך העקומה.



כמו כן, אי-תלות האורך בפרמטריזציה היא אפליקציה של החלפת משתנים:
עבור המקרה הפשוט בו $f:[a,b]\to[a,b]$, $f(a)=a, f(b)=b$ חד-חד ערכית, על וגזירה ברציפות,
ומסילה המוגדרת $\gamma_*=\gamma\circ f:[a,b]\to\mathbb{R}^3$ נקבל

$$\int_a^b\|\gamma_*'(t)\|dt=\int_a^b\|(\gamma\circ f)'(t)\|dt=\int_a^b\|(\gamma'\circ f(t))\cdot f'(t)\|dt=\int_a^b\|\gamma'(u)\||du|$$

עם $u=f(t)$, $du=f'(t)dt$.

תרגיל 9.1.1.

מצאו ביטוי כללי להיקף אליפסה (עם פרמטרים a,b), והסיקו מהו היקפו של מעגל ברדיוס 1.

פתרון:
עבור הפרמטריזציה שמצאנו:

$$\begin{cases}x=a\cos\theta\\ y=b\sin\theta\\ \theta\in[0,2\pi]\end{cases}$$

מתקיים:

$$\gamma'(t)=(-a\sin\theta,b\cos\theta)$$

אז:

$$\|\gamma'(t)\|=\sqrt{a^2\sin^2\theta+b^2\cos^2\theta}$$

כלומר:

$$\ell=\int_0^{2\pi}\sqrt{a^2\sin^2\theta+b^2\cos^2\theta}d\theta$$

עבור מעגל היחידה, נקבל $a=b=1$, ואז:

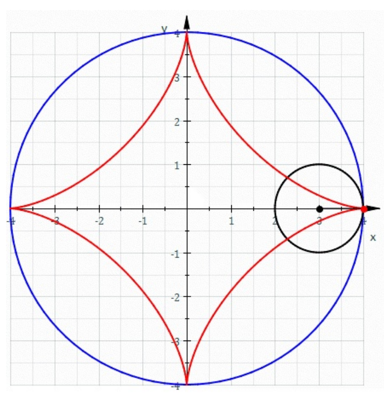
$$\ell=\int_0^{2\pi}\sqrt{\sin^2\theta+\cos^2\theta}d\theta=\int_0^{2\pi}1d\theta=2\pi$$

תרגיל 9.1.2.

חשבו את אורך העקומה הנתונה ע"י הפרמטריזציה $t\in[0,2\pi]$, $\begin{cases}x(t)=\cos^3 t\\ y(t)=\sin^3 t\end{cases}$.

פתרון:

$$\ell=\int_0^{2\pi}\|\gamma'(t)\|dt=\int_0^{2\pi}\sqrt{\left(-3\cos^2 t\sin t\right)^2+\left(3\sin^2 t\cos t\right)^2}dt$$
$$=3\int_0^{2\pi}\sqrt{\cos^4 t\sin^2 t+\sin^4 t\cos^2 t}dt$$
$$=3\int_0^{2\pi}\sqrt{\cos^2 t\sin^2 t\left(\cos^2 t+\sin^2 t\right)}dt$$
$$=3\int_0^{2\pi}\left|\cos t\sin t\right|dt=3\cdot 4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos t\sin t dt=...=6$$



9.2 אינטגרל קווי מסוג ראשון

תזכורת.

בהנתן עקום $\gamma:[a,b]\to\mathbb{R}^3$ גזיר ברציפות, ופונקציה רציפה $f:D\subset\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$, כאשר $\operatorname{Im}\gamma\subset D$, אנו מגדירים את האינטגרל הקווי מסוג ראשון של f על גבי γ כך:

$$\int_\gamma f d\ell=\int_a^b f(\gamma(t))\|\gamma'(t)\|dt$$

ערך האינטגרל אינו תלוי בפרמטריזציה של γ.

תזכורת.

כפי שהסברנו קודם, ביטוי זה אכן נותן קירוב לסכומים

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}f(\gamma(x_k^n))\left\|\gamma(\frac{k+1}{n})-\gamma(\frac{k}{n})\right\|$$

עם $x_k^n\in I_k^n$ כאשר $n\to\infty$.
כמו כן, אי התלות בפרמטריזציה היא שוב אפליקציה של נוסחאת החלפת משתנים.

תרגיל 9.2.1.

חשבו את $\int_C\left(x^2+y^2\right)d\ell$ כאשר C העקומה הנתונה ע"י הפרמטריזציה

$$\begin{cases}x\left(t\right)=a\left(\cos t+t\sin t\right)\\ y\left(t\right)=a\left(\sin t-t\cos t\right)\end{cases}\quad ,t\in[0,2\pi]$$

עבור $a>0$ קבוע.

פתרון:
נחשב את $f(\gamma(t))$ ואת $\|\gamma(t)\|$ ונציב באינטגרל הקווי:

$$\begin{aligned}f\left(\gamma\left(t\right)\right)&=f\left(a\left(\cos t+t\sin t\right),a\left(\sin t-t\cos t\right)\right)\\&=\left(a\left(\cos t+t\sin t\right)\right)^2+\left(a\left(\sin t-t\cos t\right)\right)^2\\&=a^2\left(\cos^2t+2t\cos t\sin t+t^2\sin^2t+\sin^2t-2\sin t\cos t+t^2\cos^2t\right)=a^2\left(1+t^2\right)\\\gamma'\left(t\right)&=\left(a\left(-\sin t+\sin t+t\cos t\right),a\left(\cos t-\cos t+t\sin t\right)\right)=\left(at\cos t,at\sin t\right)\\\left\|\gamma'\left(t\right)\right\|&=\sqrt{\left(at\cos t\right)^2+\left(at\sin t\right)^2}=|at|=at\end{aligned}$$

ולכן:

$$\int_C \left(x^2+y^2\right) d\ell = \int_0^{2\pi} a^2\left(1+t^2\right) atdt = a^3\left(\frac{t^2}{2}+\frac{t^4}{4}\right)\Bigg|_0^{2\pi}$$
$$= a^3\left(\frac{4\pi^2}{2}+\frac{16\pi^4}{4}\right)$$

תזכורת.

כפי שהכללנו את מושג מסת גוף, לשקלל צפיפות משתנה, נעשה זאת גם עבור מסת 'חבל' המיוצג על ידי המסילה:
אם $\gamma:[a,b]\to\mathbb{R}^3$ חבל במרחב, עם פונקציית צפיפות $\rho: D\subset\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ אז נגדיר את <u>מסת החבל</u> להיות:

$$\int_\gamma \rho d\ell$$

נשים לב כי אם $\rho(x,y,z)=\delta$ קבוע, אז מסת החבל היא אורך החבל כפול δ.

תרגיל 9.2.2.

חשבו את מסת החוט המיוצג על ידי הספירלה $t\in[0,2\pi]$ $\begin{cases} x = a\cos t \\ y = a\sin t \\ z = bt\end{cases}$

וצפיפותו נתונה ע"י $\frac{1}{x^2+y^2+z^2}$.

<u>**פתרון:**</u>
נסמן $f\left(x,y,z\right)=\frac{1}{x^2+y^2+z^2}$, ונחשב את $\int_C f(x,y,z)$.

$$\begin{aligned} f\left(\gamma\left(t\right)\right) &= f\left(a\cos t, a\sin t, bt\right) \\ &= \frac{1}{\left(a\cos t\right)^2+\left(a\sin t\right)^2+\left(bt\right)^2} = \frac{1}{a^2+b^2t^2}\end{aligned}$$

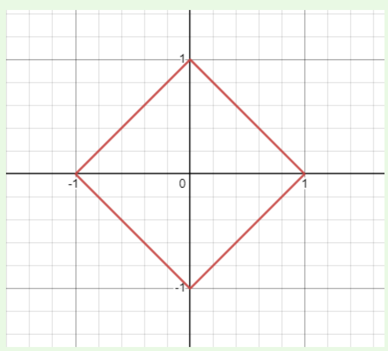
$$\begin{aligned} \gamma'\left(t\right) &= \left(-a\sin t, a\cos t, b\right) \\ \left\|\gamma'\left(t\right)\right\| &= \sqrt{\left(-a\sin t\right)^2+\left(a\cos t\right)^2+b^2} = \sqrt{a^2+b^2}\end{aligned}$$

אז:

$$\begin{aligned}
\int_C f(x,y)\,d\ell &= \int_a^b f(\gamma(t))\cdot\|\gamma'(t)\|dt = \int_0^{2\pi}\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a^2+b^2t^2}dt \\
&= \sqrt{a^2+b^2}\cdot\int_0^{2\pi}\frac{1}{a^2}\cdot\frac{1}{\left(1+\left(\frac{b}{a}\right)^2t^2\right)}dt \\
&= \sqrt{a^2+b^2}\cdot\frac{1}{a^2}\int_0^{2\pi}\frac{1}{\left(1+\left(\frac{b}{a}t\right)^2\right)}dt, \left\{\begin{array}{cc} s=\frac{b}{a}t & t=0\Rightarrow s=0 \\ ds=\frac{b}{a}dt & t=2\pi\Rightarrow s=\frac{2b\pi}{a}\end{array}\right\} \\
&= \sqrt{a^2+b^2}\cdot\frac{1}{a^2}\cdot\frac{a}{b}\int_0^{\frac{2b\pi}{a}}\frac{1}{(1+s^2)}ds = \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{ab}\left(\text{arctan}(s)\Big|_0^{\frac{2b\pi}{a}}\right) \\
&= \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{ab}\left(\text{arctan}\left(\frac{2b\pi}{a}\right)\right)
\end{aligned}$$

תרגיל 9.2.3.

חשבו את $\int_C xyd\ell$ כאשר C המסילה $|x|+|y|=1$.



פתרון:

נחלק את המסילה ל4 מסילות שונות, כאשר כל מסילה היא ישר.

$$\int_C xyd\ell = \int_{C_1}xyd\ell + \int_{C_2}xyd\ell + \int_{C_3}xyd\ell + \int_{C_4}xyd\ell$$

כאשר:

$$C_1 = \{\gamma_1(t) = (1-t,t) : t \in [0,1]\} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} f(\gamma_1(t)) = t(1-t) \\ \|\gamma_1'(t)\| = \sqrt{2} \end{cases}$$

$$C_2 = \{\gamma_2(t) = (-t,1-t) : t \in [0,1]\} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} f(\gamma_2(t)) = -t(1-t) \\ \|\gamma_2'(t)\| = \sqrt{2} \end{cases}$$

C_3 הינו הישר $(0,-1) \to (-1,0)$, C_4 הינו הישר $(1,0) \to (0,-1)$.
אז:

$$\int_{C_1} xyd\ell + \int_{C_2} xyd\ell = \int_0^1 \sqrt{2}t(1-t)\,dt - \int_0^1 \sqrt{2}t(1-t)\,dt = 0$$

באותו האופן מתקיים כי $\int_{C_3} xyd\ell + \int_{C_4} xyd\ell = 0$ לכן, סה"כ $\int_C xyd\ell = 0$.

9.3 אינטגרל קווי מסוג שני

תזכורת.

הסוג השני של אינטגרל קווי מתייחס אל שדה ווקטורי:

$$\vec{F} : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$$

שנסמן בהמשך:

$$\vec{F}(x,y) = (P(x,y), Q(x,y))$$

ועקום $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^2$ שמוכל ב D.
מאשר להגדירו באופן דומה לאינטגרל קווי מסוג ראשון בכל קואורדינטה, נרצה להתייחס לאינטרקציה בין הקואורדינטות לאורך המסילה באמצעות מכפלה פנימית. (אורך המסילה וכיוונה אינו בהכרח סימטרי ביחס לשני הצירים.)

בהשאלה ממונחים פיזיקליים, נוכל לחשוב על $\vec{F}$ בתור כוח ועל γ בתור מסלול של חלקיק.
האינטגרל הקווי מהסוג השני בא לחשוב את העבודה שמבצע $\vec{F}$ על החלקיק במסלולו.

אם כן נגדיר אינטגרל קווי מסוג שני כך:

$$\begin{aligned}\int_\gamma \vec{F}\cdot d\vec{r} &= \int_a^b \vec{F}(\gamma(t))\cdot\gamma'(t)dt \\ &= \int_a^b (P(x(t),y(t)),Q(x(t),y(t)))\cdot(x'(t),y'(t))dt \\ &= \int_a^b \left(P(x(t),y(t))x'(t)+Q(x(t),y(t))y'(t)\right)dt \\ &= \int_a^b Pdx+Qdy\end{aligned}$$

כאשר אנו מסמנים:

$$\begin{cases} x=x(t) \implies dx=x'(t)dt \\ y=y(t) \implies dy=y'(t)dt \end{cases}$$

הערה.

לפעמים נסמן $\vec{v}\cdot\vec{w}=\langle\vec{v},\vec{w}\rangle$, במקרה זה:

$$\int_\gamma \vec{F}\dot{d\vec{r}} = \int_a^b \left\langle \vec{F}(\gamma(t)),\gamma'(t)\right\rangle dt$$

תזכורת.

אינטגרל זה אינו תלוי בפרמטריזציה של γ אבל הוא תלוי בכיוון המסילה:
אם γ_1,γ_2 פרמטריזציות של אותה מסילה, וגם $\gamma_1(a)=\gamma_2(a)=A, \gamma_1(b)=\gamma_2(b)=B$, אז אכן:

$$\int_{\gamma_1}\vec{F}\cdot d\vec{r}=\int_{\gamma_2}\vec{F}\cdot d\vec{r}$$

מנגד, אם נקודות הקצה הפוכות:
$\gamma_1(a)=A=\gamma_2(b)$, $\gamma_1(b)=B=\gamma_2(a)$ אז עלינו להפוך את סימן האינטגרל

$$\int_{\gamma_1}\vec{F}\cdot d\vec{r}=-\int_{\gamma_2}\vec{F}\cdot d\vec{r}$$

הערה.

ניתן להכליל את האינטגרל הקווי מהסוג השני לשלושה מימדים, עם שדה $F:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$, כאשר:

$$F(x,y,z)=(P(x,y,z),Q(x,y,z),R(x,y,z))$$

ומסילה $\gamma:[a,b]\to\mathbb{R}^3$. נרשום אז:

$$\begin{aligned}\int_\gamma \vec{F}\cdot d\vec{r}&=\int_a^b \vec{F}(\gamma(t))\cdot\gamma'(t)dt\\&=\int_a^b (P(x,y,z),Q(x,y,z),R(x,y,z))\cdot(x',y',z')dt\\&=\int_a^b Pdx+Qdy+Rdz\end{aligned}$$

תרגיל 9.3.1.

חשבו $\int_C (ydx+xdy)$ כאשר C הינו המסלול $y=x^2$ עבור x בין 0 ל-1.

פתרון:

נסמן $\vec{F}=(P,Q)=(y,x)$, כלומר $P(x,y)=y,Q(x,y)=x$. נשתמש בפרמטריזציה $\gamma(t)=(t,t^2),t\in[0,1]$ אז בעזרת חישוב ישיר:

$$\begin{aligned}\int_C (ydx+xdy)&=\int_0^1 (P(x(t),y(t))x'(t)+Q(x(t),y(t))y'(t))\,dt=\int_0^1 (t^2\cdot 1+t\cdot 2t)\,dt\\&=\int_0^1 (3t^2)\,dt=\left.\frac{3t^3}{3}\right|_0^1=1\end{aligned}$$

תרגיל 9.3.2.

חשבו את העבודה של השדה הוקטורי $\vec{F}=(x^2,2y,z^2)$ לאורך הישר מ- $(1,2,0)$ ל-$(3,-1,1)$.

פתרון:

נמצא פרמטריזציה של העקום:

$$\gamma(t)=(1-t)(1,2,0)+t(3,-1,1)=(1+2t,2-3t,t),t\in[0,1]$$

אז האינטגרל הוא:

$$\begin{aligned}
\int_L \vec{F} d\vec{r} &= \int_L \left(x^2dx + 2ydy + z^2dz\right) = \begin{bmatrix} x(t) = 1+2t \Rightarrow dx = 2dt \\ y(t) = 2-3t \Rightarrow dy = -3dt \\ z(t) = t \Rightarrow dz = dt \end{bmatrix} \\
&= \int_0^1 \left((1+2t)^2 2 + 2(2-3t)(-3) + t^2\right) dt \\
&= \int_0^1 \left(2\left(1+4t+4t^2\right) - 6(2-3t) + t^2\right) dt \\
&= \int_0^1 \left(9t^2 + 26t - 10\right) dt = \left[3t^3 + 13t^2 - 10t\right]\Big|_0^1 = 6
\end{aligned}$$

9.4 שדה משמר

תזכורת.

נעסוק כעת בשדות משמרים, שמאפשרים הכללה של המשפט היסודי של החדו"א עבור הגרדיאנט. מדובר בשדות שהאינטגרל מהסוג שני שלהן אינו תלוי במסילה, אלא רק בנקודות הקצה.

נאמר אם כן ששדה וקטורי רציף $\vec{F}(x,y) = (P(x,y), Q(x,y))$, הינו <u>שדה משמר</u> בתחום D אם עבור כל זוג עקומים, $\gamma_1, \gamma_2 \subset D$ עם אותן נקודות קצה $\gamma_1(a) = \gamma_2(a)$, $\gamma_1(b) = \gamma_2(b)$ מתקיים:

$$\int_{\gamma_1} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{\gamma_2} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

במקרה זה, האינטגרל על גבי כל מסילה סגורה γ חייב להתאפס:

$$\oint_\gamma \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$$

אכן, נוכל להשוות עם אינטגרל על גבי מסילה והמסילה ההופכית (בה שינינו את סימן האינטגרל לפי נקודות הקצה.)

תזכורת.

ראינו בהרצאה את משפט הגרדיאנט ההפוך, הקובע כי שדה משמר בתחום מישורי קשיר הינו הגרדיאנט של פונקציה שהיא.

בניסוח מדוייק, קיימת פונקציה $U(x,y)$ גזירה ברציפות המקיימת:

$$\nabla U = \vec{F}$$

כלומר $\begin{pmatrix} \frac{\partial U}{\partial x} = P(x,y) \\ \frac{\partial U}{\partial y} = Q(x,y) \end{pmatrix}$.

כמו כן, ראינו את משפט הגרדיאנט, הקובע כי אם שדה $\vec{F}$ הוא אכן גרדיאנט של פונקציה גזירה ברציפות $\nabla U = \vec{F}$ אז האינטגרל מהסוג השני על גבי כל מסילה תלוי רק בנקודות הקצה A, B, ונתון על ידי

$$\int_\gamma \vec{F} \cdot d\vec{r} = U(B) - U(A).$$

בהשאלה ממונחים פיזיקליים , אנו נקרא ל U הפוטנציאל של F .
כמו באינטגרל הבלתי מסויים, הפוטנציאל מוגדר רק עד כדי קבוע: אם $\tilde{U}$ גם מקיים $\nabla\tilde{U} = \vec{F}$ אז $\tilde{U}(x,y) = U(x,y) + C$.

תזכורת.

ניתן מעט אינטואיציה מאחורי המשפטים. משפט הגרדיאנט הוא הסקה מהמשפט היסודי של החדו"א, כאשר אנו שמים לב מכלל ההרכבה כי

$$\frac{d}{dt}(U \circ \gamma)(t) = \nabla U(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) = F(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)$$

$$\int_\gamma \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_a^b F(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt = \int_a^b \frac{d}{dt}(U \circ \gamma)(t) dt = U(\gamma(b)) - U(\gamma(a)) = U(B) - U(A)$$

משפט הגרדיאנט ההפוך מעט מסובך יותר, כאשר הרעיון מאחוריו הוא שבאי תלות במסילה, נוכל לבחור נקודת בסיס $x_0 \in D$ ולהגדיר פונקציה $G : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$G(x) = \int_\gamma \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

כאשר γ היא איזשהי מסילה שמתחילה ב x_0 ומסתיימת ב x . כמו האינטגרל הבלתי מסויים במשפט היסודי, ניתן להראות כי G הינה הפוטנציאל הנדרש.

תזכורת.

אנו רואים תנאי הכרחי עבור שדה $\vec{F}$ להיות שדה משמר: בהכרח $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ שכן ממשפט הגרדיאנט קיים $\nabla U = f$ ואז

$$P_y = (U_x)_y = U_{xy} = U_{yx} = (U_y)_x = Q_x$$

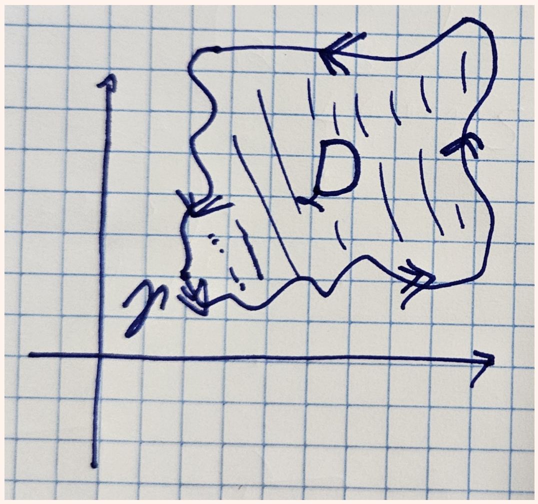
כאשר $U_{xy} = U_{yx}$ ממשפט שוורץ.

תזכורת.

למדנו בהרצאה על תחומים <u>פשוטי קשר</u> , בהם משפט הגרדיאנט מקבל צורה פשוטה אף יותר: התנאי ההכרחי $\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}$ הוא גם תנאי מספיק בשביל שדה להיות משמר. תחומים פשוטי קשר אלה הם תחומים <u>קשירים וללא חורים</u> .

בקשירות הכוונה כי ניתן לחבר במסילה כל שתי נקודות. מעט יותר קשה לנסח במדוייק חוסר חורים, וניתן איפיון בפסקה הבאה, אך ראשית הנה מקרה פרטי נוח:

בהינתן מסילה פשוטה וסגורה γ (נאמר חלקה למקוטעין) , היא חוסמת תחום סגור D. אז התחום D הינו פשוט קשר.



כעת עם דוגמה זו, הנה איפיון לתחומים פשוט קשר: תחום R הינו פשוט קשר אם לכל מסילה סגורה ופשוטה $\gamma\subset R$ המוכלת בו, התחום D שהיא חוסמת מוכל כולו גם כן $D\subset R$.

מבלי להיכנס למושג ההומוטופיה, חשיבות תחומים אלה היא שניתן לעשות דפורמציה רציפה בין כל שתי מסילות המוכלות בהן. בקורס פונקציות מרוכבות תראו כי האינטגרל הקווי של פונקציה הולומורפית בתחום פשוט קשר חייב להתאפס.

אם כן, בהינתן שדה $\vec{F}$ גזיר ברציפות בתחום פשוט קשר , אז $\vec{F}$ הינו שדה משמר אם ורק אם מתקיים $\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}$ (תנאי קושי-רימאן לגזירות מרוכבת.)

תרגיל 9.4.1.

הוכיחו כי לא קיימת פונקציה $f(x,y)$ גזירה ומוגדרת בכל $\mathbb{R}^2$, כך ש $\nabla f=\begin{pmatrix}-y\\x\end{pmatrix}$.

<u>פתרון:</u>

נגדיר את השדה $\vec{F}$ להיות $\vec{F}=(-y,x)=\nabla f$.

אם קיימת f כמו בשאלה, נקבל כי $\vec{F}$ צריך אז להיות שדה משמר.

נוכיח כי $\vec{F}$ אינו יכול להיות שדה משמר בשתי דרכים:

<u>דרך א':</u>

אם $\vec{F}$ שדה משמר בכל $\mathbb{R}^2$, שהוא תחום פשוט קשר אז מתקיים:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

אבל:

$$-1 = \frac{\partial P}{\partial y} \neq \frac{\partial Q}{\partial x} = 1$$

<u>דרך ב':</u>

אם $\vec{F}$ שדה משמר אז לכל מסילה סגורה γ מתקיים $\oint_\gamma \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$, ננסה על γ עיגול יחידה.

$$\oint_\gamma \vec{F} \cdot d\vec{r} = \oint_\gamma -ydx + xdy = \int_0^{2\pi} (-\sin(t))(-\sin(t)) + \cos(t)\cos(t)dt = 2\pi \neq 0$$

תרגיל 9.4.2.

מצאו את הפוטנציאל של הפונקציות הבאות:

1.
$$\vec{F} = (2xy + 3y, x^2 + 3x - 5)$$

2.
$$\vec{F} = \left(\frac{y(3x^3 - 1)}{x}, x^3 + \cos(y) - \ln(x)\right)$$

<u>פתרון:</u>

1. נחפש U כך ש $\nabla U = \vec{F}$, על ידי אינטגרציה של כל אחד מרכיבי $\vec{F}$. אז ראשית:

$$U = \int (2xy + 3y)\, dx = 2y \cdot \frac{x^2}{2} + 3xy + C_1(y)$$

$$U = \int (x^2 + 3x - 5)\, dy = yx^2 + 3xy - 5y + C_2(x).$$

בשביל להבין את הפונקציות $C_1(y), C_2(x)$ נשווה בין שני הביטויים.
נשים לב כי $C_1(y) = -5y, C_2(x) = 0$ פתרון, כלומר:

$$U(x, y) = yx^2 + 3xy - 5y + c$$

כאשר $c \in \mathbb{R}$ קבוע.

.2

$$U = \int \frac{y(3x^3-1)}{x}dx = \int \left(3yx^2 - \frac{y}{x}\right)dx = yx^3 - y\ln(x) + C_1(y)$$

$$U = \int \left(x^3 + \cos(y) - \ln(x)\right)dy = yx^3 + \sin(y) - y\ln(x) + C_2(x)$$

לאחר השוואת הפתרונות נראה כי $C_1(y) = \sin(y), C_2(x) = 0$, ולכן:

$$U(x,y) = yx^3 + \sin(y) - y\ln(x) + c$$

כאשר $c \in \mathbb{R}$ קבוע.

תרגיל 9.4.3.

חשבו את האינטגרל

$$\int\limits_{\gamma} \left(\frac{1}{x^2}\sin y \cdot e^{\frac{1}{x}} + y^3\right)dx + \left(3y^2x + \sin y - \cos y \cdot e^{\frac{1}{x}}\right)dy$$

כאשר γ היא מסילה המונחת על חלק מהמעגל $(x-2)^2 + y^2 = 1$, המתחילה בנקודה $(2,1)$ ונגמרת בנקודה $(2,-1)$, עם כיוון השעון.

<u>פתרון:</u>

כאשר אנו רואים אינטגרל מסובך כמו זה, מובן כי אין הרעיון לחשבו ישירות. במקום זאת, ננסה לבדוק אם השדה משמר. אם אכן כך - נוכל למצוא פוטנציאל עבורו, שיתן את האינטגרל באמצעות משפט הגרדיאנט.
אם כן נסמן $\vec{F} = (P,Q) = \left(\frac{1}{x^2}\sin y \cdot e^{\frac{1}{x}} + y^3, 3y^2x + \sin y - \cos y \cdot e^{\frac{1}{x}}\right)$ ונבדוק אם $P_y = Q_x$ בתחום פשוט קשר המכיל את המסילה בכדי לוודא כי-$\vec{F}$ שדה משמר:

$$P_y = \frac{d}{dy}\left(\frac{1}{x^2}\sin y \cdot e^{\frac{1}{x}} + y^3\right) = \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}\cos y + 3y^2$$

$$Q_x = \frac{d}{dx}\left(3y^2x + \sin y - \cos y \cdot e^{\frac{1}{x}}\right) = 3y^2 - \frac{-1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}\cos y$$

ואכן מתקיים השוויון הדרוש. נשים לב ש-$\vec{F}$ מוגדרת וגזירה ברציפות בתחום $x > 0$, שזהו תחום פשוט קשר, לכן $\vec{F}$ אכן שדה משמר.
אם כך, קיים לה פוטנציאל, ונמצא אותו כמו קודם:

$$\begin{aligned} U &= \int \frac{1}{x^2}\sin y \cdot e^{\frac{1}{x}} + y^3 dx \\ &= -\sin y \cdot e^{\frac{1}{x}} + y^3x + C(y) \end{aligned}$$

כעת, נגזור לפי y את שני האגפים ונשתמש בעובדה ש-$Q = U_y$:

$$3y^2x + \sin y - \cos y \cdot e^{\frac{1}{x}} = -\cos y \cdot e^{\frac{1}{x}} + 3y^2x + C'(y)$$

נשווה בין שני הביטויים ונקבל ש-$C'(y) = \sin y$, ולכן $C(y) = -\cos y$. משמע

$$U = -\sin y \cdot e^{\frac{1}{x}} + y^3x - \cos y$$

(שימו לב שהשמטנו קבוע ב-C, אך אין הוא ישנה, כי כעת נחסר את ערכי U בנקודות הקצה, והקבוע יצטמצם). כעת, לפי משפט הגרדיאנט:

$$\begin{aligned}\int_\gamma \vec{F} \cdot d\vec{r} =& U(2,-1) - U(2,1) \\ =& \left(-\sin(-1) \cdot e^{\frac{1}{2}} - 2 - \cos(-1)\right) - \left(-\sin(1) \cdot e^{\frac{1}{2}} + 2 - \cos 1\right) \\ =& 2\sin 1 \cdot e^{\frac{1}{2}} - 4\end{aligned}$$

$\square$

תרגול עשירי

10.1 משפט גרין

בתרגול קודם ראינו כיצד שדה משמר מאפשר חישוב קל של אינטגרל מהסוג השני על גבי מסילות.
כעת נראה משפט עבור שדות כלליים על גבי מסילות סגורות, הנותן קשר בין האינטגרל הקווי מהסוג השני לבין האינטגרל הכפול על גבי התחום אותו המסילה חוסמת.

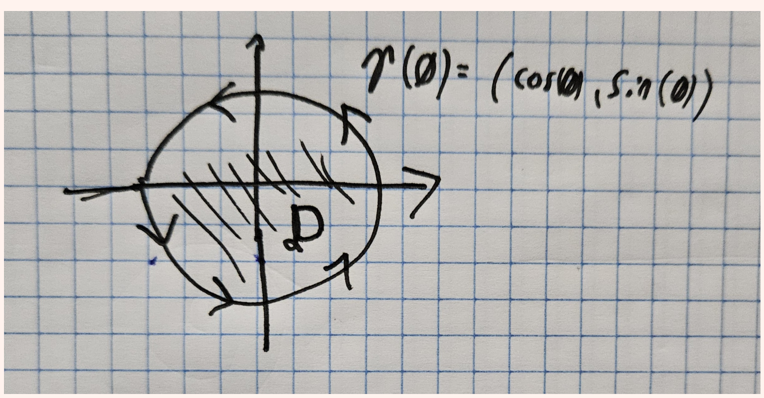
תזכורת.

תהי γ מסילה סגורה, פשוטה וגזירה למקוטעין. אם כן γ חוסמת תחום פשוט קשר D, $\gamma = \partial D$. יהי $\vec{F} = (P(x,y), Q(x,y)) : R \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ שדה וקטורי עם נגזרות חלקיות רציפות כאשר $D \subset R$. אם γ במגמה חיובית כלפי D אז

$$\oint_\gamma Pdx + Qdy = \iint_D \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} dxdy.$$

תזכורת.

המסילה $\gamma = \partial D$ במגמה חיובית כלפי התחום D שהיא חוסמת, אם כאשר אנו מתקדמים לאורך γ אז D תמיד נמצא משמאלנו. חשבו על הפרמטריזציה של המעגל $\gamma(\theta) = (\cos\theta, \sin\theta)$ כאשר עיגול היחידה נמצא תמיד משמאל לכיוון ההתקדמות של γ.



תזכורת.

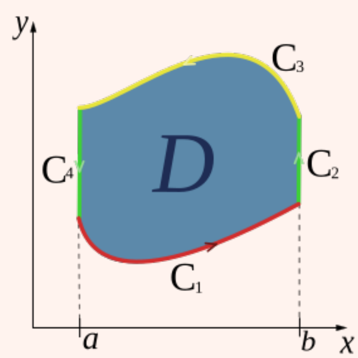
נשים לב למקרה בו מתקיים $Q_x = P_y$ בתחום הפשוט קשר D. אז משפט גרין נותן כי $\oint_\gamma \vec{F}\cdot d\vec{r} = 0$ כפי שכבר ידענו עבור שדות משמרים.

ניתן קצת אינטואיציה לנכונות משפט גרין: בתחום פשוט כלפי ציר x יש להראות את השיוויון

$$\oint_\gamma P dx = \iint_D (-P_y) dxdy.$$

כלומר האם מתקיים שיוויון

$$\oint_\gamma P dx = \int_a^b (\int_{C_1(x)}^{C_3(x)} -P_y dy) dx = \int_a^b -P(C_3(x) - C_1(x)) dx$$

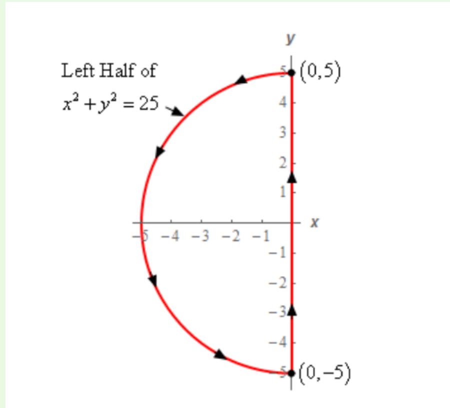


כאן סימן המינוס הוא לפי הכיוון ההפוך של C_3.
באופן דומה מוכיחים בתחום סימטרי כלפי ציר y כי

$$\oint_\gamma Q dy = \iint_D (Q_x) dxdy.$$

תרגיל 10.1.1.

חשבו את $\oint_\gamma y^3dx - x^3dy$, כאשר γ המסילה הבאה:



פתרון:
נשים לב כי השטח הכלוא ע"י γ הינו חצי מעגל, שקל לחשב עליו אינטגרל עם חילוף משתנים, אז נסמן אותו בD ונשתמש בגרין:

$$\oint_\gamma y^3dx - x^3dy = \iint_D \frac{\partial}{\partial x}(-x^3) - \frac{\partial}{\partial y}(y^3)dxdy = -\iint_D 3y^2 + 3x^2dxdy$$

נשתמש בהחלפת משתנים, ונקבל:

$$-\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}\int_0^5 3r^3drd\theta = \pi\int_0^5 3r^3dr = -\frac{3\pi}{4}\cdot 5^4$$

תרגיל 10.1.2.

חשבו את $\oint_\gamma \vec{F}\cdot d\vec{r}$, כאשר $\vec{F}(x,y) = (e^y, -\sin(\pi x))$, ו$\gamma$ המשולש העובר בין הקודקודים

$$(1,0),(0,1),(-1,0)$$

נגד כיוון השעון.

פתרון:
נשתמש במשפט גרין. אם $\gamma = \partial T$, אז:

$$\oint_\gamma \vec{F}\cdot d\vec{r} = \iint_T \frac{\partial}{\partial x}\left(-\sin(\pi x)\right) - \frac{\partial}{\partial y}e^y dxdy = \iint_T -\pi\cos(\pi x) - e^y dxdy$$

T הוא התחום הפשוט הבא:

$$T = \{(x,y) | y\in[0,1], y-1\le x\le 1-y\}$$

אז:

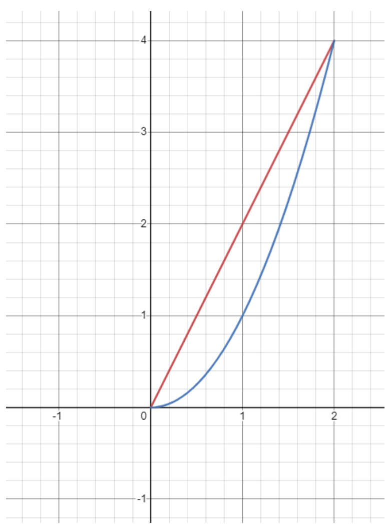
$$\begin{aligned}
\oint_\gamma \vec{F}\cdot d\vec{r} &= \int_0^1 \int_{y-1}^{1-y} -\pi\cos(\pi x) - e^y dxdy \\
&= \int_0^1 \left[-\sin(\pi x) - xe^y\right]\Big|_{x=y-1}^{x=1-y} dy \\
&= \int_0^1 \left[-\sin(\pi(1-y)) + \sin(\pi(y-1)) - (1-y)e^y + (y-1)e^y\right] dy \\
&= \int_0^1 \left[-2\sin(\pi(1-y)) - 2(1-y)e^y\right] dy \\
&= \ldots = 4 - 2e - \frac{4}{\pi}
\end{aligned}$$

תרגיל 10.1.3.

חשבו את העבודה שחלקיק עושה כאשר נע בקו ישר בין $(0,0)$ ל $(2,4)$, ואז חוזר לאורך $y=x^2$ לראשית, דרך שדה הכוח $\vec{F}(x,y) = (e^{x^{45}\sin x}, e^x)$.

פתרון:

נשרטט את המסילה.



נשים לב כי המסילה היא באוריינטציה שלילית, אז נסמן את המסילה עם אוריינטציה חיובית בγ, ונחשב את $-\oint_\gamma \vec{F}\cdot d\vec{r}$.

עפ"י משפט גרין:

$$-W = \oint_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_D \frac{\partial}{\partial x} e^x - \frac{\partial}{\partial y}(e^{x^{45}\sin x}) = \iint_D e^x$$

כאשר D התחום:

$$D = \{(x,y) | x \in [0,2] | x^2 < y < 2x\}$$

אז:

$$-W = \iint_D e^x dxdy = \int_0^2 \int_{x^2}^{2x} e^x dydx = \int_0^2 e^x \int_{x^2}^{2x} dydx = \int_0^2 e^x(x^2-2x)dx = ... = 4$$

כלומר $W = -4$.

תרגיל 10.1.4.

(תרגיל ממבחן).

חשבו את השטח החסום בעקום $t \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}\right]$, $C(t) = \left(\cos^2 t - \sin^2 t, \sin t + \cos t\right)$.

פתרון:

נבדוק מתי המסילה חותכת את עצמה

$$\left(\cos^2 t - \sin^2 t, \sin t + \cos t\right) = \left(\cos^2 s - \sin^2 s, \sin s + \cos s\right)$$
$$(\cos 2t, \sin t + \cos t) = (\cos 2s, \sin s + \cos s)$$
$$\begin{cases} \cos 2t & = \cos 2s \\ \sin t + \cos t & = \sin s + \cos s \end{cases}$$

מהמשוואה הראשונה נקבל:

$$\begin{aligned} \cos 2t &= \cos 2s \\ 2t &= \pm 2s + 2\pi k \\ t &= \pm s + \pi k \end{aligned}$$

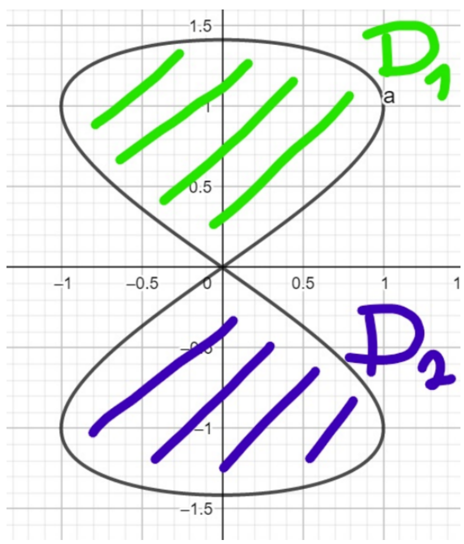
כאשר $k \in \{0,1\}$. מהמשוואה השנייה נקבל כי:

$$\begin{aligned} \sin t - \sin s &= \cos s - \cos t \\ \cos\left(\frac{t+s}{2}\right)\sin\left(\frac{t-s}{2}\right) &= -\sin\left(\frac{t+s}{2}\right)\sin\left(-\frac{t-s}{2}\right) \\ \cos\left(\frac{t+s}{2}\right) &= \sin\left(\frac{t+s}{2}\right) \\ \frac{t+s}{2} &= \frac{\pi}{4} + \pi k \\ t &= \frac{\pi}{2} + 2\pi k - s \end{aligned}$$

ביחד:

$$\begin{aligned}\pm s+\pi k_1 =&\frac{\pi}{2}+2\pi k_2-s\\ s\left(1\pm 1\right)=&\frac{\pi}{2}+\pi\left(2k_2-k_1\right)\\ s=&\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}k_3\\ s=&-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4},\frac{3}{4}\pi,\frac{7}{4}\pi\end{aligned}$$

אלה הן הנקודות החשודות כחיתוך עצמי, כאשר לקחנו את האפשרויות הרלוונטיות לתחום שלנו.
עבור $s=\frac{\pi}{4}$, אז מהמשוואה השנייה $t=\frac{\pi}{4}$ גם כן, ואז זהו אינו חיתוך עצמי. עבור $s=-\frac{\pi}{4},\frac{3}{4}\pi,\frac{7}{4}\pi$ אנו רואים כי המסילה עוברת בשלושתן בראשית. עבור $t>\frac{7\pi}{4}$ המסילה שוב חוזרת על עצמה (מחזוריות 2π) ואם כן החיתוך העצמי קורה רק בזמן $\frac{3}{4}\pi$ בראשית. אנו רואים כי הוספת זמן π משקף מטה את המסילה ($\sin(x)+\cos(x)=\sqrt{2}\sin(t+\frac{\pi}{4})$, $\sin(x+\pi)=-\sin(x)$). בזמן $-\frac{\pi}{4}\leq t\leq\frac{3}{4}\pi$ היא מעל ציר y, ואז כאמור בזמן $\frac{3}{4}\pi\leq t\leq\frac{7}{4}\pi$ היא מתחתיו.
נסיק כי צריך לפצל את חישוב לשני חלקים: כאשר $t\in\left[-\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4}\right]$ וכאשר $t\in\left[\frac{3\pi}{4},\frac{7\pi}{4}\right]$. נסמן את העקומות המתאימות ב-C_1,C_2, השטח הרצוי ב-D, ואת שני השטחים המתאימים ב-D_1 ו-D_2 בהתאמה.



ניזכר שהשטח נתון ע"י $\text{Area}\left(D\right)=\int_D 1dA$. אם נבחר שדה וקטורי $F=\left(P,Q\right)$ כך ש-$Q_x-P_y=1$ נוכל לקבל:

$$A\left(D_i\right)=\int\limits_{D_i}1dA=\iint_{D_i}\left(Q_x-P_y\right)dA=\int\limits_{C_i}Pdx+Qdy$$

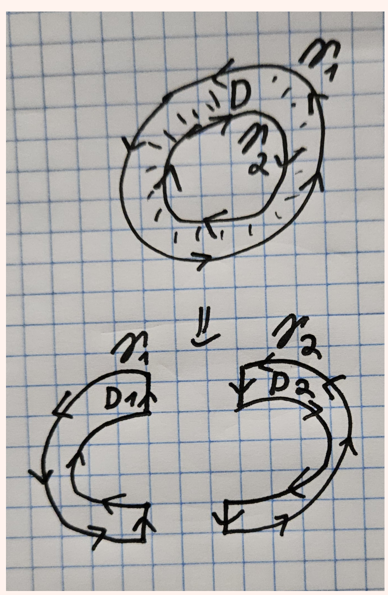
כאשר C היא המסילה התוחמת את D. לכן, נוכל לבחור $F(x,y)=(-y,0)$ למשל, ולקבל:

$$\begin{aligned}
A(D_1) &= \int\limits_{C_1} -ydx+0dy = \int\limits_{C_1} -ydx = \int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} (\sin t+\cos t)\, 2\sin(2t)\, dt \\
&= 4\int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} (\sin t+\cos t)\sin t\cos t dt = 4\int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \sin^2 t\cos t dt + 4\int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \cos^2 t\sin t dt \\
&= \frac{4}{3}\left[\sin^3 t\right]_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} + \frac{4}{3}\left[-\cos^3 t\right]_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} = \\
&= \frac{4}{3}\left[\sin^3\left(\frac{3\pi}{4}\right) - \sin^3\left(-\frac{\pi}{4}\right) - \cos^3\left(\frac{3\pi}{4}\right) + \cos^3\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right] \\
&= \frac{4}{3}\left[\frac{1}{2\sqrt{2}} + \frac{1}{2\sqrt{2}} + \frac{1}{2\sqrt{2}} + \frac{1}{2\sqrt{2}}\right] = \frac{8}{3\sqrt{2}}
\end{aligned}$$

נשים לב ש-$\text{Area}(D_1)=\text{Area}(D_2)$, ולכן $\text{Area}(D)=2\,\text{Area}(D_1)=\frac{16}{3\sqrt{2}}$.

תזכורת.

אפשר גם להיעזר במשפט גרין בתחומים ששפתן לאו דווקא קשירה, אלא איחוד סופי של מסילות סגורות (למשל טבעת.)
מחברים את מסילות השפה כמו באיור מטה, ומטפלים בכמה תחומים שנוצרו.



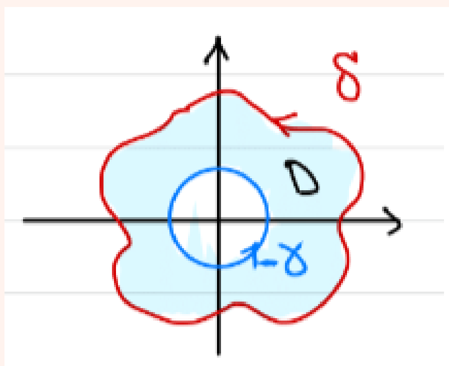
$$\iint_D Q_x - P_y dxdy = \iint_{D_1} Q_x - P_y dxdy + \iint_{D_2} Q_x - P_y dxdy =$$
$$\oint_{\gamma_1} Pdx + Qdy + \oint_{\gamma_2} Pdx + Qdy$$

תזכורת.

שימוש אפשרי של הבנייה האחרונה הוא טיפול בשדות משמרים סינגולריים. נניח ויש לנו שדה המקיים

$$Pdx + Qdy = 0$$

אך בתחום שאינו פשוט קשר (לדוגמא, אם השדה אינו מוגדר בראשית, אלא רק ב $\mathbb{R}\backslash\{0\}$). כפי שעשינו בהרצאה, נבחר שתי מסילות כלשהן סביב הראשית.



משפט גרין נותן כי

$$\oint_\delta Pdx + Qdy - \oint_\gamma Pdx + Qdy = \iint_D Q_x - P_y dxdy = \iint_D 0dxdy = 0$$

משמע

$$\oint_\delta Pdx + Qdy = \oint_\gamma Pdx + Qdy$$

כאשר γ גם היא עם אורנטצייה נגד כיוון השעון . (כאמור דרשנו קודם כי γ תהיה עם כיוון השעון בשביל להיות חיובית ביחס אל D, ומכאן סימן המינוס למעלה.)
אם כן במקרה זה, מפני שבחירת המסילה אינה משפיע על ערך האינטגרל, עלינו לבחור מסילה עליה יהיה קל לחשבו. זאת נראה בדוגמה הבאה.

תרגיל 10.1.5.

(תרגיל ממבחן).

נתון השדה הוקטורי $\vec{F} = \left(\frac{4x-y}{4(x^2+y^2)}, \frac{x+4y}{4(x^2+y^2)}\right)$. חשבו את $\int_C \vec{F} d\vec{r}$ כאשר:

$$C = \left\{\frac{x^2}{100} + \frac{y}{81}^2 = 1\right\}$$

והמסילות מכוונות כנגד כיוון השעון.

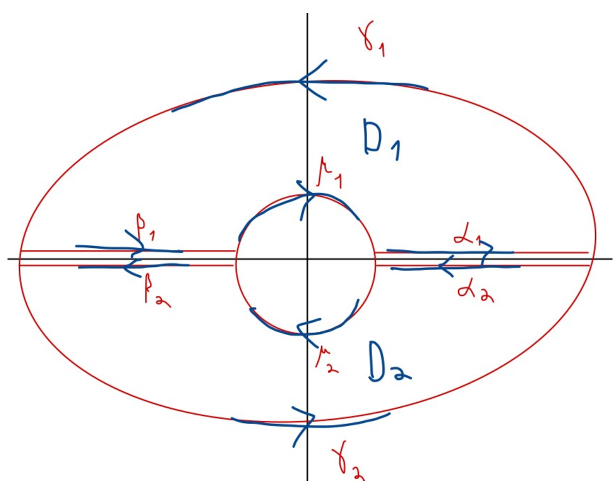
פתרון:

תחילה נשים לב כי מתקיים:

$$P_y = \frac{-4\left(x^2+y^2\right) - (4x-y)\cdot 8y}{\left(4\left(x^2+y^2\right)\right)^2} = \frac{y^2-x^2-8xy}{4\left(x^2+y^2\right)^2}$$
$$Q_x = \frac{4\left(x^2+y^2\right) - (x+4y)\cdot 8x}{\left(4\left(x^2+y^2\right)\right)^2} = \frac{y^2-x^2-8xy}{4\left(x^2+y^2\right)^2}$$

כלומר $P_y = Q_x$. משמע $\vec{F}$ משמר בכל נקודה שאינה $(0,0)$. נמחיש שנית את ההסבר מקודם, בו נוכל לבחור מסילה נוחה לבצע עליה אינטגרל קווי:

נסתכל על אליפסה שבתוכה מעגל יחידה. נגדיר את התחומים D_1, D_2 יחד עם המסילות והאוריינטציות שבציור.



אז נקבל כי:

$$\iint_{D_1} \left(Q_x - P_y\right) dxdy = \iint_{D_2} \left(Q_x - P_y\right) dxdy = 0.$$

האינטגרל על β_1 מתבטל עם האינטגרל על β_2 (שכן הם זהים פרט לאורנטציות הפוכות) , וכך גם האינטגרלים על α_1, α_2.

על כן:

$$\oint_{\partial D_1} \vec{F}\cdot d\vec{r} + \oint_{\partial D_2} \vec{F}\cdot d\vec{r} = 0 \implies \oint_{\gamma_1,\gamma_2} \vec{F}\cdot d\vec{r} = -\oint_{\mu_1,\mu_2} \vec{F}\cdot d\vec{r}$$

ונוכל לבצע את האינטגרציה על איזו מסילה שנוחה לנו.
יהיה לנו קל לחשב את האינטגרל על מעגל היחידה C'. נשים לב לכיוון של המעגל. הפרמטריזציה המתאימה היא $(\cos(t), -\sin(t)), t\in[0,2\pi]$.

$$\begin{Bmatrix} x=\cos t \Rightarrow & dx = -\sin t dt \\ y = -\sin t \Rightarrow & dy = -\cos t dt \end{Bmatrix}$$

$$\begin{aligned} -\int_{C'} \vec{F} d\vec{r} &= -\int_{C'} \left(\frac{4x-y}{4\left(x^2+y^2\right)}dx + \frac{x+4y}{4\left(x^2+y^2\right)}dy\right) \\ &= -\int_0^{2\pi} \left(\frac{4\cos t+\sin t}{4}\left(-\sin t\right)dt + \frac{\cos t - 4\sin t}{4}(-\cos t)dt\right) \\ &= \frac{1}{4}\int_0^{2\pi} dt = \frac{1}{4}\cdot 2\pi = \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

10.2 פרמטריזציה של משטח

כעת נעשה הכללה של עקומים במישור $\gamma:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^2$ אל משטחים במרחב $\vec{S}:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$ כמו למשל שפת הספירה. נגדיר אינטגרלים אנלוגיים לאינטגרל הקווי מסדר ראשון ושני, ונראה את משפט גאוס שמקביל אל משפט גרין. מפני שהמושגים והאינטואיציה דומים כמו עבור עקומות, לא נכביר בהסברים.

תזכורת.

הצגה פרמטרית של משטח ב$\mathbb{R}^3$ הינה מפה רציפה:

$$\vec{S}: D\subset\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3.$$

משטח הוא תמונה של פרמטריזציה כזו, כאשר ישנן פרמטריזציות אפשריות נוספות. אנו נסמן

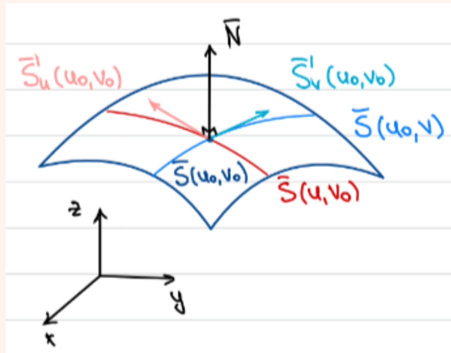
$$\vec{S}(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v)).$$

על גבי נקודה על המשטח $(x(u_0,v_0), y(u_0,v_0), z(u_0,v_0))$ אנו מגדירים את הנורמל למשטח על ידי:

$$\vec{N} = \frac{\partial\vec{S}}{\partial u}(u_0,v_0)\times\frac{\partial\vec{S}}{\partial v}(u_0,v_0) = \det\begin{pmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{pmatrix}$$

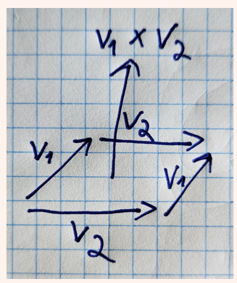
כאשר

$$\hat{i} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\ \hat{j} = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\ \hat{k} = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}.$$



תזכורת.

כפי שמכירים מפיזיקה, המכפלה הווקטורית $v_1 \times v_2$ נותנת וקטור שלישי הניצב אל v_1, v_2 וגודלו כגודל המקבילית שצלעותיה הוקטורים v_1, v_2.



(כל זה בהנחה כי v_1, v_2 אינם מקבילים.)
עבור פרמטריזציה $\vec{S}$, אנו שמים לב כי $\frac{\partial \vec{S}}{\partial u}(u_0, v_0), \frac{\partial \vec{S}}{\partial v}(u_0, v_0)$ הינם ווקטורים משיקים למשטח בנקודה $\vec{S}(u_0, v_0)$. שני וקטורים אלה פורסים את המישור המשיק בנקודה למשטח, ועל כן $\vec{N}$ פונה 'החוצה' מן המשטח.
בהנחה כי $\vec{S}$ עם נגזרות חלקיות רציפות, אז $\left\|\vec{N}\right\|$ נותן שערוך שטח של $\vec{S}$ בסביבה קטנה של הנקודה (שטח המקבילית של שני המשיקים).

תזכורת.

אם $\vec{S} : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ פרמטריזציה חלקה (גזירה ברציפות כך ש $S_u \times S_v \neq 0$) אז שטח הפנים של המשטח נתון על ידי:

$$A = \iint_D \left\|\vec{N}\right\| dudv = \iint_D \left\| \frac{\partial \vec{S}}{\partial u}(u, v) \times \frac{\partial \vec{S}}{\partial v}(u, v) \right\| dudv.$$

כמו עם אורך מסילה, זה נותן בדיוק שיערוך לסכומי רימאן

$$\sum_{1\leq i,j\leq n}\frac{1}{n^2}\text{Area}(\vec{S}(\square_{ij}))\approx_{n\to\infty}\sum_{1\leq i,j\leq n}\left\|\vec{N}(\vec{x}_{ij})\right\|$$

כאשר $\square_{ij}\subset[0,1]^2$ הוא הפיקסל עם קודקודים

$$(\frac{i}{n},\frac{j}{n}),(\frac{i+1}{n},\frac{j}{n}),(\frac{i}{n},\frac{j+1}{n}),(\frac{i+1}{n},\frac{j+1}{n})$$

וכאשר $\vec{x}_{ij}\in\square_{ij}$ דגימות.

בדומה לנוסחאת אורך מסילה, הפרמטריזציה אינה משפיע על שטח הפנים. זוהי אפליקציה של נוסחאת החלפת משתנים.

הערה.

אם S הוא גרף של פונקציה, כלומר $z=f(x,y)$, אז $\vec{S}(u,v)=(u,v,f(u,v))$ פרמטריזציה, ואז יתקבל:

$$\|N\|=\left\|\text{det}\begin{pmatrix}\hat{i}&\hat{j}&\hat{k}\\1&0&f_u\\0&1&f_v\end{pmatrix}\right\|=\left\|\begin{pmatrix}-f_u\\-f_v\\1\end{pmatrix}\right\|=\sqrt{1+f_u^2+f_v^2}$$

לפרמטריזציה כזאת נקרא <u>פרמטריזציה טבעית</u>.

10.3 אינטגרל משטחי מסוג ראשון

נתחיל באינטגרל המשטחי מהסוג הראשון, עבור פונקציות $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$. הוא הכללה ישירה של האינטגרל הקווי מהסוג הראשון.

תזכורת.

נתונים S משטח דו-צדדי, חלק, ופונקציה רציפה $f:R\subset\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$, כאשר R מכיל את המשטח. אז <u>האינטגרל המשטחי מסוג ראשון</u> של f הוא

$$\iint_S f(x,y,z)dS=\iint_D f(S(u,v))\|S_u(u,v)\times S_v(u,v)\|dudv$$

הערה.

אם S משטח סגור נסמן $\oiint_S$, בקורס שלנו נתייחס למשטח סגור כמשטח שהוא סגור פרט לקבוצה משטח אפס.

הערה.

במשטח 'דו-צדדי' הכוונה כי לאורך כל מסילה על המשטח, הנורמל תמיד מכוון החוצה (או תמיד פנימה). בקורס שלנו נתעסק רק במשטחים דו-צדדיים.

תרגיל 10.3.1.

חשבון את שטח הפנים של המשטח הנתון ע"י הפרמטריזציה: $\begin{cases} x = t\cos\varphi \\ y = t\sin\varphi \\ z = t \end{cases}$

כאשר $0 \le t \le h, 0 \le \varphi \le 2\pi$.

פתרון:

נפתור את התרגיל בשתי דרכים:

1. נשתמש בפרמטריזציה הנתונה

$$\vec{r}\left(t,\varphi\right) = \left(t\cos\varphi, t\sin\varphi, t\right)$$

$$\begin{aligned} ||\vec{r_t} \times \vec{r_\varphi}|| &= \left\| \begin{array}{ccc} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ x_t & y_t & z_t \\ x_\varphi & y_\varphi & z_\varphi \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{ccc} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \cos\varphi & \sin\varphi & 1 \\ -t\sin\varphi & t\cos\varphi & 0 \end{array} \right\| \\ &= ||(-t\cos\varphi, -t\sin\varphi, t)|| = \sqrt{\left(-t\cos\varphi\right)^2 + \left(-t\sin\varphi\right)^2 + t^2} = \sqrt{2}t. \end{aligned}$$

ולכן:

$$\text{Area}(S) = \iint_S 1dS = \int_0^h \int_0^{2\pi} \sqrt{2}td\varphi dt = \sqrt{2}\left(2\pi\right)\left(\frac{t^2}{2}\Big|_0^h\right) = \sqrt{2}\pi h^2.$$

2. נשים לב כי מדובר בחרוט, שהוא גרף של פונקציה:

$$z = \sqrt{x^2+y^2} := f(x,y).$$

אז נוכל לחשב את הנורמל בקלות:

$$f_x = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, f_y = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

כאשר התחום שלנו הוא $x^2+y^2 \le h$. אז:

$$\text{Area}(S) = \iint_{u^2+v^2\le h} \sqrt{1 + \left(\frac{u}{\sqrt{v^2+u^2}}\right)^2 + \left(\frac{v}{\sqrt{u^2+v^2}}\right)^2} dudv = \sqrt{2} \iint_{u^2+v^2\le h} dudv = \sqrt{2}\pi h^2.$$

תרגיל 10.3.2.

חשבון את שטח הפנים של המשטח הנוצר מחיתוך מעטפת החרוט $z = \sqrt{x^2+y^2}$ הכלוא בגליל $x^2+y^2=2x$, ב-$z \geq 0$.

פתרון:

נשים לב כי $x^2+y^2=2x \Leftarrow (x-1)^2+y^2=1$. בעצם עלינו לחשב את שטח הפנים של חלק החרוט הנמצא בדיוק מעל המעגל סביב $(1,0)$, ברדיוס אחד במישור xy.
נעבור להצגה גרפית: $z=\sqrt{x^2+y^2}$, ואילו המשוואה $(x-1)^2+y^2=1$ מגדירה לנו את תחום האינטגרציה במישור. אם S המשטח שלנו, אז:

$$\begin{aligned}
\text{Area}(S) &= \\
&= \iint_S 1ds = \iint_D \left\|\vec{N}\right\| dxdy = \iint_D \sqrt{\left((-f_x)^2+(-f_y)^2+1\right)}dxdy \\
&= \iint_D \sqrt{\left(\left(-\frac{2x}{2\sqrt{x^2+y^2}}\right)^2+\left(-\frac{2y}{2\sqrt{x^2+y^2}}\right)^2+1\right)}dxdy \\
&= \iint_D \sqrt{\left(\frac{x^2}{x^2+y^2}+\frac{y^2}{x^2+y^2}+1\right)}dxdy \\
&= \iint_D \sqrt{2}dxdy = \sqrt{2}\iint_D dxdy \overset{(*)}{=} \sqrt{2}\cdot\pi
\end{aligned}$$

$(*)$ האינטגרל $\iint_D dxdy$ שווה לשטח מעגל ברדיוס 1 .

תרגיל 10.3.3.

שאלה ממבחן.
חשבון את שטח הפנים של הכיפה $S=\left\{(x,y,z)\left|x^2+y^2+z^2=1, z\geq \frac{1}{2}\right.\right\}$.

פתרון:

נשתמש בפרמטריזציה כדורית שכן מדובר בחלק מכדור:

$$\vec{r}(\theta,\varphi)=(\sin\varphi\cos\theta,\sin\varphi\sin\theta,\cos\varphi)\ ,\ 0\leq\theta\leq 2\pi, 0\leq\varphi\leq ?$$

ננסה להבין מהו גבול האינטגרציה העליון של φ, ואכן מתקיים:

$$\cos\varphi = z \geq \frac{1}{2} = \cos\frac{\pi}{3}$$

לכן, $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{3}$.
נחשב את אלמנט השטח:

$$||\vec{r_\theta} \times \vec{r_\varphi}|| = \left\| \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ x_\theta & y_\theta & z_\theta \\ x_\varphi & y_\varphi & z_\varphi \end{vmatrix} \right\| = \left\| \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ -\sin\varphi\sin\theta & \sin\varphi\cos\theta & 0 \\ \cos\varphi\cos\theta & \cos\varphi\sin\theta & -\sin\varphi \end{vmatrix} \right\| =$$

$$\left\|\left(-\sin^2\varphi\cos\theta, -\sin^2\varphi\sin\theta, -\sin\varphi\sin\theta\cos\varphi\sin\theta - \sin\varphi\cos\theta\cos\varphi\cos\theta\right)\right\| =$$

$$\left\|\left(-\sin^2\varphi\cos\theta, -\sin^2\varphi\sin\theta, -\sin\varphi\sin^2\theta\cos\varphi - \sin\varphi\cos^2\theta\cos\varphi\right)\right\|$$

$$\left\|\left(-\sin^2\varphi\cos\theta, -\sin^2\varphi\sin\theta, -\sin\varphi\cos\varphi\right)\right\| =$$

$$\sqrt{\left(-\sin^2\varphi\cos\theta\right)^2 + \left(-\sin^2\varphi\sin\theta\right)^2 + (-\sin\varphi\cos\varphi)^2}$$

$$\sqrt{\sin^4\varphi\cos^2\theta + \sin^4\varphi\sin^2\theta + \sin^2\varphi\cos^2\varphi} =$$

$$\sqrt{\sin^4\varphi + \sin^2\varphi\cos^2\varphi}$$

$$= |\sin\varphi| \overset{(*)}{=} \sin\varphi$$

כאשר במעבר האחרון אנחנו משתמשים בזה ש- $z \geq 0$ לכן $0 \leq \varphi \leq \pi/2$ ובפרט בתחום זה $\sin\varphi \geq 0$.
נחשב :

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin\varphi d\varphi d\theta = 2\pi\left(-\cos\varphi|_0^{\frac{\pi}{3}}\right) \quad = \quad 2\pi\left(-\cos\frac{\pi}{3} + \cos 0\right) = 2\pi\left(-\frac{1}{2} + 1\right) = \pi$$

הערה.

משום ש- $z \geq \frac{1}{2}$, היינו יכולים להציג את המשטח ע"י גרף הפונקציה $z = \sqrt{1-x^2-y^2}$, ולהשתמש בפרמטריזציה טבעית:

$$\vec{S}(x,y) = \left(x, y, \sqrt{1-x^2-y^2}\right)$$

$$\vec{N} = (-f_x, -f_y, 1)$$

במקרה זה, היטל המשטח על המישור xy נקבע ע"י :

$$x^2 + y^2 = 1 - z^2 \leq 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{4}$$

כלומר, $\Delta = \left\{x^2 + y^2 \leq \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2\right\}$. את האינטגרל הכפול המתקבל ניתן לפתור ע"י קואורדינטות פולריות.

תרגיל 10.3.4.

חשבו את $\iint_S x^2 dS$, כאשר $S=\left\{(x,y,z)\,|x^2+y^2=a^2, 0\le z\le 1\right\}$ כאשר $a>0$.

פתרון:

S הינו גליל שרדיוס בסיסו הינו a, ואורכו 1 (בלי המכסה העליון ובלי המכסה התחתון).
נשתמש בפרמטריזציה הבאה :

$$\vec{r}\,(\theta,z)=(a\cos\theta, a\sin\theta, z)\ ,\ 0\le\theta\le 2\pi, 0\le z\le 1$$

נחשב :

$$\begin{aligned}||\vec{r_\theta}\times\vec{r_z}|| &= \left\|\begin{vmatrix}\hat{i} & \hat{j} & \hat{k}\\ x_\theta & y_\theta & z_\theta\\ x_z & y_z & z_z\end{vmatrix}\right\| = \left\|\begin{vmatrix}\hat{i} & \hat{j} & \hat{k}\\ -a\sin\theta & a\cos\theta & 0\\ 0 & 0 & 1\end{vmatrix}\right\| \\ &= ||(a\cos\theta, a\sin\theta, 0)|| = \sqrt{(a\cos\theta)^2+(a\sin\theta)^2+(0)^2}=a\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi}\int_0^1 a^2\cos^2\theta\cdot adzd\theta &= a^3\int_0^{2\pi}\cos^2\theta\cdot 1d\theta \\ &\overset{(*)}{=} \frac{a^3}{2}\int_0^{2\pi}(1+\cos 2\theta)\,d\theta \\ &= \frac{a^3}{2}\left(2\pi+\left(\frac{\sin 2\theta}{2}|_0^{2\pi}\right)\right)=\frac{a^3}{2}(2\pi)=a^3\pi\end{aligned}$$

$(*)\ \cos^2\theta=\dfrac{1+\cos 2\theta}{2}$.

תרגיל 10.3.5.

חשבו את שטח המשטח $z=x^2+y^2$ הנמצא מעל מעגל ברדיוס 1 סביב ראשית הצירים במישור xy.

פתרון:

גרף הפונקציה $z=x^2+y^2$ הינו פרבולואיד. באופן כללי, "הנמצא מעל מעגל ברדיוס 1" שקול ללחתוך את הפרבולואיד עם הגליל $x^2+y^2=1$.
נשתמש בהצגה גרפית:

$$\vec{r}\,(x,y)=(x,y,x^2+y^2)\ ,\ x^2+y^2\le 1$$

$$||\vec{r_x}\times\vec{r_y}||=\sqrt{(-f_x)^2+(-f_y)^2+1}=\sqrt{(-2x)^2+(-2y)^2+1}=\sqrt{4(x^2+y^2)+1}$$

שימו לב שקיבלנו אינטגרל כפול על עיגול, לכן סביר לבצע החלפה פולרית. ההחלפה הזאת למעשה שקולה לפרמטריזציה $r(\rho,\theta)=(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta,\rho^2)$ כאשר $0\le\rho\le1$, $0\le\theta\le2\pi$.

$$\begin{aligned}\iint_{x^2+y^2\le1}\sqrt{4\left(x^2+y^2\right)+1}dxdy &= \left\{\begin{array}{lll} x=r\cos\theta & 0\le\theta\le2\pi & |J|=r \\ y=r\sin\theta & 0\le r\le1 & \end{array}\right\} \\ &= \int_0^{2\pi}\int_0^1\sqrt{4r^2+1}rdrd\theta \\ &= \left\{\begin{array}{ll} t=4r^2+1 & r=0\Rightarrow t=1 \\ dt=8rdr & r=1\Rightarrow t=5 \end{array}\right\} \\ &= \frac{1}{8}\int_0^{2\pi}\int_1^5\sqrt{t}dt=\frac{1}{8}\int_0^{2\pi}\left(\frac{2}{3}(t)^{\frac{3}{2}}|_1^5\right) \\ &= \frac{1}{8}\cdot2\pi\cdot\frac{2}{3}\left(5^{\frac{3}{2}}-1\right)=\frac{\pi}{6}\left(5^{\frac{3}{2}}-1\right)\end{aligned}$$

תרגיל 10.3.6.

חשבו את שטח הפנים של חלק המישור $x+2y+3z=6$ החסום בין המישורים $x=0, y=0, z=0$.

פתרון:

נשים לב כי ניתן להציג את המשטח בצורה גרפית:

$$3z=6-x-2y \implies z=f(x,y)=2-\frac{x}{3}-\frac{2y}{3}$$

נשתמש בנוסחא עבר הצגה גרפית ונקבל :

$$\begin{aligned}\iint_\Delta\sqrt{\left(f_x\right)^2+\left(f_y\right)^2+1}dxdy &= \iint_\Delta\sqrt{\left(\frac{1}{3}\right)^2+\left(\frac{2}{3}\right)^2+1}dxdy \\ &= \iint_\Delta\sqrt{\frac{1}{9}+\frac{4}{9}+1}dxdy \\ &= \sqrt{\frac{14}{9}}\iint_\Delta dxdy \overset{(*)}{=} 9\cdot\sqrt{\frac{14}{9}}\end{aligned}$$

$(*)$ Δ הינו ההיטל של המשטח על המישור xy, הביטוי $\iint_\Delta dxdy$ שווה לשטח ההיטל במישור, שהוא משולש ישר זווית עם ניצב אחד באורך 3 וניצב אחד בעל אורך 6 , ולכן שטחו שווה ל-$9=\frac{6\cdot3}{2}$.

תרגיל 10.3.7.

חשבו $\iint_S z^2 dS$, כאשר $S = \{(x,y,z) \,|x^2+y^2+z^2=1\}$.

פתרון:

ניתן להציג את המשטח בצורה גרפית ע"י $z = \pm\sqrt{1-x^2-y^2}$, במקרה זה היינו מפרידים את התחום לשני חלקים, כאשר בחלק אחד היינו מחשבים את האינטגרל בחצי העליון של הספירה $z = \sqrt{1-x^2-y^2}$, ובחלק השני היינו מחשבים את האינטגרל על החצי התחתון של הספירה $z = -\sqrt{1-x^2-y^2}$.
בכדי לא לחלק את האינטגרל נשתמש בפרמטריזציה הבאה:

$$\vec{r}\,(\varphi,\theta) = (\sin\varphi\cos\theta, \sin\varphi\sin\theta, \cos\varphi)\ ,\ 0\le\theta\le 2\pi, 0\le\varphi\le\pi$$

(כאן $\rho = 1$ קבוע ואינו משתנה, שכן מדובר רק על שפת הכדור). נחשב :

$$\begin{gathered}
\|\vec{r_\theta}\times\vec{r_\varphi}\| = \left\|\begin{vmatrix}\hat{i} & \hat{j} & \hat{k}\\ x_\theta & y_\theta & z_\theta\\ x_\varphi & y_\varphi & z_\varphi\end{vmatrix}\right\| = \left\|\begin{vmatrix}\hat{i} & \hat{j} & \hat{k}\\ -\sin\varphi\sin\theta & \sin\varphi\cos\theta & 0\\ \cos\varphi\cos\theta & \cos\varphi\sin\theta & -\sin\varphi\end{vmatrix}\right\| = \\
\left\|\left(-\sin^2\varphi\cos\theta, -\sin^2\varphi\sin\theta, -\sin\varphi\sin\theta\cos\varphi\sin\theta - \sin\varphi\cos\theta\cos\varphi\cos\theta\right)\right\| = \\
\left\|\left(-\sin^2\varphi\cos\theta, -\sin^2\varphi\sin\theta, -\sin\varphi\sin^2\theta\cos\varphi - \sin\varphi\cos^2\theta\cos\varphi\right)\right\| \\
\left\|\left(-\sin^2\varphi\cos\theta, -\sin^2\varphi\sin\theta, -\sin\varphi\cos\varphi\right)\right\| = \\
\sqrt{\left(-\sin^2\varphi\cos\theta\right)^2 + \left(-\sin^2\varphi\sin\theta\right)^2 + (-\sin\varphi\cos\varphi)^2} \\
\sqrt{\sin^4\varphi\cos^2\theta + \sin^4\varphi\sin\theta^2 + \sin^2\varphi\cos^2\varphi} = \\
\sqrt{\sin^4\varphi + \sin^2\varphi\cos^2\varphi} \\
= |\sin\varphi| \overset{(*)}{=} \sin\varphi
\end{gathered}$$

$(*)$ $\sin\varphi \ge 0$ עבור $0\le\varphi\le\pi$.

$$\begin{aligned}
\iint_S z^2 dS &= \iint_\Delta f\left(x\left(\theta,\varphi\right), y\left(\theta,\varphi\right), z\left(\theta,\varphi\right)\right)\|\vec{r_\theta}\times\vec{r_\varphi}\|\, d\theta d\varphi = \\
\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\cos^2\varphi\sin\varphi d\varphi d\theta &= \left\{\begin{array}{cc} t=\cos\varphi & \varphi=0\Rightarrow t=1\\ dt=-\sin\varphi d\varphi & \varphi=\pi\Rightarrow t=-1\end{array}\right\} \\
&= -\int_0^{2\pi}\int_1^{-1} t^2 dt d\theta = \int_0^{2\pi}\int_{-1}^{1} t^2 dt d\theta \\
&= \int_0^{2\pi}\left(\frac{t^3}{3}\bigg|_{-1}^{1}\right)d\theta = \int_0^{2\pi}\left(\frac{1}{3}-\left(-\frac{1}{3}\right)\right)d\theta = \frac{4\pi}{3}
\end{aligned}$$

תרגול אחד עשר

11.1 אינטגרל משטחי מסוג שני

כעת נראה את ההכללה של האינטגרל הקווי מהסוג השני עבור משטחים. המקבילה של מושג ה'עבודה' נקראת 'שטף' (גם כן בהשאלה ממושגי הפיזיקה.)

תזכורת.

אם S משטח חלק, ו-$\vec{F}:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ שדה וקטורי רציף, האינטגרל המשטחי מהסוג השני של $\vec{F}$ הינו

$$\iint_S \vec{F}\cdot d\vec{s} = \iint_D \vec{F}(S(u,v))\cdot \underbrace{(S_u\times S_v)}_{\vec{N}}\,dudv.$$

נשים לב לשוויון הבא:

$$\vec{F}(S(u,v))\cdot \underbrace{(S_u\times S_v)}_{\vec{N}} = \det\begin{pmatrix}\vec{F}(S(u,v))\\ S_u(u,v)\\ S_v(u,v)\end{pmatrix}.$$

במחשבה על מושגי הפיזיקה, האינטגרל מודד שטף כמו בבעיה הבאה:
נתון כלי נוזלים $R\subset\mathbb{R}^3$, אשר נעים בכל נקודה $p\in R$ בכיוון ובעוצמה $\vec{F}(p)$. כמה נפח נוזל עובר דרך שפת R, המשטח $S=\partial R$, ביחידת זמן? זהו השטף שהשדה $\vec{F}$ מבצע דרך S.

הערה.

בשאלות מסוג זה חשוב לציין את כיוון השטף אותו אנו מחפשים. זה מתבטא בסימן $\pm$ של $\vec{N}$, כאשר הכיוון החיובי הינו 'החוצה' מן המשטח.

הערה.

האינטגרל מוגדר היטב גם אם הפרמטריזציה אינה חלקה בקבוצה ממידה אפס.

תרגיל 11.1.1.

חשבו את השטף של השדה הוקטורי $\vec{F}=(x,y,z)$, כלפי חוץ, על ספירת היחידה $x^2+y^2+z^2=1$.

פתרון:

נעבור לפרמטריזציה כדורית:

$$\vec{L}\left(\theta,\varphi\right)=\left(\sin\varphi\cos\theta,\sin\varphi\sin\theta,\cos\varphi\right)\ ,\ 0\leq\theta\leq2\pi,0\leq\varphi\leq\pi$$

ולכן: .

$$\begin{aligned}\vec{N}=\vec{L}_{\theta}\times\vec{L}_{\varphi}&=\begin{vmatrix}\hat{i} & \hat{j} & \hat{k}\\ -\sin\varphi\sin\theta & \sin\varphi\cos\theta & 0\\ \cos\varphi\cos\theta & \cos\varphi\sin\theta & -\sin\varphi\end{vmatrix}\\ &=\left(-\sin^{2}\varphi\cos\theta,-\sin^{2}\varphi\sin\theta,-\sin\varphi\cos\varphi\right).\end{aligned}$$

נציב $\varphi=\frac{\pi}{2},\theta=0$ בשביל הנקודה $L(0,\frac{\pi}{2})=(1,0,0)$ בה הנורמל עד כדי סימן

$$\vec{N}(0,\frac{\pi}{2})=\pm(-1,0,0)$$

אז נבחר בסימן מינוס, בכדי לקבל את הנורמל $(1,0,0)$ החוצה. .

הערה.

שימו לב כי בנקודה $L(0,0)=(0,0,1)$ הנורמל מתאפס, ושם הפרמטריזציה אינה חלקה. אך זה קורה רק בקטבים, שהם קבוצה ממידה אפס, וכפי שציינו האינטגרל מסוג שני עדיין מוגדר.

לכן :

$$\begin{aligned}I&=\iint_{\Delta}\left(\vec{F}\left(x\left(\varphi,\theta\right),y\left(\varphi,\theta\right),z\left(\varphi,\theta\right)\right)\cdot\vec{N}\left(x\left(\varphi,\theta\right),y\left(\varphi,\theta\right),z\left(\varphi,\theta\right)\right)\right)d\varphi d\theta\\ &=\int_{0}^{2\pi}\int_{0}^{\pi}\left(\sin\varphi\cos\theta,\sin\varphi\sin\theta,\cos\varphi\right)\cdot\left(\sin^{2}\varphi\cos\theta,\sin^{2}\varphi\sin\theta,\sin\varphi\cos\varphi\right)d\varphi d\theta\\ &=\int_{0}^{2\pi}\int_{0}^{\pi}\left(\sin^{3}\varphi\cos^{2}\theta+\sin^{3}\varphi\sin^{2}\theta+\sin\varphi\cos^{2}\varphi\right)d\varphi d\theta\\ &=\int_{0}^{2\pi}\int_{0}^{\pi}\left(\sin\varphi\right)d\varphi d\theta\\ &=2\pi\left(-\cos\varphi\Big|_{0}^{\pi}\right)=4\pi\end{aligned}$$

דרך חלופית: באופן כללי בכל נקודה על ספירה מתקיים כי הנורמל <u>החיצוני</u> הינו

$$\vec{N}\left(x,y,z\right)=\left(x,y,z\right).$$

בפרט עבור המקרה של ספירת היחידה נקבל כי

$$\vec{F}\cdot\hat{n}\ =\ \left(x,y,z\right)\cdot\left(x,y,z\right)=x^{2}+y^{2}+z^{2}=1$$

ולכן מתקיים

$$\iint_S \vec{F} \cdot d\vec{s} = \iint_S 1 ds \stackrel{(*)}{=} 4\pi$$

כאשר שטח ספירת היחידה הינו 4π.

תרגיל 11.1.2.

חשבו את השטף של השדה הוקטורי $\vec{F} = (-x, -y, z^2)$ כלפי חוץ, על המשטח הסגור החסום ע"י:

$$z = \sqrt{x^2 + y^2}, z = 1, z = 2$$

פתרון:

יש שלושה חלקים בהם יש לחשב את הנורמל בנפרד. נסמן ב-S_1 את המכסה העליון, ב-S_2 את המכסה התחתון וב-S_3 את מעטפת החרוט.

- על S_1,

נעבור לפרמטריזציה גלילית $\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \\ z = 2 \end{cases}, 0 \le r \le 2, 0 \le \theta \le 2\pi$. מתקיים:

$$\vec{L}_r \times \vec{L}_\theta = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -r\sin\theta & r\cos\theta & 0 \end{vmatrix} = (0, 0, r)$$

הנורמל החיצוני הוא $(0, 0, r)$.

$$\begin{aligned} I_1 &= \iint_{S_1} \vec{F} \cdot \hat{n} ds = \iint_\Delta \left(\vec{F} \cdot \vec{N}\right) d\theta dr \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^2 (-r\cos\theta, -r\sin\theta, 4) \cdot (0, 0, r)\, dr d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^2 (4r)\, dr d\theta = \int_0^{2\pi} \left(\frac{4r^2}{2}\right)\Big|_0^2 d\theta = 2\pi(8) = 16\pi \end{aligned}$$

- על S_2,

נעבור לפרמטריזציה גלילית $\begin{cases} x &= r\cos\theta \\ y &= r\sin\theta \\ z &= 1 \end{cases}$, $0 \le r \le 1, 0 \le \theta \le 2\pi$. מתקיים :

$$\vec{L}_r \times \vec{L}_\theta = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -r\sin\theta & r\cos\theta & 0 \end{vmatrix} = (0,0,r)$$

הפעם על המחסה התחתון, הנורמל החיצוני הוא $(0,0,-r)$.

$$\begin{aligned} I_2 &= \iint_{S_2} \vec{F}\cdot d\vec{s} = \iint_\Delta \left(\vec{F}\cdot\vec{N}\right) d\theta dr = \int_0^{2\pi}\int_0^1 (-r\cos\theta, -r\sin\theta, 1)\cdot(0,0,-r)\, drd\theta \\ &= \int_0^{2\pi}\int_0^1 (-r)\, drd\theta = \int_0^{2\pi}\left(-\frac{r^2}{2}\right)\Big|_0^1 d\theta = 2\pi\left(-\frac{1}{2}\right) = -\pi \end{aligned}$$

- על S_3,

נעבור לפרמטריזציה הבאה $0 \le \theta \le 2\pi, 1 \le r \le 2$, $L(\vec{\theta}, r) = (r\cos\theta, r\sin\theta, r)$.

$$\vec{L}_\theta \times \vec{L}_r = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ -r\sin\theta & r\cos\theta & 0 \\ \cos\theta & \sin\theta & 1 \end{vmatrix} = (r\cos\theta, r\sin\theta, -r).$$

בכדי לקבל את השטף החיצוני, מפני שזהו חרוט הפונה מטה (z והרדיוס גדלים יחדיו) על הנורמל החיצוני להיות עם רכיב z שלילי. משמע $\vec{N} = (r\cos\theta, r\sin\theta, -r)$.

$$\begin{aligned} I_3 &= \iint_S \vec{F}\cdot d\vec{s} = \iint_\Delta \left(\vec{F}\cdot\vec{N}\right) d\theta dr \\ &= \int_0^{2\pi}\int_1^2 (-r\cos\theta, -r\sin\theta, r^2)\cdot(r\cos\theta, r\sin\theta, -r)\, drd\theta \\ &= \int_0^{2\pi}\int_1^2 \left(-r^2\cos^2\theta - r^2\sin^2\theta - r^3\right) drd\theta = \int_0^{2\pi}\int_1^2 \left(-r^2 - r^3\right) drd\theta \\ &= \int_0^{2\pi}\left(-\frac{r^3}{3} - \frac{r^4}{4}\right)\Big|_1^2 d\theta \\ &= 2\pi\left(\frac{-2^3}{3} - \frac{2^4}{4} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) = 2\pi\left(\frac{-7}{3} - \frac{15}{4}\right) = -\frac{73}{6}\pi. \end{aligned}$$

סה"כ השטף שווה $I_1 + I_2 + I_3 = 16\pi - \pi - \frac{73}{6}\pi = \frac{90}{6}\pi - \frac{73}{6}\pi = \frac{17}{6}\pi$.

11.2 משפט גאוס (משפט הדיברגנץ)

כעת נראה משפט מקביל למשפט גרין בתלת מימד. בהינתן גוף תלת מימדי סגור V, אפשר שפתו הינה המשטח $S = \partial V$, משפט גאוס קושר בין האינטגרל המשטחי מהסוג השני על S ובין האינטגרל התלת מימדי על V.

נציין שההכללה המדוייקת לתלת מימד של משפט גרין הנה משפט סטוקס, אשר לא נלמד הסמסטר.

תזכורת.

אם $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, F(x,y,z) = (P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z))$ שדה וקטורי, נגדיר:

$$\text{div}\, F(x,y,z) = P_x(x,y,z) + Q_y(x,y,z) + R_z(x,y,z).$$

לפעמים גם נסמן:

$$\text{div}\, F = \nabla \cdot F$$

.

בדו מימד, אנו שמים לב כי הביטוי $\text{Div}F = P_x + Q_y$ נראה שונה מהביטוי $Q_x - P_y$ במשפט גרין. זאת כי באינטגרל קווי ביצענו כפל סקאלרי עם הווקטור המשיק, בעוד באינטגרל משטחי ביצענו כפל סקאלרי עם הנורמל. אם ניקח

$$\vec{N} = (-dy, dx), \quad (-dy, dx) \cdot (dx, dy) = 0$$

אז נקבל

$$F \cdot \vec{N} = -P_y + Q_x.$$

תזכורת.

יהי V גוף סגור וחסום. נניח כי שפתו $S = \partial V$ הינה משטח סגור וחסום, דו-צדדי וחלק למקוטעין. ניקח את הנורמל אל S להיות עם הכיוון החוצה . אם $\vec{F} : R \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ שדה וקטורי גזיר ברציפות, כאשר $V \cup S \subset R$ פתוחה, אז:

$$\oiint_{\partial V} \vec{F} \cdot d\vec{s} = \iiint_V \text{div}(\vec{F}) dxdydz.$$

ההקבלה הפיזיקלית הינה ש $\oiint_{\partial V} \vec{F} \cdot d\vec{s}$ הוא השטף ש$\vec{F}$ עושה דרך ∂V, ואפשר לחשוב על $\text{div}\, \vec{F}(p)$ בתור כמות החומר שיוצאת מנקודה p.

תזכורת.

הרעיון מאחורי ההוכחה של משפט גאוס דומה לזה של משפט גרין, כאשר כדאי להתבונן בתחומים פשוטים . למשל לתחום פשוט עבור z , $a(x,y) < z < b(x,y)$, נראה

$$\iiint_V R_z dxdydz = \iint_S \left(\int_{a(x,y)}^{b(x,y)} R_z dz\right) dxdy = \iint_S R(b(x,y)) - R(a(x,y)) dxdy.$$

כעת ניקח שלושה חלקים של המשטח , בהם הנורמלים הינם $\vec{N}_1 = (a_x, a_y, -1)$, $\vec{N}_2 = (-b_x, -b_y, 1)$

$\vec{N}_3 = (*,*,0)$. מכאן

$$\iint_S R(b(x,y)) - R(a(x,y))dxdy =$$

$$\iint_{S_1} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ R(a(x,y)) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ -1 \end{pmatrix} dxdy +$$

$$\iint_{S_2} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ R(b(x,y)) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -b_x \\ -b_y \\ 1 \end{pmatrix} dxdy +$$

$$\iint_{S_3} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ R(b(x,y)) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} * \\ * \\ 0 \end{pmatrix} dxdy =$$

$$\iint_S \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ R \end{pmatrix} d\vec{S}.$$

באופן דומה מראים עבור תחומים פשוטים עבור x, y.

הערה.

לא ניתן להשתמש במשפט גאוס על משטחים שאינם סגורים. עם זאת, פעמים רבות נוכל להוסיף חלק למשטח, בכדי שעתה יהיה סגור, להשתמש במשפט גאוס, ולהחסיר את השטף שהתווסף על החלק שהוספנו.

תרגיל 11.2.1.

חשבו את השטף של השדה הוקטורי $\vec{F} = (x,y,z)$, כלפי חוץ, על ספירת היחידה $x^2+y^2+z^2=1$.

פתרון:

נפתור בעזרת משפט הדיברגנץ: הספירה הינה מעטפת סגורה הסוגרת את כדור היחידה, השדה הוקטורי $\vec{F}$ גזיר ברציפות בכל כדור היחידה ולכן מתקיים:

$$\oiint_S \vec{F} \cdot d\vec{s} = \iiint_V \text{div}\, \vec{F} dV$$

כאשר $\text{div}\, \vec{F} = \nabla \cdot \vec{F} = \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y} + \frac{\partial f_3}{\partial z} = 1+1+1 = 3$, כלומר

$$\oiint_S \vec{F} \cdot d\vec{s} = \iiint_V 3dV = 3\iiint_V dV \overset{(*)}{=} 3 \cdot \frac{4\pi}{3} = 4\pi$$

כאשר השתמשנו בכך שנפח כדור יחידה הוא $\frac{4\pi}{3}$.

תרגיל 11.2.2.

חשבו שטף חיצוני של $\vec{F}\cdot d\vec{s}$ $I=\iint_S$ עבור $F(x,y,z)=(y^2,x^5,5z)$ כאשר

$$S=\left\{(x,y,z)|z=\sqrt{25-x^2-y^2},x^2+y^2\le 16\right\}\cup\left\{(x,y,z)|0\le z\le 3,x^2+y^2=16\right\}$$

פתרון:

הגוף הוא גליל ברדיוס 4 ומכסה ספירי ברדיוס 5.
נשים לב שמתקיים:

$$\text{div}\, F=5$$

על מנת להשתמש במשפט גאוס, נצטרך לסגור את המשטח, כלומר להוסיף את S_1 שהוא:

$$S_1=\{(x,y,0)|x^2+y^2\le 16\}$$

אבל, נשים לב כי עליו השטף הוא אפס, כי:

$$\hat{n}=\pm(0,0,1)\implies F\cdot\hat{n}=\pm 5z=0$$

ולכן כדאי להשתמש במשפט גאוס.

$$\iint_S\vec{F}\cdot d\vec{s}=\oiint_{S\cup S_1}\vec{F}\cdot d\vec{s}=\iiint_V \text{div}\,\vec{F}dV=\iiint_V 5dV$$

כדי לחשב את האינטגרל הנפחי נשתמש בקואורדינטות גליליות:

$$\Delta=\left\{(r,\theta,z)\mid 0<r\le 4\ \ 0\le z\le\sqrt{25-r^2},\ \ 0\le\theta\le 2\pi\right\}$$

על כן:

$$\begin{aligned}\iiint_V 5dV&=5\iiint_\Delta rdV=5\int_0^{2\pi}\int_0^4\int_0^{\sqrt{25-r^2}} rdzdrd\theta=10\pi\int_0^4 r\sqrt{25-r^2}dr\\&=10\pi\left[(25-r^2)^{\frac{3}{2}}\cdot\frac{2}{3}\cdot(-\frac{1}{2})\right]\Big|_0^4=\cdots=\frac{980\pi}{3}\end{aligned}$$

תרגיל 11.2.3.

חשבו את $I=\iint_S\vec{F}\cdot d\vec{s}$, עבור השדה $\vec{F}=\left(x^3-\cos y,y^3+\sqrt{x^3+z^2},z+5xy\right)$,
כאשר $S=\left\{(x,y,z)\,|z=4-x^2-y^2,z\ge 0\right\}$ (פרבולואיד).

פתרון:

מצד אחד $\text{div}\,\vec{F} = \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y} + \frac{\partial f_3}{\partial z} = 3x^2 + 3y^2 + 1$, מצד שני, אם נחשב את האינטגרל המשטחי מסוג שני, כנראה שנקבל אינטגרל לא כל כך יפה משום שהשדה הוקטורי לא כל כך נעים כאן.
לכן, נראה שיהיה פשוט יותר לפתור תרגיל זה עם משפט הדיברגנץ.
הבעיה: המשטח אינו סגור. נסגור תחילה את המשטח S, בעזרת המכסה שנסמנו S_1, ב-$z = 0$ (S נראה כמו קערה הפוכה המסתיימת ב-$z = 0$). נציב $z = 0$ במשוואה $z = 4 - x^2 - y^2$, ונקבל כי המכסה S_1 הינו עיגול ברדיוס 2 , כלומר $S_1 = \{(x, y, z)\,|x^2 + y^2 \le 4, z = 0\}$.
עתה, המשטח $S \cup S_1$ הינו משטח סגור, החוסם את הגוף V, השדה $\vec{F}$ מוגדר בכל V, ולכן עפ"י משפט הדיברגנץ מתקיים :

$$\oiint_{S\cup S_1} \vec{F} \cdot d\vec{s} = \iiint_V \text{div}\,\vec{F} dV = \iiint_V \left(3x^2 + 3y^2 + 1\right) dxdydz$$

נבצע החלפת משתנים לקואורדינטות גליליות:

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \\ z = z \end{cases} \quad , \ |J| = r, 0 \le z \le 4 - r^2, 0 \le \theta \le 2\pi, 0 \le r \le 2$$

ולכן:

$$\begin{aligned}
\iiint_V 3x^2 + 3y^2 + 1dxdydz &= \int_0^{2\pi}\int_0^2\int_0^{4-r^2} \left(3r^2+1\right) rdzdrd\theta \\
&= \int_0^{2\pi}\int_0^2 \left(3r^2+1\right) r \left(z\Big|_0^{4-r^2} \right) drd\theta \\
&= \int_0^{2\pi}\int_0^2 \left(3r^2+1\right) r \left(4-r^2\right) drd\theta \\
&= \int_0^{2\pi}\int_0^2 \left(12r^3 + 4r - 3r^5 - r^3\right) drd\theta \\
&= \int_0^{2\pi} \left(\frac{12r^4}{4} + \frac{4r^2}{2} - \frac{3r^6}{6} - \frac{r^4}{4}\right) |_0^2 d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} \left(\frac{12\cdot 16}{4} + \frac{4\cdot 4}{2} - \frac{3\cdot 64}{6} - \frac{16}{4}\right) d\theta \\
&= 2\pi\left(48 + 8 - \frac{64}{2} - 4\right) = 2\pi\left(52 - \frac{64}{2}\right) \\
&= \pi\left(104 - 64\right) = 40\pi
\end{aligned}$$

נותר לנו לחשב את האינטגרל המשטחי מסוג שני של השדה:

$$\vec{F} = \left(x^3 - \cos y, y^3 + \sqrt{x^3 + z^2}, z + 5xy\right)$$

על המשטח

$$S_1 = \{(x,y,z)\,|x^2+y^2 \le 4, z=0\}$$

נשתמש בפרמטריזציה גרפית, $z=0$, אז $N=(0,0,-1)$ פונה החוצה מהגוף.

$$\iint_{S_1} FdS = \iint_{\Delta} -z-5xydxdy = -5\iint_{\Delta} xydxdy$$

נעבור לקואורדינטות פולריות ונקבל

$$= -5\int_0^{2\pi}\int_0^2 r^3\cos\theta\sin\theta drd\theta = -\frac{5\cdot 16}{4\cdot 2}\int_0^{2\pi}\sin 2tdt = 0$$

הערה.

אפשר גם להשתמש בפרמטריזציה גלילית $0\le\theta\le 2\pi, 0\le r\le 2$, $\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \\ z = 0\end{cases}$,

$$\vec{L}_r \times \vec{L}_\theta = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -r\sin\theta & r\cos\theta & 0 \end{vmatrix} = (0,0,r)$$

כאן הסימן המתאים לנורמל החיצוני הוא מינוס (מצביע כלפי מטה ולכן בעל רכיב z שלילי) :

$$\begin{aligned}\iint_{S_1}\vec{F}\cdot d\vec{s} &= \iint_{\Delta}\left(\vec{F}\cdot\vec{N}\right)d\theta dr = \int_0^{2\pi}\int_0^2 \left(5r^2\cos\theta\sin\theta\right)\cdot(-r)\,drd\theta \\ &= \int_0^{2\pi}\int_0^2\left(-5r^3\cos\theta\sin\theta\right)drd\theta = -5\int_0^{2\pi}\int_0^2 r^3\cos\theta\sin\theta drd\theta \\ &= -5\int_0^{2\pi}\cos\theta\sin\theta\left(\left.\frac{r^4}{4}\right|_0^2\right)d\theta = -20\int_0^{2\pi}\cos\theta\sin\theta d\theta \\ &= -\frac{20}{2}\int_0^{2\pi}2\cos\theta\sin\theta d\theta = -10\left(\left.\sin^2\theta\right|_0^{2\pi}\right) = 0\end{aligned}$$

סה"כ:

$$\iint_S \vec{F}\cdot d\vec{s} = \iint_{S\cup S_1}\vec{F}\cdot d\vec{s} - \iint_{S_1}\vec{F}\cdot d\vec{s} = 40\pi - 0 = 40\pi$$